

2023-2024 学年第一学期
高二年级期中学习质量监测与反馈
数学学科试卷

使用时间：11 月 17 日 考试时间：120 分钟 满分：150 分

命题人：韩磊 审题人：高二数学备课组

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 直线 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ 的倾斜角是 ()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【答案】B

【解析】

【分析】根据直线一般方程得直线的斜率，结合直线倾斜角与斜率得关系可得倾斜角的大小。

【详解】解：由直线 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ 得直线的斜率 $k = \sqrt{3}$

又直线的倾斜角为 α ，且 $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ)$ ，所以 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，得 $\alpha = 60^\circ$

故选：B.

2. 设平面 α 的法向量为 $(1, 2, -2)$ ，平面 β 的法向量为 $(-2, -4, k)$ ，若 $\alpha // \beta$ ，则 k 的值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得两平面的法向量共线，即可得到 $(-2, -4, k) = \lambda(1, 2, -2)$ ，从而得到方程组，解得即可；

【详解】解：因为 $\alpha // \beta$ ，所以 $(-2, -4, k) = \lambda(1, 2, -2)$ ，即
$$\begin{cases} -2 = \lambda \\ -4 = 2\lambda \\ k = -2\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = -2 \\ k = 4 \end{cases};$$

故选：B.

3. P 是椭圆 $x^2 + 4y^2 = 16$ 上一点， F_1, F_2 是该椭圆的两个焦点，且 $|PF_1| = 7$ ，则 $|PF_2| =$ ()

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

【答案】A

【解析】

【分析】首先将椭圆方程化成标准形式，进而得出椭圆长半轴长，再根据椭圆定义即可求解.

【详解】解：对椭圆方程 $x^2 + 4y^2 = 16$ 变形得 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，易知椭圆长半轴的长为 4，

由椭圆的定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2 \times 4 = 8$ ，

又 $|PF_1| = 7$ ，故 $|PF_2| = 1$.

故选：A.

4. 双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据标准方程写出焦点坐标与渐近线方程，代入点到直线的距离公式即可求解.

【详解】由双曲线的对称性可知，求出一个焦点到一条渐近线的距离即可，则

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的一个焦点为 $(2\sqrt{2}, 0)$ ，一条渐近线为 $\sqrt{3}x - y = 0$ ，则焦点到渐近线的距离为

$$\frac{|\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} - 0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6},$$

故选：B.

5. 已知直线 $l: y = x$ 被圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = r^2 (r > 0)$ 截得的弦长为 2，则 $r =$ ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{6}$

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

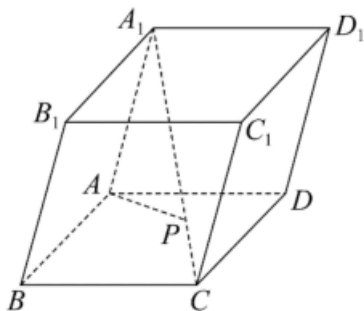
【分析】根据半径的平方等于弦长一半的平方加圆心到直线的距离的平方，即可求出答案.

【详解】圆心到直线的距离 $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$ ，弦长的一半为 1， $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

故选：A.

6. 如图，在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $\vec{AA_1} = \vec{a}$ ， $\vec{AB} = \vec{b}$ ， $\vec{AD} = \vec{c}$ ，点 P 在 A_1C 上，且

$A_1P:PC=3:2$ ，则 $\vec{AP} = (\quad)$



- A. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$ B. $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$ C. $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$ D. $\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用空间向量的基本定理可得出 $\vec{AP}$ 关于 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 的表达式.

【详解】因为 $A_1P:PC=3:2$ ，所以 $\vec{A_1P} = \frac{3}{5}\vec{A_1C}$ ，

则有：

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \vec{AA_1} + \vec{A_1P} = \vec{AA_1} + \frac{3}{5}\vec{A_1C} = \vec{AA_1} + \frac{3}{5}(\vec{A_1A} + \vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{AA_1} + \frac{3}{5}(-\vec{AA_1} + \vec{AD} + \vec{AB}) \\ &= \frac{2}{5}\vec{AA_1} + \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AD} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\end{aligned}$$

故选：C.

7. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ ，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是 ()

- A. 内含 B. 相交 C. 外切 D. 外离

【答案】D

【解析】

【分析】求出圆心距，大于两半径之和，从而判断出两圆的位置关系.

【详解】 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $C_1(0,0)$ ，半径 $r_1 = 1$ ，

$C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 的圆心为 $C_2(2,-2)$ ，半径 $r_2 = 1$ ，

则圆心距 $|C_1C_2| = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ ，且 $|C_1C_2| = 2\sqrt{2} > r_1 + r_2$ ，

故圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是外离.

故选：D

8. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 为 C 上一点, O 为坐标原点, $\triangle POF_2$ 为正三角形, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】结合图像, 利用平面几何的知识证得 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 结合椭圆的定义可分别求出 $|PF_1|, |PF_2|$ 及 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 由此得到 a, c 的关系式, 进而可求得椭圆 C 的离心率.

【详解】如图, 连结 PF_1 ,

由椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 可知 $|OF_2| = c$, $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

因为 $\triangle POF_2$ 为正三角形, 所以 $|PF_2| = |OF_2| = c$,

又因为 $|OF_1| = |OF_2| = |OP|$, 所以 $\angle PF_1O = \angle OPF_1$,

又 $\angle PF_1O + \angle OPF_1 = \angle POF_2 = 60^\circ$, 所以 $\angle PF_1O = \angle OPF_1 = 30^\circ$,

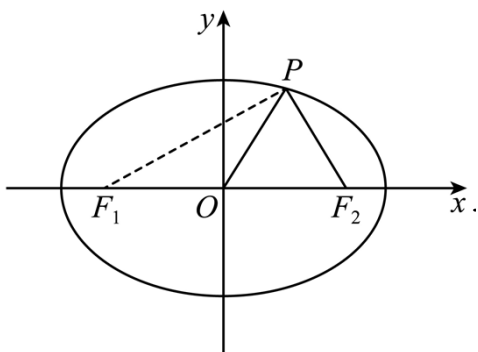
故 $\angle F_1PF_2 = \angle OPF_1 + \angle OPF_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,

所以在 $Rt\triangle F_1PF_2$ 中, $|PF_1| = |F_1F_2| \cos \angle OF_1P = 2c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}c$,

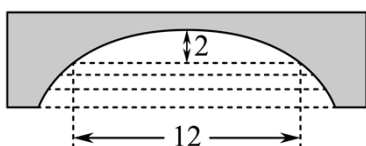
所以由 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 得 $\sqrt{3}c + c = 2a$, 即 $(\sqrt{3} + 1)c = 2a$,

故椭圆 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{3} - 1$.

故选: B.



9. 一座圆拱桥，当水面在如图所示位置时，拱顶离水面 2 米，水面宽 12 米，当水面下降 2 米后，水面宽是（ ）



- A. 13 米 B. 14 米 C. 15 米 D. 16 米

【答案】D

【解析】

【分析】沿拱顶建立如图所示的平面直角坐标系，求出圆的方程后可得水面下降 2 米后的水面宽.

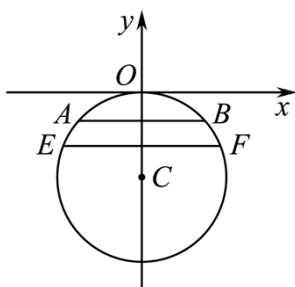
【详解】建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(-6, -2)$ ， $B(6, -2)$ ，

设圆的方程为： $x^2 + (y + m)^2 = m^2$ ($m > 0$)，代入 A，则有 $m = 10$ ，

故圆的方程为： $x^2 + (y + 10)^2 = 100$ ，

令 $y = -4$ ，则 $x = \pm 8$ ，故 $|EF| = 16$ ，

故选：D.



10. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，双曲线 $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$). 设椭圆 M 的两个焦

点分别为 F_1, F_2 ，椭圆 M 的离心率为 e_1 ，双曲线 N 的离心率为 e_2 ，记双曲线 N 的一条渐近线与椭圆 M

一个交点为 P ，若 $PF_1 \perp PF_2$ 且 $|F_1F_2| = 2|PF_1|$ ，则 $\frac{e_1}{e_2}$ 的值为（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

B. $\sqrt{3}-1$

C. 2

D. $\sqrt{3}+1$

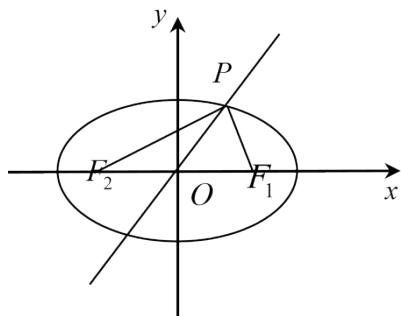
【答案】A

【解析】

【分析】联系椭圆定义可顺利解得其离心率，由渐近线方程可以顺利解得双曲线的离心率.

【详解】椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中, $PF_1 \perp PF_2$ 且 $|F_1F_2| = 2|PF_1|$

则 $|PF_2| = \sqrt{3}|PF_1|$, 椭圆长轴长为 $|PF_2| + |PF_1| = (1 + \sqrt{3})|PF_1|$



则椭圆 M 的离心率 $e_1 = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$

直线 OP 斜率为 $\sqrt{3}$

又由题意可知直线 OP 为双曲线 N 的一条渐近线,

双曲线 $N: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{n}{m}x$

故 $\frac{n}{m} = \sqrt{3}$, 即 $n = \sqrt{3}m$,

则双曲线 N 的实半轴长为 $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{m^2 + (\sqrt{3}m)^2} = 2m$

则双曲线 N 的离心率 $e_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m}{m} = 2$

则 $\frac{e_1}{e_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

故选: A

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 过点 $A(3, 2)$ 且与直线 $x + y + 1 = 0$ 平行的直线方程为_____.

【答案】 $x + y - 5 = 0$

【解析】

【分析】 设所求直线方程为 $x + y + C = 0$ ，利用 A 点坐标求得 C ，从而求得正确答案.

【详解】 设过点 $A(3, 2)$ 且与直线 $x + y + 1 = 0$ 平行的直线方程为 $x + y + C = 0$ ，

将 $A(3, 2)$ 代入 $x + y + C = 0$ 得 $3 + 2 + C = 0, C = -5$ ，

所以所求方程为 $x + y - 5 = 0$.

故答案为： $x + y - 5 = 0$

12. 椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{k} = 1$ 的一个焦点是 $(0, -1)$ ，那么 k 等于_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据椭圆中 $a^2 = b^2 + c^2$ ，得出 c^2 的代数式，并根据焦点坐标列出方程即可求解.

【详解】 因为椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{k} = 1$ ，所以 $c^2 = k - 2$ ，

又因为椭圆的一个焦点是 $(0, -1)$ ，

所以 $k - 2 = 1$ ，解得 $k = 3$ ，

故答案为： 3.

13. 已知点 $P(2, a)$ 在抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上，则点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据给定的抛物线方程求出其准线方程，再结合抛物线定义即可计算作答.

【详解】 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线方程为： $x = -1$ ，由抛物线定义得，点 $P(2, a)$ 到抛物线 C 的焦点的距离 $d = 2 - (-1) = 3$ ，

所以点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为 3.

故答案为： 3

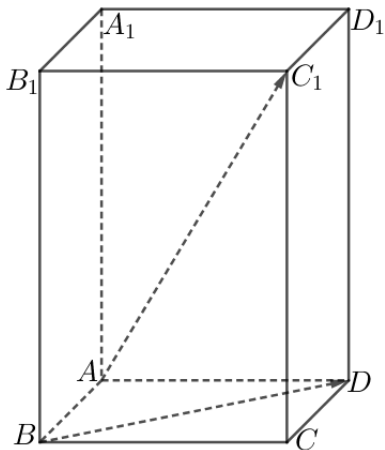
14. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $|AB| = 1, |AD| = 2, |AA_1| = 3$ ，则 $\vec{BD} \cdot \vec{AC_1} =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据给定的几何体，用空间向量的基底 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ 表示向量 $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC_1}$ ，再利用向量数量积运算律计算即得.

【详解】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$ ，
所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2^2 - 1^2 = 3$.



故答案为：3

15. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上任意一点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，则线段 PM 的中点 $N(x, y)$ 的轨迹方程为_____.

【答案】 $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$

【解析】

【分析】先利用中点坐标公式写出 $P(x, 2y)$ ，再把 $P(x, 2y)$ 代入椭圆方程化简即可.

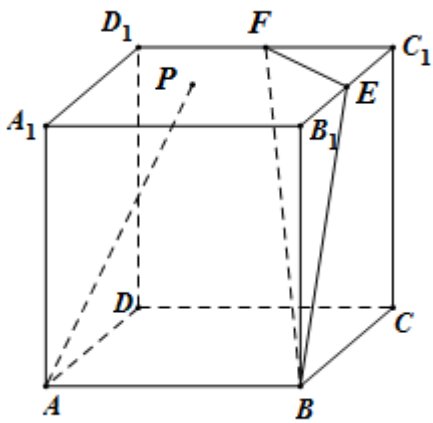
【详解】因为 $PM \perp x$ 轴，垂足为 M ，且 PM 的中点为 $N(x, y)$ ，

所以 $P(x, 2y)$ ，又因为 P 是椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上任意一点，

所以 $\frac{x^2}{6} + \frac{(2y)^2}{4} = 1$ ，即 $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$.

故答案为： $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$.

16. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1， E, F 分别为 B_1C_1, C_1D_1 的中点， P 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点. 若 $AP \parallel$ 平面 BEF ，则 AP 长度的最小值是___；最大值是___.



【答案】 ①. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ②. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】

取 A_1D_1 中点 N ， A_1B_1 中点 M ，连接 AM ， AN ， MN ，利用面面平行的判定定理证得平面 $AMN \parallel$ 平面 BEF ，结合已知条件可知 $P \in MN$ ，在等腰 $\triangle AMN$ 中，可求得 AP 长度的最值.

【详解】取 A_1D_1 中点 N ， A_1B_1 中点 M ，连接 AM ， AN ， MN

由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ， E, N 分别为 B_1C_1, A_1D_1 的中点， $\therefore AN \parallel BE$

又 $AN \not\subset$ 平面 BEF ， $BE \subset$ 平面 BEF ， $\therefore AN \parallel$ 平面 BEF

$Q E, F$ 分别为 B_1C_1, C_1D_1 的中点，由中位线性质知 $EF \parallel B_1D_1$

同理可知 $MN \parallel B_1D_1$ ， $\therefore MN \parallel EF$

又 $MN \not\subset$ 平面 BEF ， $EF \subset$ 平面 BEF ， $\therefore MN \parallel$ 平面 BEF

又 $AN \cap MN = N$ ， $AN, MN \subset$ 平面 AMN

$\therefore$ 平面 $AMN \parallel$ 平面 BEF

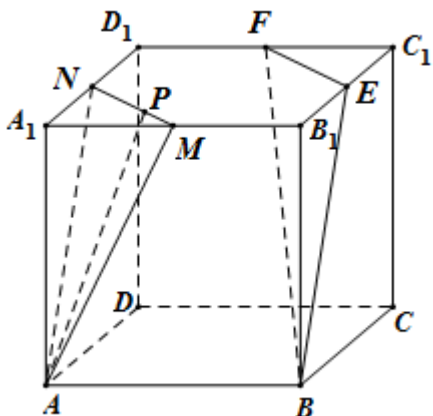
$Q P$ 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点. 且 $AP \parallel$ 平面 BEF ， $\therefore P \in MN$

在等腰 $\triangle AMN$ 中， AP 的长度最大时为 $AP_{\max} = AM = AN = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

AP 的长度最小时， P 为 MN 中点， $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$AP = \sqrt{AM^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \text{ 即 } AP_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}$



【点睛】方法点睛：证明面面平行常用的方法：

(1) 面面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

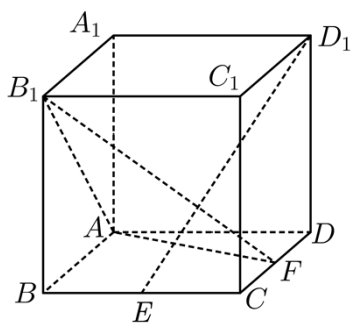
(2) 利用垂直于同一条直线的两个平面平行；

(3) 两个平面同时平行于第三个平面，那么这两个平面平行；

(4) 利用“线线平行”、“线面平行”、“面面平行”的相互转化.

三、解答题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 BC 的中点，点 F 是 CD 中点．



(1) 证明: $D_1E \perp$ 平面 AB_1F ;

(2) 求 D 到面 AB_1F 的距离.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{2}{3}$

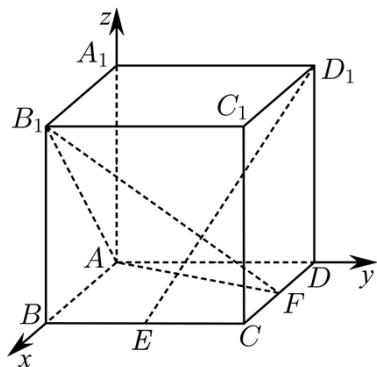
【解析】

【分析】(1) 建立空间直角坐标系，利用线面垂直时，直线的方向向量与平面的法向量共线证明即可；

(2) 利用空间向量，根据点到平面的距离公式求解即可.

【小问 1 详解】

以 A 为原点，直线 AB ， AD ， AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示：



则 $A(0,0,0)$ ， $B_1(2,0,2)$ ， $D_1(0,2,2)$ ， $F(1,2,0)$ ， $E(2,1,0)$ ， $D(0,2,0)$ ，

则 $\overrightarrow{AF} = (1, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{AB_1} = (2, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{D_1E} = (2, -1, -2)$ ，

设平面 AB_1F 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AF} = x + 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 2x + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = -2, \text{ 则 } y = 1, z = 2,$$

所以 $\vec{m} = (-2, 1, 2)$ ，

又因为 $\overrightarrow{D_1E} = (2, -1, -2)$ ，所以 $\vec{m} = -\overrightarrow{D_1E}$ ，

所以 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知平面 AB_1F 的法向量为 $\vec{m} = (-2, 1, 2)$ ，

又因为 $\overrightarrow{DA} = (0, -2, 0)$ ，

$$\text{所以 } D \text{ 到面 } AB_1F \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{2}{3}.$$

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，左右焦点分别为 F_1, F_2 ，直线 $y = -x + 1$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆的焦点坐标及离心率；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/505210001333011304>