

2024 年聊城市高考模拟试题

数学（二）

注意事项：

1. 本试卷满分 150 分，考试用时 120 分钟.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答选择题时，选出每小题的答案后，用 **2B** 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，只将答题卡交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 点 P 在抛物线 $y^2 = 8x$ 上，若点 P 到点 $(2, 0)$ 的距离为 6，则点 P 到 y 轴的距离为（ ）
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】由抛物线的定义知，点 P 到焦点的距离等于点 P 到准线的距离，结合点 P 和准线的位置，求点 P 到 y 轴的距离.

【详解】抛物线 $y^2 = 8x$ 开口向右，准线方程为 $x = -2$ ，

点 P 到焦点的距离为 6，则点 P 到准线的距离为 6，

点 P 在 y 轴右边，所以点 P 到 y 轴的距离为 4.

故选：A.

2. 已知集合 $M = \left\{x \mid -\frac{2}{3} < x \leq 1\right\}$, $N = \{x \mid 2x \in \mathbb{Z}\}$ ，则 $M \cap N =$ （ ）

- A. $\{0, 1\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由交集的定义求解.

【详解】集合 $M = \left\{x \mid -\frac{2}{3} < x \leq 1\right\}$, $N = \{x \mid 2x \in \mathbb{Z}\}$, 则 $M \cap N = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

故选: D

3. 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_4 x - 1$, 则 $f\left(-2^{\frac{2}{3}}\right) =$ ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据偶函数的定义可得 $f(-2^{\frac{2}{3}}) = f(2^{\frac{2}{3}})$, 结合函数解析式和对数的运算性质即可求解.

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$,

$$\text{则 } f(-2^{\frac{2}{3}}) = f(2^{\frac{2}{3}}) = \log_4 2^{\frac{2}{3}} - 1 = \log_{2^2} 2^{\frac{2}{3}} - 1 = \log_2 2^{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

故选: A

4. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 恰有一条公切线, 则下列直线一定不经过点 (a, b) 的是 ()

- A. $2x + y - \sqrt{2} = 0$ B. $2x - y + 2 = 0$
C. $x + y - \sqrt{2} = 0$ D. $x - y + 2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据两圆公切线条数确定两圆位置关系, 从而可得圆心 (a, b) 所满足的轨迹方程, 从而逐项判断直线与圆位置关系, 确定直线是否过点 (a, b) 即可.

【详解】圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $C_1(0, 0)$, 半径 $r_1 = 1$, 圆 $C_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 的圆心 $C_2(a, b)$, 半径 $r_2 = 2$,

若圆 C_1 与圆 C_2 恰有一条公切线, 则两圆内切,

所以 $|C_1 C_2| = |r_1 - r_2|$, 即 $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, 所以点 (a, b) 的轨迹为圆 $x^2 + y^2 = 1$,

对于 A, 圆心 $(0, 0)$ 到直线 $2x + y - \sqrt{2} = 0$ 的距离为 $\frac{|0+0-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1$, 则该直线过点 (a, b) , 故 A

不符合；

对于 B，圆心 $(0,0)$ 到直线 $2x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|0-0+2|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1$ ，则该直线过点 (a,b) ，故 B 不

符合；

对于 C，圆心 $(0,0)$ 到直线 $x + y - \sqrt{2} = 0$ 的距离为 $\frac{|0+0-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$ ，则该直线过点 (a,b) ，故 C 不符合；

对于 D，圆心 $(0,0)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|0-0+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$ ，则该直线不过点 (a,b) ，故 D 符

合；

故选：D.

5. 班主任从甲、乙、丙三位同学中安排四门不同学科的课代表，要求每门学科有且只有一位课代表，每位同学至多担任两门学科的课代表，则不同的安排方案共有（ ）

A. 60 种

B. 54 种

C. 48 种

D. 36 种

【答案】B

【解析】

【分析】分甲、乙、丙三位同学都有安排和甲、乙、丙三位同学中只有两人被安排两种情况进行说明即可.

【详解】第一种情况，甲、乙、丙三位同学都有安排时，

先从 3 个人中选 1 个人，让他担任两门学科的课代表，有 $C_3^1 = 3$ 种结果，

然后从 4 门学科中选 2 门学科给同一个人，有 $C_4^2 = 6$ 种结果，

余下的两个学科给剩下的两个人，有 $A_2^2 = 2$ 种结果，

所以不同的安排方案共有 $3 \times 6 \times 2 = 36$ 种，

第二种情况，甲、乙、丙三位同学中只有两人被安排时，

先选两人出来，有 $C_3^2 = 3$ 种结果，

再将四门不同学科分成两堆，有 $\frac{C_4^2}{A_2^2} = 3$ 种结果，

将学科分给学生，有 $A_2^2 = 2$ 种结果，

所以不同的安排方案共有 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 种，

综合得不同的安排方案共有 $36 + 18 = 54$ 种.

故选：B

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，一条渐近线的方程为 $y = 2x$ ，若直线 $y = kx$ 与 C 在第一象限内的交点为 P ，且 $PF \perp x$ 轴，则 k 的值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

【答案】C

【解析】

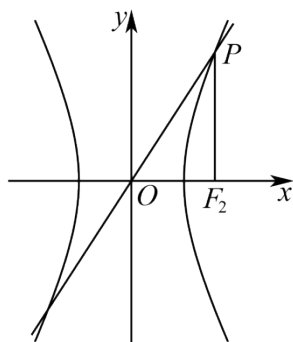
【分析】根据双曲线的渐近线方程可得 $b = 2a \Rightarrow c = \sqrt{5}a$ ，由 $PF \perp x$ 轴得 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，利用斜率公式可得结果.

【详解】因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，依题意有 $\frac{b}{a} = 2$ ，

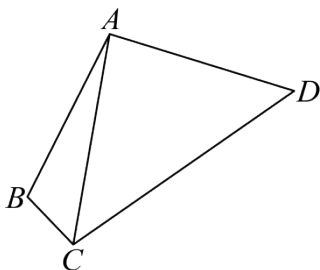
即 $b = 2a \Rightarrow c = \sqrt{5}a$ ，又右焦点为 $F(c, 0)$ ，且 $PF \perp x$ 轴，所以 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ ，

$$\text{所以 } k = k_{OP} = \frac{\frac{b^2}{a}}{c} = \frac{b^2}{ac} = \frac{4a^2}{\sqrt{5}a^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

故选：C.



7. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD = 2, \angle B = 2\angle D = 120^\circ$ ，记 V_{ABC} 与 V_{ACD} 的面积分别为 S_1, S_2 ，则 $S_2 - S_1$ 的值为（ ）



A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据余弦定理得 $BC^2 - AC^2 = -2BC - 4$ 、 $CD^2 - AC^2 = 2CD - 4$ ，两式相减可得 $CD - BC = 2$ ，由三角形的面积公式得 $S_2 - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(CD - BC)$ ，即可求解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$ ，

即 $-\frac{1}{2} = \frac{4 + BC^2 - AC^2}{4BC}$ ，得 $BC^2 - AC^2 = -2BC - 4$ ①，

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos D = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AC \cdot CD}$ ，

即 $\frac{1}{2} = \frac{4 + CD^2 - AC^2}{4CD}$ ，得 $CD^2 - AC^2 = 2CD - 4$ ②，

又 $S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$ ， $S_2 = \frac{1}{2}AD \cdot CD \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$ ，

所以 $S_2 - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}CD - \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}(CD - BC)$ ③，

由②-①，得 $CD^2 - BC^2 = 2(CD + BC)$ ，由 $CD + BC > 0$ ，

得 $CD - BC = 2$ ，代入③得 $S_2 - S_1 = \sqrt{3}$.

故选：B

8. 已知圆柱 OO_1 的下底面在半球 O 的底面上，上底面圆周在半球 O 的球面上，记半球 O 的底面圆面积与

圆柱 OO_1 的侧面积分别为 S, S_1 ，半球 O 与圆柱 OO_1 的体积分别为 V, V_1 ，则当 $\frac{S}{S_1}$ 的值最小时， $\frac{V}{V_1}$ 的值为

()

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】设圆柱底面半径为 r ，高为 h ，球的半径为 R ，则 $\frac{S}{S_1} = \frac{h}{2r} + \frac{r}{2h}$ ，根据基本不等式可得 $r = h$ 、

$R = \sqrt{2}r$ ，结合圆柱与球的体积公式化简计算即可求解.

【详解】设圆柱底面半径为 r ，高为 h ，球的半径为 R ，

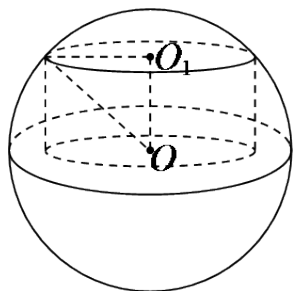
$$\text{则 } R^2 = h^2 + r^2, S = \pi R^2, S_1 = 2\pi rh, V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3, V_1 = \pi r^2 h,$$

$$\text{所以 } \frac{S}{S_1} = \frac{\pi R^2}{2\pi rh} = \frac{h^2 + r^2}{2rh} = \frac{h}{2r} + \frac{r}{2h} \geq 2\sqrt{\frac{h}{2r} \cdot \frac{r}{2h}} = 1,$$

当且仅当 $r = h$ 时等号成立, 此时 $R = \sqrt{2}r$,

$$\text{所以 } \frac{V}{V_1} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\pi r^2 h} = \frac{\frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}r)^3}{\pi r^2 \cdot r} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

故选: A



二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (1, \lambda)$, 若 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\vec{a}$, 则 ()

A. $\lambda = 3$

B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

C. $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{a})$

D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 45°

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据投影向量的公式求出 λ 的值, 再根据向量坐标运算逐项判断即可.

【详解】对于 A, 因为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\vec{a}$, 即 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}$,

$$\text{所以 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = 1, \text{ 即 } \frac{-1 + 2\lambda}{(\sqrt{5})^2} = 1, \text{ 解得 } \lambda = 3, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (1, 3)$, 所以 $(-1) \times 3 - 2 \times 1 \neq 0$, 故 B 错误;

对于 C, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (-1, 2) \cdot (2, 1) = -2 + 2 = 0$, 所以 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{a})$, 故 C 正确;

对于 D, $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-1 + 6}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 45° , 故 D 正确.

故选: ACD.

10. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，则下列关系能同时成立的是 ()

A. “ $AB = PB$ ”与“ $PB = BD$ ”

B. “ $PA \perp PC$ ”与“ $PB \perp PD$ ”

C. “ $PB \perp CD$ ”与“ $PC \perp AB$ ”

D. “平面 $PAB \perp$ 平面 PBD ”与“平面 $PCD \perp$ 平面 PBD ”

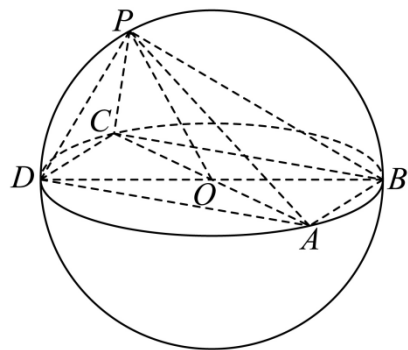
【答案】BC

【解析】

【分析】利用正方形的特征可判定 A，利用球的特征可判定 B，利用面面垂直的性质可判定 C，利用反证法可判定 D.

【详解】对于 A，显然 $AB = PB$ 时，而底面 $ABCD$ 是正方形， $AB \neq DB$ ，所以 $PB = BD$ 不成立，故 A 错误；

对于 B，设底面正方形中心为 O ，则 P 在以 O 为球心，以 OA 为半径的球面上时可符合题意，故 B 正确；



对于 C，当平面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD$ 时，

由面面垂直的性质可知 $AB \perp$ 平面 PBC ， $DC \perp$ 平面 PBC ，显然符合题意，故 C 正确；

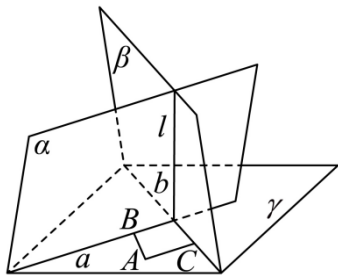
对于 D，先证两相交平面同时垂直于第三平面，则交线垂直第三平面，

如图有
$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = l, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b \\ \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{cases}, \text{取 } A \in \gamma, \text{作 } AB \perp a, AC \perp b,$$

垂足分别为 B 、 C ，由面面垂直的性质可知 $AB \perp \alpha, AC \perp \beta$ ，

由线面垂直的性质可知 $l \subset \alpha, l \subset \beta, \therefore \begin{cases} AC \perp l \\ AB \perp l \end{cases}$ ，

又 $AB \cap AC = A, AB, AC \subset \gamma$ ，由线面垂直的判定可知 $l \perp \gamma$ ，



若“平面 $PAB \perp$ 平面 PBD ”与“平面 $PCD \perp$ 平面 PBD ”同时成立，

易知 $P = \text{平面 } PAB \cap \text{平面 } PCD$ ，可设平面 $PAB \cap \text{平面 } PCD = l$ ，则 $P \in l$ ，

则 $l \perp$ 平面 PBD ，

易知 $AB \parallel CD$, $AB \not\subset$ 平面 PCD ，所以 $AB \parallel$ 面 PCD ，则 $l \parallel AB$ ，

则有 $AB \perp$ 平面 PBD ，显然 $AB \perp BD$ 不成立，故 D 错误.

故选：BC

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\right)$, $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}\right)$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. 若动直线 $x = m$ 与 $f(x), g(x)$ 的图象的交点分别为 A, B ，则 $|AB|$ 的长可为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 若动直线 $y = m$ 与 $f(x), g(x)$ 的图象的交点分别为 A, B ，则 $|AB|$ 的长恒为 $\frac{\pi}{4}$

C. 若动直线 $y = \pm m$ 与 $f(x), g(x)$ 的图象能围成封闭图形，则该图形面积的最大值为 $\frac{\pi}{2}$

D. 若 $f(m_0) = \frac{3}{5}$ ，则 $g\left(\frac{m_0}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{15} - \sqrt{5}}{10}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】先判断函数 $f(x), g(x)$ 的单调性及值域，由条件确定 m 的范围，设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, m), (x_2, m)$ ，列方程化简可得 $x_1 - x_2 = \frac{\pi}{4}$ ，由此判断 AB，判断直线 $y = \pm m$ 与 $f(x), g(x)$ 的图象能围成封闭图形的形状，结合面积公式判断 C，由条件 $f(m_0) = \frac{3}{5}$ ，结合两角差余弦公式可求 $\cos 2m_0$ ，根据二倍角公式可求 $\cos m_0$ ，由此判断 D.

【详解】由 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ，可得 $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减,

$$\text{且 } f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad f(x) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\text{所以 } -1 \leq f(x) \leq 1,$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}, \text{ 可得 } 0 \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \pi,$$

所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减,

$$\text{且 } g(x) \leq g\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos 0 = 1, \quad f(x) \geq g\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos \pi = -1,$$

$$\text{所以 } -1 \leq g(x) \leq 1,$$

$$\text{由已知 } -1 \leq m \leq 1,$$

所以直线 $y = m$ 与函数 $y = f(x), y = g(x)$ 都只有一个交点,

设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, m), (x_2, m)$,

$$\text{则 } \sin\left(2x_1 + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x_2 + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x_2\right),$$

$$\frac{\pi}{2} \leq 2x_1 + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq 2x_2 + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2},$$

因为函数 $y = \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } 2x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2x_2,$$

$$\text{所以 } x_1 - x_2 = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (m - m)^2} = |x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4}, \text{ A 错误, B 正确,}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/505243224042011201>

