刚体的平面运动

9.1 刚体平面运动的分解

在工程实际中，常常遇到刚体的一种较复杂运动——平面运动。它可以看作为平动和转动的合成。

一、刚体平面运动的概念

在工程实际中有许多物体的运动，如图9.1所示的沿直线轨道滚动的车轮，图9.2中曲柄连杆机构中的连杆*AB*的运动等，这些刚体的运动既不是平动，又不是绕定轴的转动，但它们有一个共同的特点，即在运动中，刚体上的任意一点与某一固定平面始终保持相等的距离。这种运动称为平面运动。

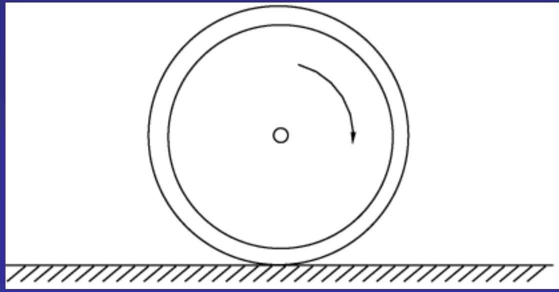

图9.1 滚动车轮

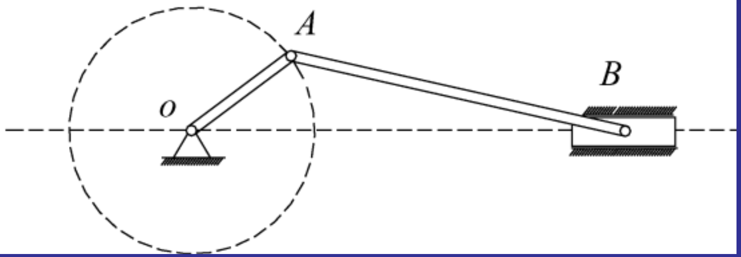

图9.2 连杆的运动

9.1 刚体平面运动的分解

二、刚体平面运动的运动方程

根据刚体平面运动的特点，作一平面*N*与固定平面*M*平行，*S*是从刚体*T*上截得的一平面图形，如图9.3所示。刚体运动时，平面图形*S*将始终在平面*N*内运动。于是刚体上任一条垂直于平面图形*S*的线段*A1A2*始终保持与自身平行，即线段*A1A2*作平动，故线段上各点的运动完全相同。这样，线段与平面图形的交点*A*的运动就可以代表整个线段的运动，而刚体可看成由无数条与*A1A2*平行的线段组成，因此，平面图形*S*的运动就可以代表整个刚体的运动。换句话说，刚体的平面运动可以简化为平面图形在其自身平面内的运动。

为了描述平面图形的运动，在该平面内取静坐标系*O*1*xy*，如图9.4所示。图形*S*的位置可用其上任一线段*OP*的位置来确定，而线段*OP*的位置则由*O*点的坐标*xo*，*yo*和*OP*对于*x*轴的转角来确定。当平面图形*S*运动时，均随时间*t*变化，它们都是*t*的单值连续函数，即

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ \varphi = f_3(t) \qquad (9.1)$$

9.1 刚体平面运动的分解

上式完全确定了每一瞬时平面图形*S*的运动，故该式称为刚体平面运动的运动方程。

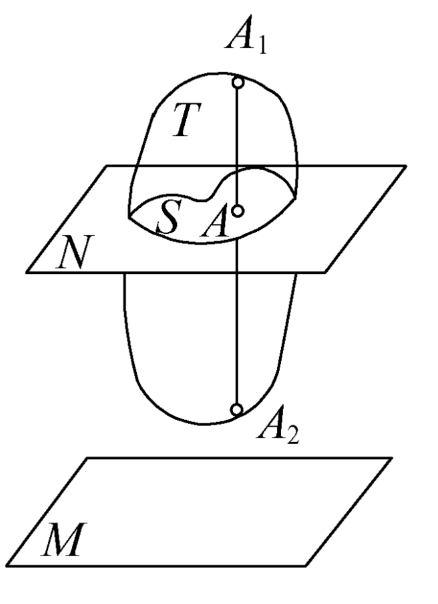

图9.3 刚体的平面运动的简化

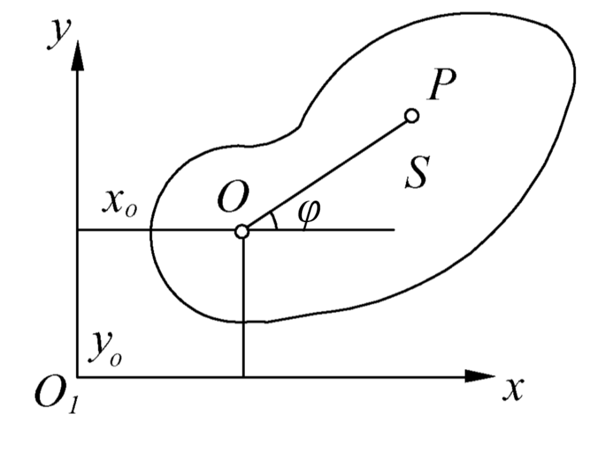

图9.4 平面运动的描述

9.1 刚体平面运动的分解

三、刚体平面运动的分解

由式(9.1)可知，在刚体运动中，如果转角为常量，线段*OP*的方位将保持不变，刚体将按点*O*的运动规律作平动；如果点*O*坐标不变，即点*O*不动，刚体将绕过*O*点且垂直与图形的转轴转动。因此在一般情况下，刚体的平面运动可以分解为平动和定轴转动。

在平面图形*S*上任取一点*O*，并以点*O*为原点作坐标系Ox’y’，如图9.5所示。平面图形*S*运动时，坐标系Ox’y’将随之运动，并保持原点与图形上的*O*点重合，而且Ox'和Oy'轴始终与$O1x$和$O1y$轴平行。定义点*O*为基点，则Ox’y’为固结在基点*O*上的平动坐标系。这样，平面图形*S*的运动就分解为随基点的平动和绕基点的转动这两种运动。

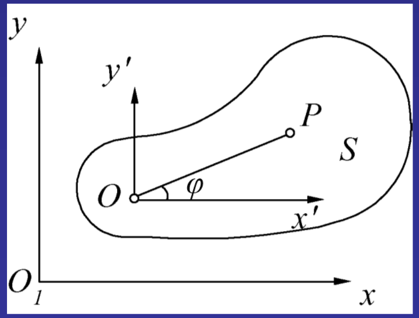

图9.5 平动坐标系$Ox'y$

9.1 刚体平面运动的分解

四、基点的选择

由以上的分析可知，将平面运动分解时，基点的选择是任意的。由于平面图形上各点的运动不同，所以选择不同的基点，平动坐标系的运动也不同。这就说明平面图形分解的平动部分与基点的选择有关。那么转动部分与基点的选择是否有关呢？现分析如下。

如图9.6所示，设平面图形由I位置运动到II位置时，以其上线段*AB*及*A*1*B*1来表示图形在两位置的情形。如以点*A*为基点，先将线段*AB*平动到*A*1*B*2，然后绕点*A*1转过角φ到达*A*1*B*1位置；如以*B*点为基点，则先将线段*AB*平动到*A*2*B*1位置，然后图形绕*B*1点转过角φ2到达*A*1*B*1位置。由如图9.6所示得知，选择不同的基点，转动部分的角位移是相同的，即φ1=φ2。

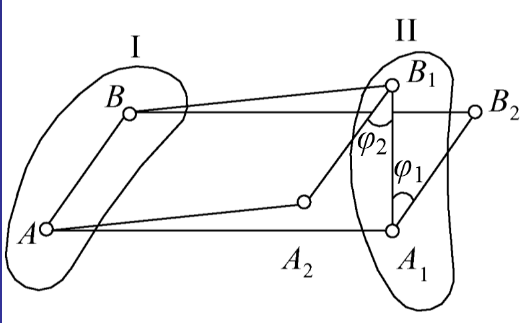

图9.6 选择基点

9.1 刚体平面运动的分解

上式两边对时间求导得

$$\omega_1=\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t},\quad \omega_2=\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}\ \text{及}\quad \alpha_1=\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t},\quad \alpha_2=\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}$$

故有

$$\boldsymbol{\omega_1=\omega_2,\quad \alpha_1=\alpha_2}$$

综上所述，平面图形*S*相对平动坐标系绕不同基点转动的角速度和角加速度都相同。因此，平面图形运动分解的转动部分与基点的选择无关。以后提到平面图形相对平动坐标系转动的角速度和角加速度时无须指明基点，可统称为平面图形的角速度和平面图形的角加速度。基点虽然可以任意选择，但在解决实际问题时，往往是选择运动规律已知的点作为基点。

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

根据上节的讨论，平面图形的运动总可以分解为平动和转动，那么图形上各点的运动均可视为复合运动。当平面图形运动时，图形上任一点一般作平面曲线运动(绝对运动)，可将其分解为随基点的平动(牵连运动)和绕基点的转动(相对运动)。这样就可根据点的速度合成定理，求得图形上任一点的速度。设某瞬时平面图形*S*的角速度为ω，图形上一点*O*的速度为*vO*，如图9.7所示。为求图形内任意点*M*的速度，现选取已知点*O*为基点，则图形的牵连运动是随基点*O*的平动。所以，*M*点的牵连速度 ；又因*M*点的相对运动是以*O*为圆心，*OM*为半径的圆周运动，所以相对速度 $v_e = v_o$ ，其方向垂直于*OM*，指向与角速度转向一致， $v_r = v_{MO}$

$$v_{BA} = AB \cdot \omega_{AB}$$

由点的速度合成定理 ，可得*M*点的绝对速度为

$$v_a = v_e + v_r$$

$$v_M = v_O + v_{MO} \qquad (9.2)$$

上式表明，平面图形上任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点的相对转动的速度的矢量和。这种求平面图形上任一点速度的方法称为基点法，又称速度合成法。

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

应用合矢量定理，将上式向OM连线上投影，如图9.7所示，得

$$[\boldsymbol{v}_M]_{\mathrm{OM}}=[\boldsymbol{v}_O]_{\mathrm{OM}} \tag{9.3}$$

上式表明，平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影相等，这称为速度投影定理。

利用速度投影定理求平面图形上任一点速度的方法称为速度投影法。当平面图形上某一点速度的大小和方向均已知，另一点的速度方向已知，欲求该点速度大小时，应用速度投影法可以迅速得到结果。

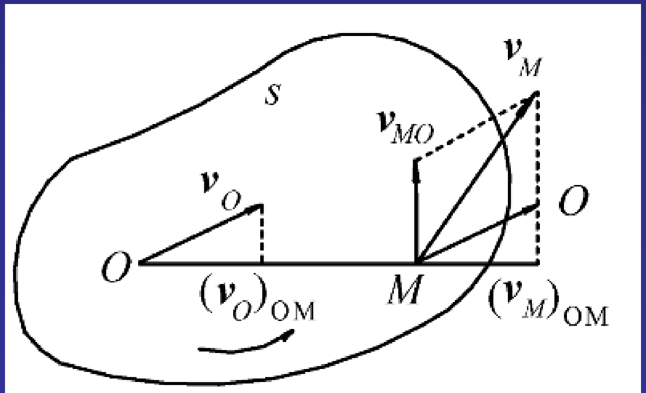

图9.7 速度合成

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

【例9.1】 如图9.8所示的平面机构中，AB=BD=DE==300mm。在图示位置时，BD//AE，杆AB 的角速度为ω=5rad/s。试求此瞬时杆DE的角速度。

解：杆*DE*绕点*E*转动，为求其角速度可先求点*D* 的速度。杆*BD*作平面运动，而点*B* 又是定轴转动刚体*AB*上一点，其速度为

$$v_B = \omega \times l = 1.5m/s$$

方向如图9.8所示。

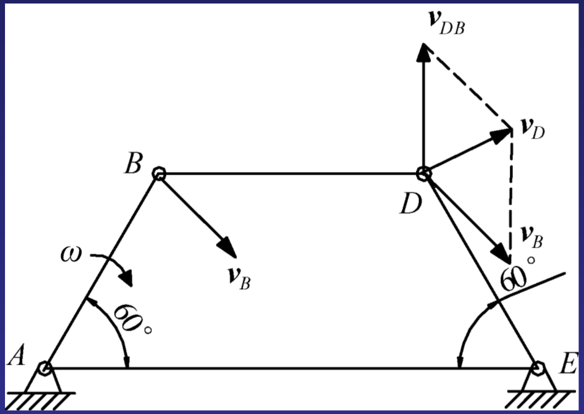

图9.8 平面机构

对于平面运动的杆*BD*，可以取*B*为基点，则

$$v_D = \boldsymbol{v}_B + v_{DB}$$

其中VB大小和方向已知，VDB的方向与*BD*垂直，点*D*的速度VD的方向与*DE*垂直。其速度平行四边形如图9.8所示。由此瞬时的几何关系得

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_{DB} = \boldsymbol{v}_B = 1.5m/s$$

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

于是解出此瞬时杆*DE*的角速度为 $\omega_{DE}=\frac{v_D}{l}=\frac{1.5}{0.3}=5rad/s$

转向与VD方向一致，即按顺时针方向旋转。

本例中*D*点的速度VD还可用速度投影法求解。据公式(9.3)有

$$\boldsymbol{v}_D\cos 30°=\boldsymbol{v}_B\cos 30°$$

则VD=VB=1.5m/s，计算结果与基点法求得的相同。

【例9.2】半径r的轮子沿直线轨道作无滑动的滚动，已知轮轴O以匀速前进，求车轮的角速度和边缘上的B点的速度。

解：已知轮子作无滑动的滚动，所谓无滑动就是车轮与轨道相互接触的点*P*和*P*‘具有相同的速度，因为轨道静止，所以车轮与轨道接触点的速度等于零，即 $v_P=0$

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

取点*P*为基点，轮轴*O*为动点，按照式(9.2)有 $\boldsymbol{v}_o = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{OP}$

设车轮转动的角速度为ω，则 $v_{OP} = r\omega$，且 $v_P = 0$，故

$$v_o = v_{OP} = r\omega$$

因此车轮转动的角速度 $\omega_1 = \dfrac{v_o}{r}$，由V0的方向可知ω为顺时针转向。

再以轮轴*O*为基点，点*B*为动点，按照式(9.2)有 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$

其中，速度VO的大小和方向为已知；速度VBO的方向垂直向下，且

$$v_{BO} = r\omega = v_o$$

9.2 用基点法求平面图形内各点的速度

因此画出的速度平行四边形是一个正方形。

根据图示的几何关系有 $v_B = \sqrt{2} v_o$

其方向与V0的方向成45°角。

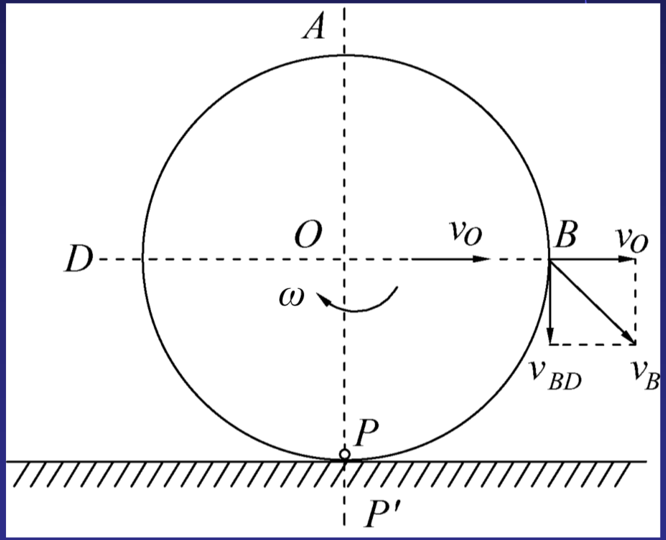

图9.9 轮子的纯滚动

9.3　用瞬心法求平面图形内各点的速度

利用基点法求平面图形内任一点的速度，基点是可以任意选择的。如果某瞬时能在平面图形上找到速度为零的点作为基点，那问题将简单得多，此时图形上任一点速度就等于绕基点转动的速度。

一、速度瞬心法

设某瞬时已知图形*O*点的速度为*vO*，图形的角速度为ω，如图9.10所示。过*O*点顺ω转90°作垂直于*vO*的半直线*L*‘，在半直线上取长度，定出点*C*。取*O*为基点，则*C*点相对于基点*O*的速度大小为。如图9.10所示，*vCO*的方向与*vO*方向相反，因此*C*点的速度大小为 $v_C = v_O - v_{CO} = 0$

即在此瞬时，图形上点*C*的速度为零。由此可见，在平面图形内或在其扩展部分，速度为零的点在任一瞬时都是存在的。该点称为平面图形在该瞬时的瞬时速度中心，简称为速度瞬心。

现取速度瞬心*C*作为基点来计算平面图形上任一点*A*的速度，如图9.11所示。由于基点的瞬时速度等于零，则点*A*的速度为

$$v_A = v_C + v_{AC} = v_{AC} \qquad (9.4)$$

9.3　用瞬心法求平面图形内各点的速度

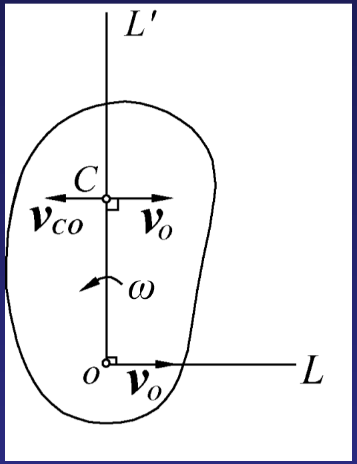

图9.10 存在速度瞬心

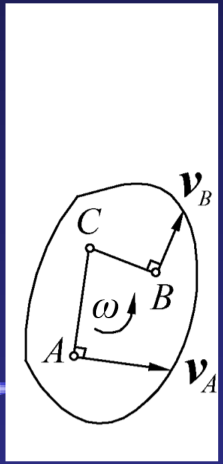

图9.11 平面图形绕速度瞬心瞬时转动

即平面图形上任一点的绝对速度就等于该点随图形绕瞬心转动的速度。

因此，平面图形的运动可以看作是绕速度瞬心作瞬时转动。在该瞬时图形上各点的速度分布与定轴转动刚体上各点速度的分布相同，如图9.11所示。图形上任一点的速度的大小与该点到速度瞬心的距离成正比，速度的方向垂直于该点与速度瞬心的连线，指向图形转动的一方。利用速度瞬心求平面图形内任一点的速度的方法称为瞬心法。应当注意的是，在不同的瞬时，平面图形有不同的速度瞬心，刚体的平面运动可归结为依次绕一系列的速度瞬心的瞬时转动。