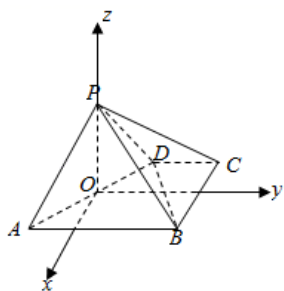


专题三 解答题针对训练之立体几何

1. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $PA \perp BD$, $AB=2$, $PA=PD=CD=BC=1$.

(I) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.



【解答】证明: (I) $\because AB \parallel CD$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $PA=PD=CD=BC=1$,

$$\therefore BD = \sqrt{2}, \angle ABC = \frac{\pi}{2}, \angle DBC = \frac{\pi}{4}, \therefore \angle ABD = \frac{\pi}{4},$$

$$\because AB=2, \therefore AD = \sqrt{2}, \therefore AB^2 = AD^2 + BD^2, \therefore AD \perp BD,$$

$$\because PA \perp BD, PA \cap AD = A, \therefore BD \perp \text{平面 } PAD,$$

$$\because BD \subset \text{平面 } ABCD, \therefore \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } ABCD.$$

解: (II) 取 AD 中点 O , 连结 PO , 则 $PO \perp AD$, 且 $PO = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

以过点 O 且平行于 BC 的直线为 x 轴, 过点 O 且平行于 AB 的直线为 y 轴,

直线 PO 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{则 } A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), C\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), P\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{BC} = (-1, 0, 0), \vec{BP} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

设平面 PBC 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = -x = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BP} = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = \sqrt{2}, \text{得 } \vec{n} = (0, \frac{2}{3}, \sqrt{2}),$$

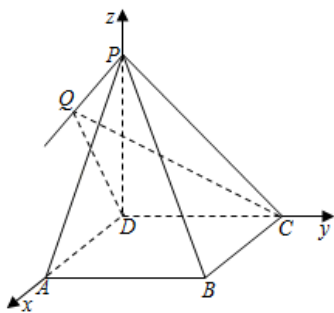
$$\therefore \vec{PA} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{PA} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PA}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{PA}|} = -\frac{2\sqrt{22}}{11}, \therefore \text{直线 } PA \text{ 与平面 } PBC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

2. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, $QB = \sqrt{2}$, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值.



【解答】(1) 证明: 过 P 在平面 PAD 内作直线 $l \parallel AD$,

由 $AD \parallel BC$, 可得 $l \parallel BC$, 即 l 为平面 PAD 和平面 PBC 的交线,

$\therefore PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PD \perp BC$,

又 $BC \perp CD$, $CD \cap PD = D$, $\therefore BC \perp$ 平面 PCD ,

$\therefore l \parallel BC$, $\therefore l \perp$ 平面 PCD ;

(2) 解: 如图, 以 D 为坐标原点, 直线 DA , DC , DP 所在的直线为 x , y , z

轴，建立空间直角坐标系 $D - xyz$ ，

$$\because PD=AD=1, Q \text{ 为 } l \text{ 上的点}, QB=\sqrt{2},$$

$$\therefore PB=\sqrt{3}, QP=1,$$

则 $D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, 1), B(1, 1, 0)$ ，作 $PQ \parallel AD$ ，则 PQ 为平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l ，

$$\text{取 } Q(1, 0, 1), \text{ 则 } \vec{DQ} = (1, 0, 1), \vec{PB} = (1, 1, -1), \vec{DC} = (0, 1, 0),$$

设平面 QCD 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DQ} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}, \text{ 取 } c = 1, \text{ 可得 } \vec{n} = (-1, 0, 1),$$

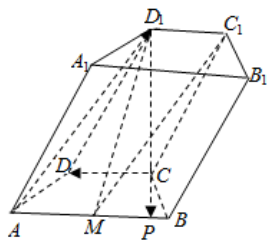
$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{PB} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PB}}{|\vec{n}| |\vec{PB}|} = \frac{-1 - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore PB \text{ 与平面 } QCD \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 2CD = 2$ ， M 是线段 AB 的中点。

(I) 求证： $C_1M \parallel$ 平面 A_1ADD_1 ；

(II) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1 = \sqrt{3}$ ，求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角（锐角）的余弦值。



【解答】解：（Ⅰ）连接 AD_1 ， $\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为四棱柱， $\therefore CD \parallel C_1D_1$ ，

又 M 为 AB 的中点， $\therefore AM = 1$ 。

$$\therefore CD \parallel AM, CD = AM,$$

$$\therefore AM \parallel C_1D_1,$$

$\therefore AMC_1D_1$ 为平行四边形， $\therefore AD_1 \parallel MC_1$ ，又 $MC_1 \not\subset$ 平面 A_1ADD_1 ， $AD_1 \subset$ 平面 A_1ADD_1 ，

$\therefore C_1M \parallel$ 平面 A_1ADD_1 ；

（Ⅱ）以 C 为原点， CD 为 x 轴， CP 为 y 轴， CD_1 为 z 轴建立空间坐标系，

则 $C_1(-1, 0, \sqrt{3})$ ， $D_1(0, 0, \sqrt{3})$ ， $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ，

$$\therefore \vec{C_1D_1} = (1, 0, 0), \vec{D_1M} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}),$$

设平面 C_1D_1M 的法向量 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \therefore \vec{n_1} = (0, 2, 1).$$

显然平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n_2} = (0, 0, 1)$ ，

$$\cos \langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| |\vec{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

显然二面角为锐角，

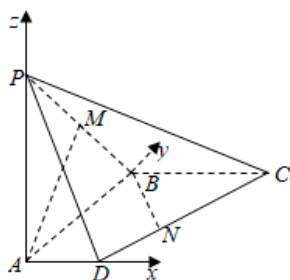
$\therefore$ 平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角（锐角）的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

4. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $PA = AB$

$=BC=2$, $AD=1$, M 是棱 PB 中点.

(I) 求证: $AM \parallel$ 平面 PCD ;

(II) 设点 N 是线段 CD 上一动点, 且 $DN=\lambda DC$, 当直线 MN 与平面 PAB 所成的角最大时, 求 λ 的值.



【解答】 (I) 证明: 以点 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(1, 0, 0)$, $P(0, 0, 2)$, $M(0, 1, 1)$,

$$\therefore \vec{AM} = (0, 1, 1), \vec{PD} = (1, 0, -2), \vec{CD} = (-1, -2, 0)$$

设平面 PCD 的法向量是 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$

令 $z=1$, 则 $x=2$, $y=-1$, 于是 $\vec{n} = (2, -1, 1)$

$$\therefore \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0, \therefore \vec{AM} \perp \vec{n}, \therefore AM \parallel \text{平面 } PCD \quad \dots (6 \text{ 分})$$

(II) 解: 由点 N 是线段 CD 上的一点, 可设 $\vec{DN} = \lambda \vec{DC} = \lambda(1, 2, 0)$

$$\begin{aligned} \vec{AN} &= \vec{AD} + \vec{DN} = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0) = (1 + \lambda, 2\lambda, 0) \\ \vec{MN} &= \vec{AN} - \vec{AM} \\ &= (1 + \lambda, 2\lambda, 0) - (0, 1, 1) = (1 + \lambda, 2\lambda - 1, -1) \end{aligned}$$

又面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$

设 MN 与平面 PAB 所成的角为 θ

$$\text{则} \quad \sin \theta = \left| \frac{(1 + \lambda, 2\lambda - 1, -1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + 1}} \right| = \left| \frac{1 + \lambda}{\sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 3}} \right| =$$

$$\frac{1+\lambda}{\sqrt{5(1+\lambda)^2-12(1+\lambda)+10}}=|\frac{1}{\sqrt{5-\frac{12}{1+\lambda}+10(\frac{1}{1+\lambda})^2}}|=|\frac{1}{\sqrt{10(\frac{1}{1+\lambda}-\frac{3}{5})^2+\frac{7}{5}}}|$$

$\therefore$ 当 $\frac{1}{1+\lambda} = \frac{3}{5}$ 时, 即 $5 = 3 + 3\lambda$, $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, $\sin\theta$ 最大,

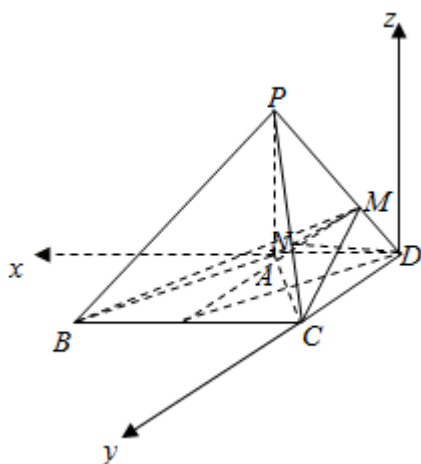
$\therefore MN$ 与平面 PAB 所成的角最大时 $\lambda = \frac{2}{3}$... (13 分)

5. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$.

(1) 取 PC 中点 N , 求证: $DN \parallel$ 平面 PAB

(2) 求直线 AC 与 PD 所成角的余弦值

(3) 在线段 PD 上, 是否存在一点 M , 使得二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° , 如果存在, 求 BM 与平面 MAC 所成角, 如果不存在, 请说明理由.



【解答】 证明: (1) 取 BC 中点 E , 连结 DN 、 DE 、 NE ,

$\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$,

$AD = CD = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$, N 是 PC 中点,

$\therefore DE \parallel AB$, $EN \parallel PB$,

$\because EN \cap DE = E$, $PB \cap AB = B$, EN 、 $DE \subset$ 平面 DNE , PB 、 $AB \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore$ 平面 $DEN \parallel$ 平面 PAB ,

$\because DN \subset$ 平面 DEN , $\therefore DN \parallel$ 平面 PAB .

解 (2) 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, 过 D 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角系,

$$A(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, \sqrt{2}, 0), P(\sqrt{2}, 0, 2), D(0, 0, 0),$$

$$\vec{AC} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{PD} = (-\sqrt{2}, 0, -2),$$

设直线 AC 与 PD 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{PD}|}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{PD}|} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$\therefore$ 直线 AC 与 PD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3) 假设在线段 PD 上, 存在一点 M , 使得二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° ,

$$\text{设 } M(a, b, c), \vec{PM} = \lambda \vec{PD}, 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ 则 } (a - \sqrt{2}, b, c - 2) = (-\sqrt{2}\lambda, 0, -2\lambda),$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\sqrt{2}\lambda \\ b = 0 \\ c - 2 = -2\lambda \end{cases}, \therefore M(\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, 0, 2 - 2\lambda), \vec{AC} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{AM} = (-\sqrt{2}\lambda,$$

$$0, 2 - 2\lambda),$$

$$\text{设平面 } AMC \text{ 的法向量 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AM} = -\sqrt{2}\lambda x + (2 - 2\lambda)z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x=1, \text{ 得 } \vec{n} = (1, 1, \frac{\sqrt{2}\lambda}{2 - 2\lambda}),$$

$$\text{平面 } ACD \text{ 的法向量 } \vec{m} = (0, 0, 1),$$

$\therefore$ 二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° ,

$$\therefore \cos 45^\circ = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\frac{\sqrt{2}\lambda}{2-2\lambda}|}{\sqrt{2 + (\frac{\sqrt{2}\lambda}{2-2\lambda})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

则 $0 \leq \lambda \leq 1$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, $\therefore \vec{n} = (1, 1, \sqrt{2})$,

$$M(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{2}{3}), B(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \vec{BM} = (-\frac{5\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}),$$

设 BM 与平面 MAC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\vec{BM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BM}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \therefore \theta = 30^\circ,$$

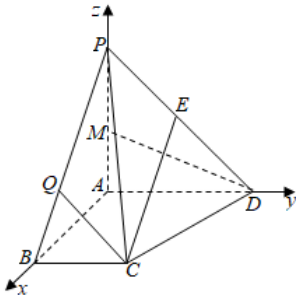
$\therefore BM$ 与平面 MAC 所成角为 30° .

6. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形,

$\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $PA = AD = 2$, $AB = BC = 1$, 点 M, E 分别是 PA, PD 的中点.

(I) 求证: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 点 Q 是线段 NP 上的动点, 当直线 CQ 与 DM 所成角最小时, 求线段 BQ 的长.



【解答】(I) 证明: 连接 BM, ME , 因为点 M, E 分别是 PA, PD 的中点,

所以 $ME = \frac{1}{2}AD, ME \parallel AD$,

所以 $BC \parallel ME, BC = ME$,

所以四边形 $BCME$ 为平行四边形,

所以 $CE \parallel BM$ (3 分)

又因为 $BM \subset$ 平面 $PAB, CE \not\subset$ 平面 PAB , 所以 $CE \parallel$ 平面 PAB .

(II) 解: 如图, 以 A 为坐标原点建立空间坐标系 $O-xyz$,

则 $B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2), M(0, 0, 1)$

所以 $\vec{BP} = (-1, 0, 2), \vec{DM} = (0, -2, 1)$,

设 $\vec{BQ} = \lambda \vec{BP} = (-\lambda, 0, 2\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1$,

又 $\vec{CQ} = \vec{CB} + \vec{BQ} = (-\lambda, -1, 2\lambda)$,

所以 $\cos \langle \vec{CQ}, \vec{DM} \rangle = \frac{2(1+\lambda)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+5\lambda^2}}$

设 $1+\lambda=t$, 则 $1+\lambda=t, t \in [1, 2]$,

所以 $\cos^2 \langle \vec{CQ}, \vec{DM} \rangle = \frac{4}{5} \cdot \frac{t^2}{5t^2 - 10t + 6}, \cos^2 \langle \vec{CQ}, \vec{DM} \rangle = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{6}{t^2} - \frac{10}{t} + 5},$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/506055021222010133>