抛物线

教师尊享 · 命题分析

课标要求	命题点	五年考情	命题分析预测
1.了解抛物线的定义、几何图形和标准方程，以及简单几何性质. 2.了解抛物线的简单应用. 3.体会数形结合的思想.	抛物线的定义及其应用	2022全国卷乙T5；2021新高考卷ⅡT3；2021全国卷乙T21；2020全国卷ⅠT4	本讲每年必考，主要以定义作为命题思路，求解轨迹问题、距离问题、最值问题等.在2025年高考备考中，在训练常规题型的同时，应关注抛物线的定义的应用.
	抛物线的标准方程	2023全国卷乙T13；2022全国卷甲T20；2021新高考卷ⅠT14；2021全国甲卷T20	
	抛物线的几何性质	2023新高考卷ⅡT10；2021新高考卷ⅠT14；2020全国卷ⅡT19；2020全国卷ⅢT5	

教材帮 读透教材 融会贯通

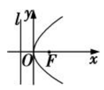
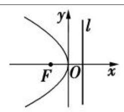
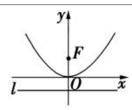
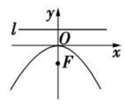
学生用书P189

1. 抛物线的定义

平面内与一个定点F和一条定直线l（l不经过点F）的距离①__相等__的点的轨迹叫做抛物线.点F叫做抛物线的②__焦点__，直线l叫做抛物线的③__准线__.

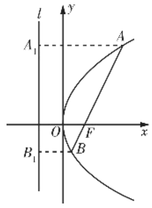
注意　定点F在定直线l上时，动点的轨迹为过点F且垂直于l的一条直线.

2. 抛物线的标准方程与几何性质

标准方程		$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图形					
几何性质	对称轴	x轴		y轴	
	顶点	O（0，0）			
	焦点	④__$F(\frac{p}{2},0)$__	⑤__$F(-\frac{p}{2},0)$__	⑥__$F(0,\frac{p}{2})$__	⑦__$F(0,-\frac{p}{2})$__
	准线方程	⑧__$x=-\frac{p}{2}$__	⑨__$x=\frac{p}{2}$__	⑩__$y=-\frac{p}{2}$__	⑪__$y=\frac{p}{2}$__
	范围	$x\geqslant0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant0$，$y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant0$，$x\in\mathbf{R}$	$y\leqslant0$，$x\in\mathbf{R}$
	离心率	$e=$⑫__1__			
	焦半径（其中$P(x_0,y_0)$为抛物线上任一点）	⑬__$\frac{p}{2}+x_0$__	$\frac{p}{2}-x_0$	⑭__$\frac{p}{2}+y_0$__	$\frac{p}{2}-y_0$

常用结论

抛物线焦点弦的几个常用结论



如图，设 AB 是一条过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）焦点 F 的弦，AB 所在直线的倾斜角为α，若 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），A，B 在准线 l 上的射影分别为 A_1，B_1，则

（1）$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$.

（2）$|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|$.

（3）$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

（4）当 N 为准线与 x 轴的交点时，$\angle ANF=\angle BNF$.

（5）通径是过焦点且垂直于对称轴的弦，弦长等于 $2p$，通径是过焦点的最短的弦.

（6）以弦 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切.

（7）以 A_1B_1 为直径的圆与 AB 相切，切点为 F，$\angle A_1FB_1=90°$.

（8）当 M_1 为 A_1B_1 的中点时，$M_1A\perp M_1B$.

（9）以 AF 或 BF 为直径的圆与 y 轴相切.

教师尊享·备考教案

（2）的推导过程：因为 AB 所在直线的倾斜角为α，则 $\cos\alpha=\frac{x_1-\frac{p}{2}}{x_1+\frac{p}{2}}$，解得 $x_1=\frac{p}{2}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$，

则 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{p}{1-\cos\alpha}$.

同理可得 $|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$.

则 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{p}{1-\cos\alpha}+\frac{p}{1+\cos\alpha}=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times\frac{p}{2}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{2p}{\sin^2\alpha}\times\frac{p}{2}\times\sin\alpha=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$.

由（2）的推导过程可得，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1-\cos\alpha}{p}+\frac{1+\cos\alpha}{p}=\frac{2}{p}$.

基础自测

1.下列说法正确的是（　D　）

A.平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹一定是抛物线

B.若抛物线过点 P（-2，3），则其标准方程可写为 $y^2=2px$（$p>0$）

C.抛物线既是中心对称图形，又是轴对称图形

D.方程 $y=ax^2$（$a\neq0$）表示的曲线是焦点在 y 轴上的抛物线，且其准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$

2.抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标为（　A　）

A.（0，$\frac{1}{16}$）　B.（0，$\frac{1}{4}$）　C.（0，1）　D.（1，0）

解析 化抛物线的方程为标准形式，得 $x^2=\frac{1}{4}y$，所以 $p=\frac{1}{8}$，（本题在解答过程中若不先将抛物线方程化为标准形式，易错误得到 $p=2$，从而错选 C）

抛物线的焦点坐标为（0，$\frac{1}{16}$），故选 A.

3.[2023 湖北省十堰市调研]下列四个抛物线中，开口朝左的是（ C ）

A.$y^2=5x$　　B.$x^2=-5y$

C.$y^2=-5x$　　D.$x^2=5y$

解析 抛物线 $y^2=5x$ 的开口朝右，抛物线 $x^2=-5y$ 的开口朝下，抛物线 $y^2=-5x$ 的开口朝左，抛物线 $x^2=5y$ 的开口朝上.故选 C.

4.若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点是椭圆$\frac{x^2}{3p}+\frac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$（ D ）

A.2　　B.3　　C.4　　D.8

解析 由题意，知抛物线的焦点坐标为（$\frac{p}{2}$，0），椭圆的焦点坐标为（$\pm\sqrt{2p}$，0），所以 $\frac{p}{2}=\sqrt{2p}$，解得 $p=8$，故选 D.

5.已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，点 M（2，$2\sqrt{2}$）为抛物线上一点，则 $|MF|=$（ B ）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

解析 因为点 M（2，$2\sqrt{2}$）为抛物线上一点，所以将点 M 的坐标代入抛物线的方程 $y^2=2px$（$p>0$），可得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，可得其准线方程为 $x=-1$.根据抛物线的定义，得 $|MF|=2-(-1)=3$.故选 B.

高考帮 研透高考 明确方向

学生用书 P190

命题点 1 抛物线的定义及其应用

例 1 （1）[全国卷Ⅰ]已知 A 为抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$（ C ）

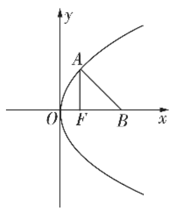
A.2　　B.3　　C.6　　D.9

解析 根据抛物线的定义及题意得，点 A 到 C 的准线 $x=-\frac{p}{2}$的距离为 12，因为点 A 到 y 轴的距离为 9，所以$\frac{p}{2}=12-9$，解得 $p=6$.故选 C.

（2）[2022 全国卷乙]设 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 B（3，0），若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（ B ）

A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.3　　D.$3\sqrt{2}$

解析 **解法一** 如图，由题意可知 F（1，0），设 A（$\frac{y_0^2}{4}$，y_0），则由抛物线的定义可知 $|AF|=\frac{y_0^2}{4}+1$.因为 $|BF|=3-1=2$，所以由 $|AF|=|BF|$，可得$\frac{y_0^2}{4}+1=2$，解得 $y_0=\pm2$，所以 A（1，2）或 A（1，-2）.不妨



取 A（1，2），则 $|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故选 B.

解法二　由题意可知 F（1，0），$|BF|=2$，所以 $|AF|=2$.因为抛物线的通径长为 $2p=4$，所以 AF 的长为通径长的一半，所以 $AF\perp x$ 轴，所以 $|AB|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故选 B.

方法技巧

利用抛物线的定义可解决的常见问题

（1）轨迹问题：利用抛物线的定义可以确定与定点、定直线距离有关的动点轨迹是否为抛物线.

（2）距离问题：涉及抛物线上的点到焦点的距离和到准线的距离问题时，在解题过程中注意两者之间的相互转化.

（3）最值问题：通过距离转化，利用“两点之间线段最短”和“垂线段最短”求解.

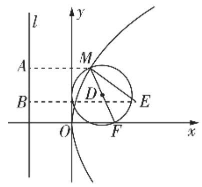
训练 1［多选/2023 惠州市二调］设抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 M 为 C 上一动点，E（3，1）为定点，则下列结论正确的是（　AD　）

A.准线 l 的方程是 $x=-2$

B. $|ME|-|MF|$ 的最大值为 2

C. $|ME|+|MF|$ 的最小值为 7

D.以线段 MF 为直径的圆与 y 轴相切



解析　由题意得，抛物线 C 的焦点 F（2，0），准线 l 的方程是 $x=-2$，故 A 正确；$|ME|-|MF|\leqslant|EF|=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，当点 M 在线段 EF 的延长线上时等号成立，$\therefore|ME|-|MF|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故 B 不正确；如图所示，过点 M，E 分别作准线 l 的垂线，垂足分别为 A，B，则 $|ME|+|MF|=|ME|+|MA|\geqslant|EB|=5$，当点 M 在线段 EB 上时等号成立，$\therefore|ME|+|MF|$ 的最小值为 5，故 C 不正确；设点 M（x_0，y_0），线段 MF 的中点为 D，则点 D 的横坐标 $x_D=\frac{x_0+2}{2}=\frac{|MA|}{2}=\frac{|MF|}{2}$，$\therefore$以线段 MF 为直径的圆与 y 轴相切，故 D 正确.故选 AD.

命题点 2　抛物线的标准方程

例 2（1）［2023 全国卷乙］已知点 A（1，$\sqrt{5}$）在抛物线 C：$y^2=2px$ 上，则 A 到 C 的准线的距离为__$\frac{9}{4}$__.

解析　将点 A 的坐标代入抛物线方程，得 $5=2p$，于是 $y^2=5x$，则抛物线的准线方程为 $x=-\frac{5}{4}$，所以 A 到准线的距离为 $1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/506011102033010225