

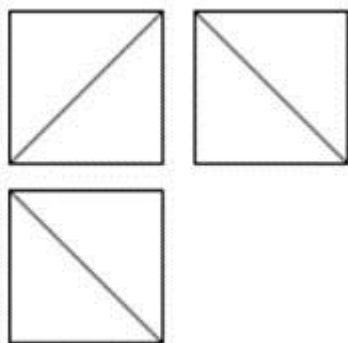
宁夏回族自治区石嘴山市第三中学 2024 届高三数学四模试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

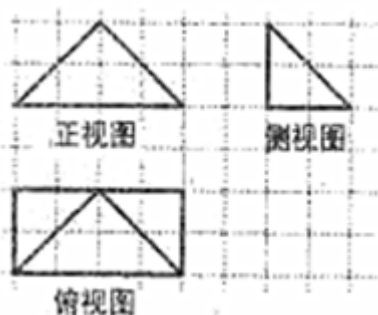
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则“ $a_1 < 0$ ”是“ $S_{2021} < 0$ ”的（ ）
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+4)$ ，且 $x \in (0, 1]$ 时，
 $f(x) = \log_2(x+1)$ ，则 $f(2018) + f(2019) =$ （ ）
A. 2 B. -2 C. 1 D. -1
3. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为（ ）
A. 21 B. 22 C. 23 D. 24
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列， $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，设 $c_n = a_{b_n}$ ，
 $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，则当 $T_n < 2020$ 时， n 的最大值是（ ）
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $3a_5 = 7a_{10}$ ，且 $a_1 < 0$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$) 中最小的是（ ）
A. S_7 或 S_8 B. S_{12} C. S_{13} D. S_{14}
6. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5 a_6 = 3$ ，则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} =$ （ ）
A. $1 + \log_3 5$ B. 6 C. 4 D. 5
7. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如下图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为（ ）



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

8. 如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面体的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（ ）



- A. 2 对 B. 3 对
C. 4 对 D. 5 对

9. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ ($f(x) \neq 0$), 且在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减, 已知 α, β 是

锐角三角形的两个内角, 则 $f(\sin \beta), f(\cos \alpha)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(\sin \beta) < f(\cos \alpha)$ B. $f(\sin \beta) > f(\cos \alpha)$
C. $f(\sin \beta) = f(\cos \alpha)$ D. 以上情况均有可能

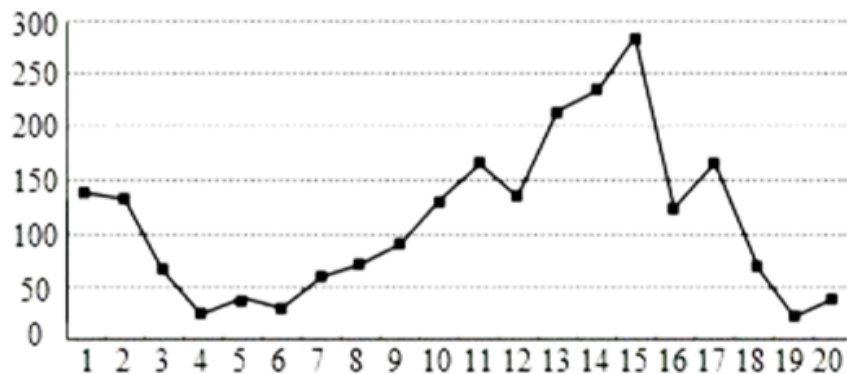
10. 已知 $y = ax + b$ 与函数 $f(x) = 2 \ln x + 5$ 和 $g(x) = x^2 + 4$ 都相切, 则不等式组 $\begin{cases} x - ay + 3 \geq 0 \\ x + by - 2 \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域在

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 内的面积为 ()

- A. 2π B. 3π C. 6π D. 12π

11. 空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数, AQI 指数值趋小, 表明空气质量越好, 下图是某市 10 月 1 日-20 日

AQI 指数变化趋势, 下列叙述错误的是 ()



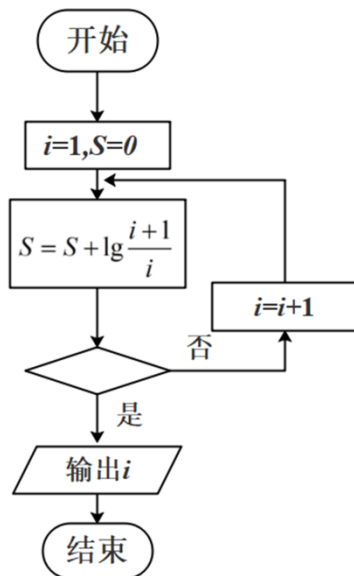
- A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100

B. 这 20 天中的中度污染及以上 (AQI 指数 >150) 的天数占 $\frac{1}{4}$

C. 该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好

D. 总体来说, 该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

12. 运行如图所示的程序框图, 若输出的 i 的值为 99, 则判断框中可以填 ()



A. $S \geq 1$

B. $S > 2$

C. $S > \lg 99$

D. $S \geq \lg 98$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式中含有 x^2 的项的系数是 60, 则展开式中各项系数和为_____.

14. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 含 $\sqrt{x}$ 项的系数为_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 其图象关于直线 $x=1$ 对称, 当 $x \in (0,1]$ 时, $f(x) = -e^{ax}$ (其中 e 是自然对数的底数, 若 $f(2020 - \ln 2) = 8$, 则实数 a 的值为_____.

16. 已知 α 的终边过点 $(3m, -2)$, 若 $\tan(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $m =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2m + \frac{1}{6m} \\ y = 2m - \frac{1}{6m} \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}),$$
 以坐标点 O 为极点, x 轴

的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程;

(2) 已知点 $M(2, 0)$, 若直线 l 与曲线 C 相交于 P, Q 两点, 求 $\frac{1}{|MP|} + \frac{1}{|MQ|}$ 的值.

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (a-b-1)x + b+1 (a, b \in R)$.

(1) 若 $a=0$, 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $0 < a < 2, b=1$, 实数 x_1, x_2 为方程 $f(x) = m - ax^2$ 的两不等实根, 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4 - 2a$.

19. (12分) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$.

(1) 求证: $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$;

(2) 若 $abc=1$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ac$.

20. (12分) 从抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 外一点作该抛物线的两条切线 PA, PB (切点分别为 A, B), 分别与 x 轴相交于 C, D , 若 AB 与 y 轴相交于点 Q , 点 $M(x_0, 2)$ 在抛物线 C 上, 且 $|MF| = 3$ (F 为抛物线的焦点).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) ①求证: 四边形 $PCQD$ 是平行四边形.

②四边形 $PCQD$ 能否为矩形? 若能, 求出点 Q 的坐标; 若不能, 请说明理由.

21. (12分) “绿水青山就是金山银山”, 为推广生态环境保护意识, 高二一班组织了环境保护兴趣小组, 分为两组, 讨论学习. 甲组一共有4人, 其中男生3人, 女生1人, 乙组一共有5人, 其中男生2人, 女生3人, 现要从这9人的两个兴趣小组中抽出4人参加学校的环保知识竞赛.

(1) 设事件 A 为 “选出的这4个人中要求两个男生两个女生, 而且这两个男生必须来自不同的组”, 求事件 A 发生的概率;

(2) 用 X 表示抽取的4人中乙组女生的人数, 求随机变量 X 的分布列和期望

22. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c(\sin 2A - \cos B \sin C) = \frac{1}{2}b \sin 2C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $C = \frac{\pi}{4}, c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

根据等比数列的前 n 项和公式，判断出正确选项.

【详解】

由于数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $S_{2021} = a_1 \cdot \frac{1-q^{2021}}{1-q}$ ，由于 $\frac{1-q^{2021}}{1-q} > 0$ ，所以

$a_1 < 0 \Leftrightarrow S_{2021} < 0$ ，故“ $a_1 < 0$ ”是“ $S_{2021} < 0$ ”的充分必要条件.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查等比数列前 n 项和公式，属于基础题.

2、D

【解析】

$f(x) = f(x+4)$ 说明函数是周期函数，由周期性把自变量的值变小，再结合奇偶性计算函数值.

【详解】

由 $f(x) = f(x+4)$ 知函数 $f(x)$ 的周期为 4，又 $f(x)$ 是奇函数，

$f(2) = f(-2)$ ，又 $f(-2) = -f(2)$ ， $\therefore f(2) = 0$ ，

$\therefore f(2018) + f(2019) = f(2) + f(3) = 0 + f(-1) = 0 - f(1) = -1$.

故选：D.

【点睛】

本题考查函数的奇偶性与周期性，掌握周期性与奇偶性的概念是解题基础.

3、C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$ ，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d = -\frac{2}{3}$ ， $a_1 = 15$ ，则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$ ，所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$ ，则 $n = 23$ ，应选答案 C.

4、B

【解析】

根据题意计算 $a_n = 2n - 1$ ， $b_n = 2^{n-1}$ ， $T_n = 2^{n+1} - n - 2$ ，解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore a_n = 2n - 1$.

$\because \{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1}$.

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_n} = a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-1}}$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 4 - 1) + \cdots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2.$$

$\because T_n < 2020$, $\therefore 2^{n+1} - n - 2 < 2020$, 解得 $n \leq 9$. 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 9.

故选: B.

【点睛】

本题考查了等差数列, 等比数列, 分组求和, 意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

5、C

【解析】

设公差为 d , 则由题意可得 $3(a_1 + 4d) = 7(a_1 + 9d)$, 解得 $d = -\frac{4a_1}{51}$, 可得 $a_n = \frac{(55 - 4n)a_1}{51}$. 令 $\frac{55 - 4n}{51} < 0$, 可得

当 $n \geq 14$ 时, $a_n > 0$, 当 $n \leq 13$ 时, $a_n < 0$, 由此可得数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 中最小的.

【详解】

解: 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $3a_5 = 7a_{10}$, 且 $a_1 < 0$, 设公差为 d ,

$$\text{则 } 3(a_1 + 4d) = 7(a_1 + 9d), \text{ 解得 } d = -\frac{4a_1}{51},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n - 1)d = \frac{(55 - 4n)a_1}{51}.$$

$$\text{令 } \frac{55 - 4n}{51} < 0, \text{ 可得 } n > \frac{55}{4}, \text{ 故当 } n \geq 14 \text{ 时, } a_n > 0, \text{ 当 } n \leq 13 \text{ 时, } a_n < 0,$$

故数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 中最小的是 S_{13} .

故选: C.

【点睛】

本题主要考查等差数列的性质, 等差数列的通项公式的应用, 属于中档题.

6、D

【解析】

由对数运算法则和等比数列的性质计算.

【详解】

由题意 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_{10} = \log_3 (a_1 a_2 \dots a_{10})$

$$= \log_3 (a_5 a_6)^5 = 5 \log_3 (a_5 a_6) = 5 \log_3 3 = 5.$$

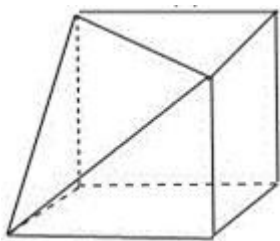
故选: D.

【点睛】

本题考查等比数列的性质, 考查对数的运算法则. 掌握等比数列的性质是解题关键.

7、D

【解析】



试题分析: 如图所示, 截去部分是正方体的一个角, 其体积是正方体体积的 $\frac{1}{6}$, 剩余部分体积是正方体体积的 $\frac{5}{6}$, 所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$, 故选 D.

考点: 本题主要考查三视图及几何体体积的计算.

8、C

【解析】

画出该几何体的直观图 $P-ABCD$, 易证平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PCD \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 从而可选出答案.

【详解】

该几何体是一个四棱锥, 直观图如下图所示, 易知平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

作 $PO \perp AD$ 于 O , 则有 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $PO \perp CD$,

又 $AD \perp CD$, 所以, $CD \perp$ 平面 PAD ,

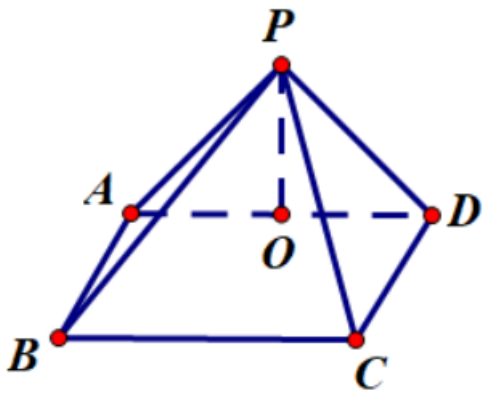
所以平面 $PCD \perp$ 平面 PAD ,

同理可证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ,

由三视图可知: $PO = AO = OD$, 所以, $AP \perp PD$, 又 $AP \perp CD$,

所以, $AP \perp$ 平面 PCD , 所以, 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ,

所以该多面体各表面所在平面互相垂直的有 4 对.



【点睛】

本题考查了空间几何体的三视图，考查了四棱锥的结构特征，考查了面面垂直的证明，属于中档题.

9、B

【解析】

由已知可求得函数的周期，根据周期及偶函数的对称性可求 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，结合三角函数的性质即可比较.

【详解】

由 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ 可得 $f(x+2) = f[(x+1)+1] = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x)$ ，即函数的周期 $T = 2$ ，

因为在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减，故函数在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减，

根据偶函数的对称性可知， $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，

因为 α, β 是锐角三角形的两个内角，

所以 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi$ 即 $\alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta$ ，

所以 $\cos \alpha < \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ 即 $0 < \cos \alpha < \sin \beta < 1$ ，

$f(\cos \alpha) < f(\sin \beta)$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查函数值的大小比较，根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

10、B

【解析】

根据直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都相切，求得 a, b 的值，由此画出不等式组所表示的平面区域以及圆

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ ，由此求得正确选项.

【详解】

$f'(x) = \frac{2}{x}$, $g'(x) = 2x$. 设直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 相切于点 $A(x_0, 2\ln x_0 + 5)$, 斜率为 $\frac{2}{x_0}$, 所以切线方程为

$y - (2\ln x_0 + 5) = \frac{2}{x_0}(x - x_0)$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x + 2\ln x_0 + 3$ ①. 令 $g'(x) = 2x = \frac{2}{x_0}$, 解得 $x = \frac{1}{x_0}$, $g\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0^2} + 4$,

所以切线方程为 $y - \left(\frac{1}{x_0^2} + 4\right) = \frac{2}{x_0}\left(x - \frac{1}{x_0}\right)$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x - \frac{1}{x_0^2} + 4$ ②. 由①②对比系数得 $2\ln x_0 + 3 = -\frac{1}{x_0^2} + 4$,

化简得 $2\ln x_0 + \frac{1}{x_0^2} - 1 = 0$ ③. 构造函数 $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1 (x > 0)$, $h'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$, 所以 $h(x)$

在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 所以 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值也即是最小值, 而 $h(1) = 0$, 所以 $h(x) = 0$ 有唯

一解. 也即方程③有唯一解 $x_0 = 1$. 所以切线方程为 $y = 2x + 3$. 即 $a = 2, b = 3$. 不等式组 $\begin{cases} x - ay + 3 \geq 0 \\ x + by - 2 \geq 0 \end{cases}$ 即

$\begin{cases} x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 3y - 2 \geq 0 \end{cases}$, 画出其对应的区域如下图所示. 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 可化为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 24$, 圆心为

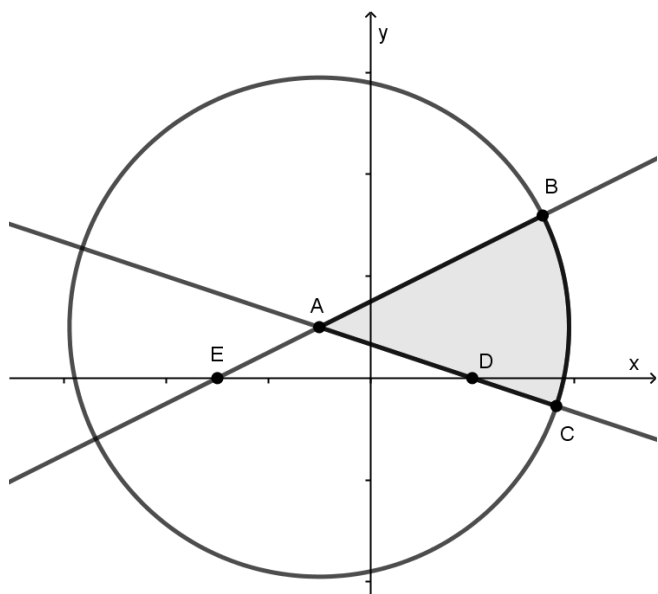
$A(-1, 1)$. 而方程组 $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ 的解也是 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. 画出图像如下图所示, 不等式组 $\begin{cases} x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 3y - 2 \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区

域在 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 内的部分如下图阴影部分所示. 直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 直线 $x + 3y - 2 = 0$ 的

斜率为 $-\frac{1}{3}$. 所以 $\tan \angle BAC = \tan(\angle AED + \angle ADE) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$, 所以 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 而圆 A 的半径为

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 所以阴影部分的面积是 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times (2\sqrt{6})^2 = 3\pi$.

故选: B



【点睛】

本小题主要考查根据公共切线求参数，考查不等式组表示区域的画法，考查圆的方程，考查两条直线夹角的计算，考查扇形面积公式，考查数形结合的数学思想方法，考查分析思考与解决问题的能力，属于难题.

11、C

【解析】

结合题意，根据题目中的 20 天的 AQI 指数值，判断选项中的命题是否正确.

【详解】

对于 A ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中有 10 个低于 100，10 个高于 100，其中第 10 个接近 100，第 11 个高于 100，所以中位数略高于 100，故 A 正确.

对于 B ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中高于 150 的天数为 5，即占总天数的 $\frac{1}{4}$ ，故 B 正确.

对于 C ，由图可知该市 10 月的前 4 天的空气质量越来越好，从第 5 天到第 15 天空气质量越来越差，故 C 错误.

对于 D ，由图可知该市 10 月上旬大部分指数在 100 以下，中旬大部分指数在 100 以上，所以该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好，故 D 正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了对折线图数据的分析，读懂题意是解题关键，并能运用所学知识对命题进行判断，本题较为基础.

12、C

【解析】

模拟执行程序框图，即可容易求得结果.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/505102300122011222>