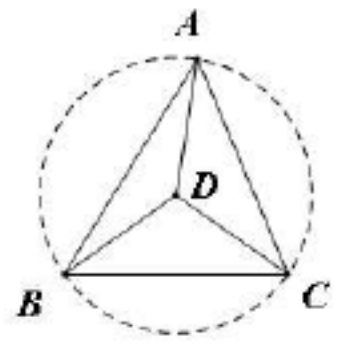
圆的培优专题 1—与圆有关的角度计算

一 运用辅助圆求角度

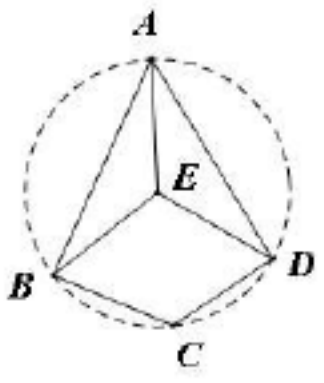
1、如图，△ABC 内有一点 D，DA＝DB＝DC，若 DAB＝20°，DAC＝30°，则 BDC＝_____.（BDC＝$\frac{1}{2}$BAC＝100°）

2、如图，AE＝BE＝DE＝BC＝DC，若 C＝100°，则 BAD＝_____.（50°）

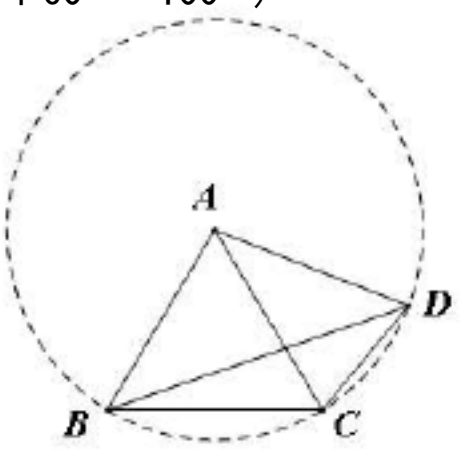
3、如图，四边形 ABCD 中，AB＝AC＝AD，CBD＝20°，BDC＝30°，则 BAD＝_____.（BAD＝BAC＋CAD＝40°＋60°＝100°）



第 1 题



第 2 题



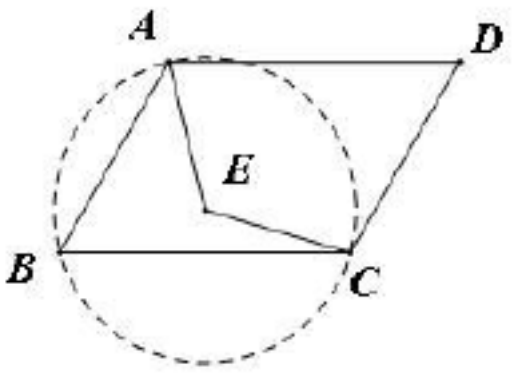
第 3 题

解题策略：通过添加辅助圆，把问题转化成同弧所对的圆周角与圆心角问题，思维更明朗！

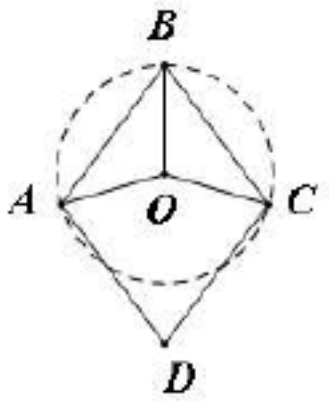
4、如图，□ABCD 中，点 E 为 AB、BC 的垂直平分线的交点，若 D＝60°，则 AEC＝_____.（AEC＝2B＝2D＝120°）

5、如图，O 是四边形 ABCD 内一点，OA＝OB＝OC，ABC＝ADC＝70°，则 DAO＋DCO＝_____.（所求＝360°－ADC－AOC＝150°）

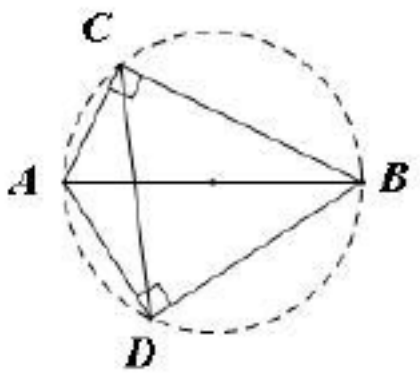
6、如图，四边形 ABCD 中，ACB＝ADB＝90°，ADC＝25°，则 ABC＝_____.（ABC＝ADC＝25°）



第 4 题



第 5 题



第 6 题

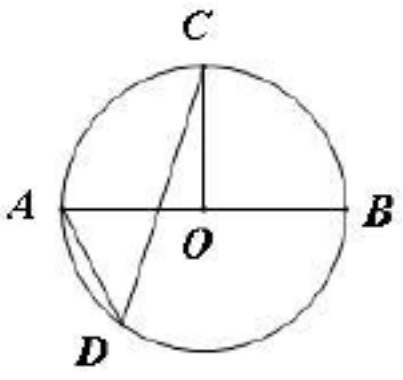
解题策略：第 6 题有两个直角三角形共斜边，由直角所对的弦为直径，易得到ACBD 共圆.

二 运用圆周角和圆心角相互转化求角度

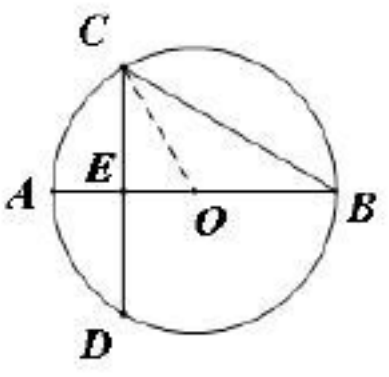
7、如图，AB 为⊙O 的直径，C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，D 为半圆 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，则 ADC＝_____.

8、如图，AB 为⊙O 的直径，CD 过 OA 的中点 E 并垂直于 OA，则 ABC＝_____.

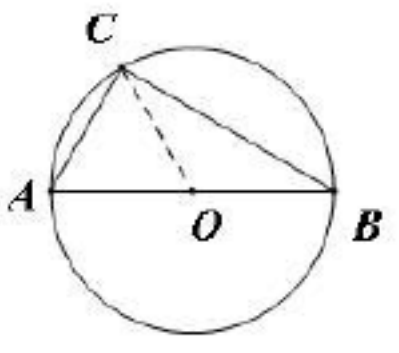
9、如图，AB 为⊙O 的直径，$\overset{\frown}{BC}$ $\overset{\frown}{3AC}$，则 ABC＝_____.



第 7 题



第 8 题



第 9 题

答案：7、45 ； 8、30 ； 9、22.5 ； 10、40 ； 11、150 ； 12、110

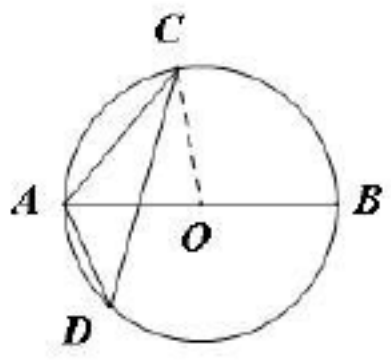
解题策略：以弧去寻找同弧所对的圆周角与圆心角是解决这类问题的捷径！

10、如图，AB 为⊙O 的直径，点 C、D 在⊙O 上，$\overset{\frown}{BAC}$＝ $\overset{\frown}{50}$，则 ADC＝————.

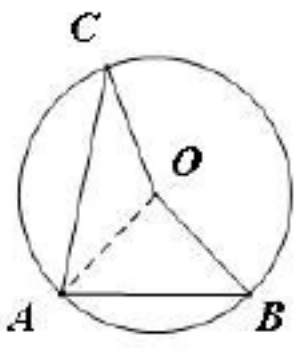
11、如图，⊙O 的半径为 1，弦 AB＝ $\sqrt{2}$，弦 AC＝ $\sqrt{3}$，则 BOC＝————.

12、如图，PAB、PCD 是⊙O 的两条割线，PAB 过圆心 O，若 $\overset{\frown}{AC}$ $\overset{\frown}{CD}$，P＝ 30，

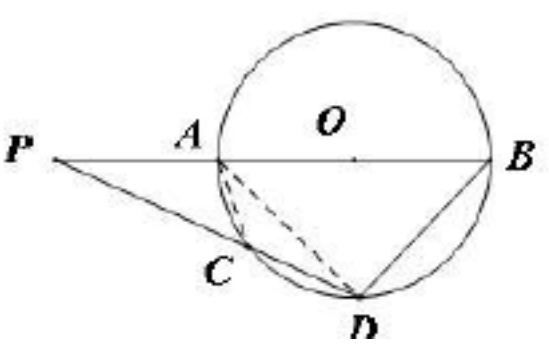
则 BDC＝————. （设 ADC＝ x，即可展开解决问题）



第 10 题



第 11 题



第 12 题

解题策略：在连接半径时，时常会伴随出现特殊三角形—等腰三角形或直角三角形或等腰直角三角形或等边三角形，是解题的另一个关键点！

圆的四接四边形的外角等于内对角，是一个非常好用的一个重要性质！

圆的培优专题 2—与垂径定理有关的计算

1、如图，AB 是⊙O 的弦，OD　AB，垂足为 C，交⊙O 于点 D，点 E 在⊙O 上，若　BED＝30 ，⊙O 的半径为 4，则弦 AB 的长是 _____.

略解：∵OD　AB，∴AB＝2AC，且　AOC＝90 ，

∵　BED＝30 ，∴　AOC＝2　BED＝60

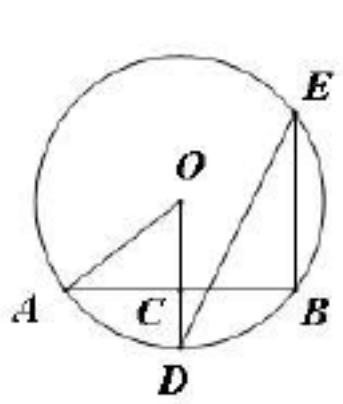
∴　OAC＝30 ，OC＝ $\frac{1}{2}$ OA＝2，则 AC＝ $2\sqrt{3}$，因此 AB＝ $4\sqrt{3}$.

2、如图，弦 AB 垂直于⊙O 的直径 CD，OA＝5，AB＝6，则 BC＝ _____.

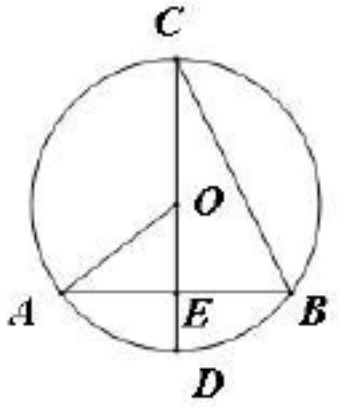
略解：∵直径 CD　弦 AB，∴AE＝BE＝ $\frac{1}{2}$ AB=3

∴OE＝ $\sqrt{5^2 \quad 3^2}$　4，则 CE＝5＋4＝9

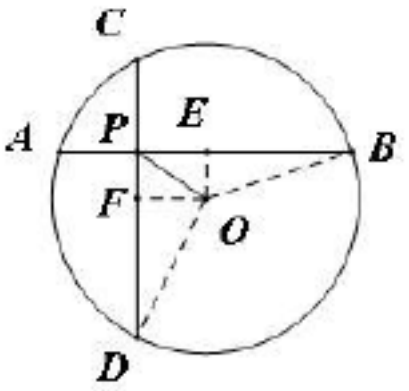
∴BC＝ $\sqrt{9^2 \quad 3^2}$　$3\sqrt{10}$



第 1 题



第 2 题



第 3 题

3、如图，⊙O 的半径为 $2\sqrt{5}$，弦 AB　CD，垂足为 P，AB＝8，CD＝6，则 OP＝ _____.

略解：如图，过点 O 作 OE　AB，OF　CD，连接 OB，OD.

则 BE＝ $\frac{1}{2}$ AB＝4，DF＝ $\frac{1}{2}$ CD＝3，且 OB＝OD＝ $2\sqrt{5}$

OE＝ $\sqrt{(2\sqrt{5})^2 \quad 4^2}$　2，OF＝ $\sqrt{(2\sqrt{5})^2 \quad 3^2}$　$\sqrt{11}$

又 AB　CD，则四边形 OEPF 是矩形，则 OP＝ $\sqrt{2^2 \quad (\sqrt{11})^2}$　$\sqrt{15}$

4、如图，在⊙O 内，如果 OA＝8，AB＝12，　A＝　B＝60 ，则⊙O 的半径为 _____.

略解：如图，过点O 作 OD　AB，连接 OB，则 AD＝ $\frac{1}{2}$ AB＝4，因此，BD＝8，OD＝ $4\sqrt{3}$

∴OB＝ $\sqrt{(4\sqrt{3})^2 \quad 8^2}$　$4\sqrt{7}$.

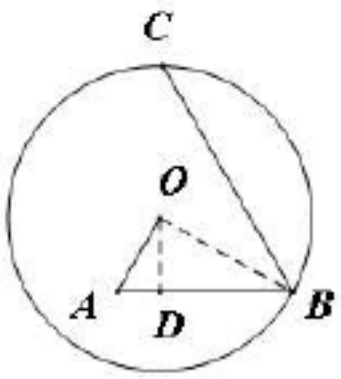
5、如图，正△ABC 内接于⊙O，D 是⊙O 上一点，$\angle DCA=15^\circ$，CD＝10，则 BC＝____

略解：如图，连接 OC，OD，则 $\angle ODC=\angle OCD$

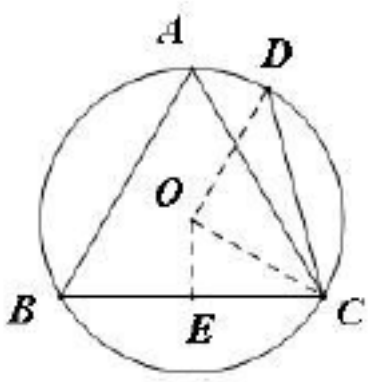
∵△ABC 为等边三角形，则 $\angle OCA=\angle OCE=30^\circ$，∴ $\angle ODC=\angle OCD=45^\circ$

∴△OCD 是等腰三角形，则$OC=5\sqrt{2}$

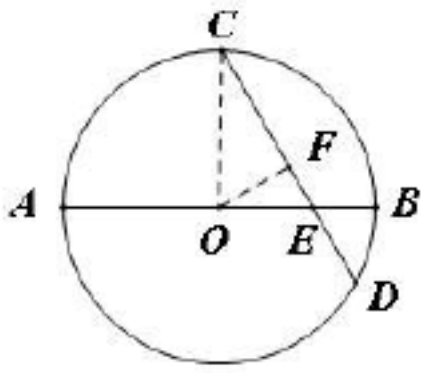
过点 O 作 OE ⊥ BC，则 $BC=2CE=5\sqrt{6}$



第 4 题



第 5 题



第 6 题

6、如图，⊙O 的直径 AB＝4，C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，E 为 OB 上一点，$\angle AEC=60^\circ$，CE 的延长线交⊙O 于点 D，则 CD＝ ————————

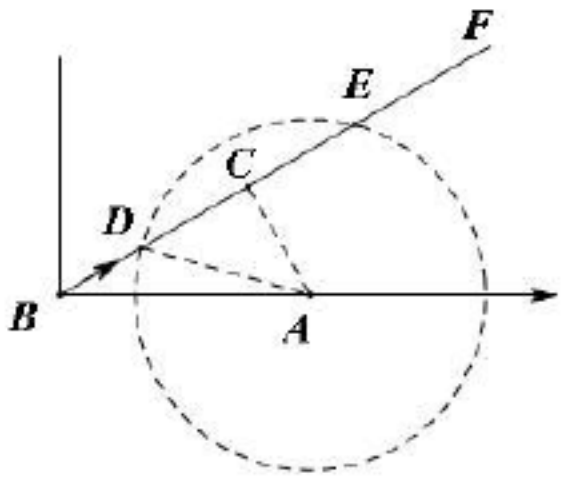
略解：如图，连接OC，则OC＝2

∵C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，则 OC ⊥ AB，又 $\angle AEC=60^\circ$，∴ $\angle OCE=30^\circ$

如图，过点 O 作 OF ⊥ CD，则 $OF=\frac{1}{2}OC=1$，$CF=\sqrt{3}$，∴$CD=2CF=2\sqrt{3}$

7、如图，A 地测得台风中心在城正西方向300 千米的B 处，并以每小时$10\sqrt{7}$ 千米的速度沿北偏东60° 的 BF 方向移动，距台风中心 200 千米范围内是受台风影响的区域.

问：A 地是否受到这次台风的影响？若受到影响，请求出受影响的时间？



解：如图，过点 A 作 AC ⊥ BF 交于点 C，

∵ $\angle ABF=30^\circ$，则 $AC=\frac{1}{2}AB=150$ 200，因此 A 地会受到这次台风影响；

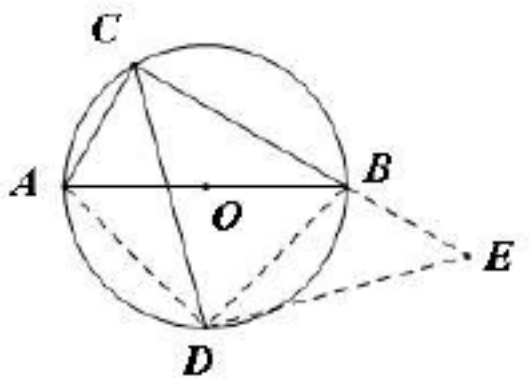
如图，以 A 为圆心 200 千米为半径作⊙A 交 BF 于 D、E 两点，连接 AD，

则 $DE=2CD=2\sqrt{200^2-150^2}=100\sqrt{7}$，

所以受影响的时间为$100\sqrt{7}\div10\sqrt{7}=10$（时）

圆的培优专题 3—圆与全等三角形

1、如图，⊙O 的直径 AB＝10，弦 AC＝6，　　ACB 的平分线交⊙O 于 D，求 CD 的长.



解：如图，连接 AB，BD，在 CB 的延长线上截取 BE＝AC，连接 DE

∵　ACD＝　BCD，∴AD＝BD

又　CAD＝　EBD，AC＝BE

∴△CAD≌△EBD（SAS）

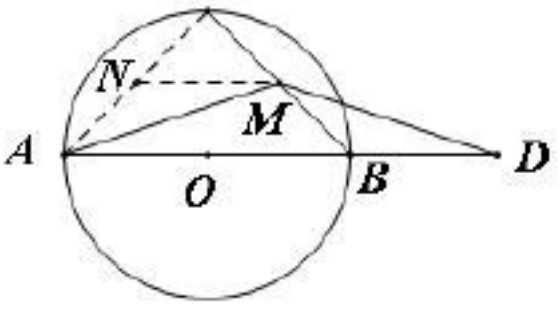
∴CD＝DE，　ADC＝　BDE

∵AB 为⊙O 的直径，则　ACB＝　ADB＝90

∴BC＝$\sqrt{10^2 \quad 6^2}$　8；　ADC＋　CDB＝　CDB＋　BDE＝90　，即　CDE＝90

∴△CDE 是等腰直角三角形且CE＝14，∴CD＝7 $\sqrt{2}$

2、如图，AB 是⊙O 的直径，C 是半圆的中点，M、D 分别是 CB 及 AB 延长线上一点，且 MA＝MD，若 CM＝ $\sqrt{2}$ ，求 BD 的长.



解：如图，连接 AC，则 AC＝BC，　C＝90　，即△ABC 是等腰直角三角形

过点 M 作 MN∥AD，则　NMA＝　MAD

则△CMN 也是等腰直角三角形，则 MN＝ $\sqrt{2}$ CM＝2

∴　ANC＝　MBD＝135　，

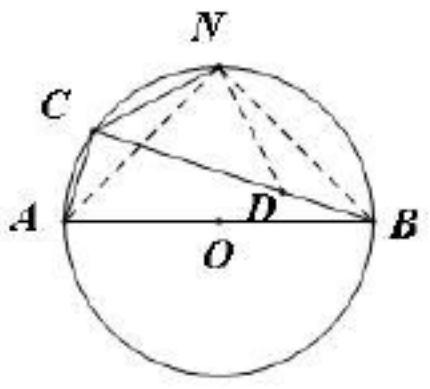
又 MA＝MD，∴　D＝　NMA＝　MAD

∴△AMN≌△BMD（AAS）

∴BD＝MN＝2

3、如图，AB 为⊙O 的直径，点 N 是半圆的中点，点 C 为 AN　上一点，NC＝ $\sqrt{3}$.

求 BC－AC 的值.



解：如图，连接AN，BN，则△ABN 是等腰直角三角形

在 BC 上截取BD＝AC，连接DN

∵AN＝BN，　CAN＝　DBN，AC＝BD

∴△ACN≌△BDN（SAS）

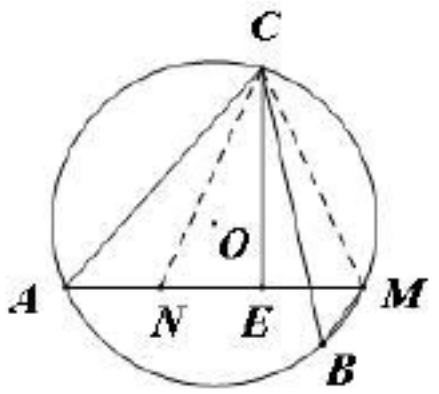
∴CN＝DN，　CNA＝　DNB，

∴　CND＝　CNA＋　AND＝　ADN＋　DNB＝90　，即△CND 是等腰直角三角形

∴CD＝ $\sqrt{2}$ NC＝ $\sqrt{6}$ ，

∴BC－AC＝BC－BD＝CD＝ $\sqrt{6}$

4、如图，点 A、B、C 为⊙O 上三点，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，点 M 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，CE⊥AM 于 E，AE＝5，ME＝3，求 BM 的长.



解：如图，在AM 上截取AN＝BM，连接CN，CM.

∵$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，∴AC＝BC，又∠A＝∠B

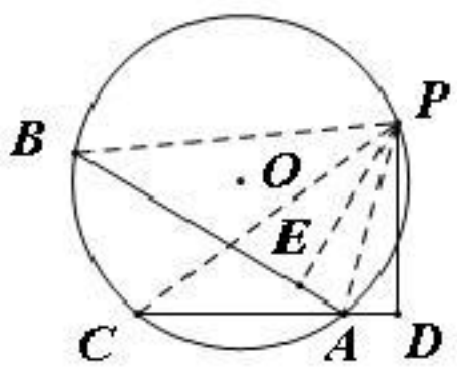
∴△ACN≅△BCM（SAS）

∴CN＝CM，又 CE⊥AM

∴NE＝ME＝3，

∴BM＝AN＝AE－NE＝2

5、如图，在⊙O 中，P 为 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，PD⊥CD，CD 交⊙O 于 A，若 AC＝3，AD＝1，求 AB 的长.



解：如图，连接 BP、CP，则 BP＝CP，∠B＝∠C

过点 P 作 PE⊥AB 于点 E，又 PD⊥CD

∴∠BEP＝∠CDP

∴△BEP≅△CDP（AAS）

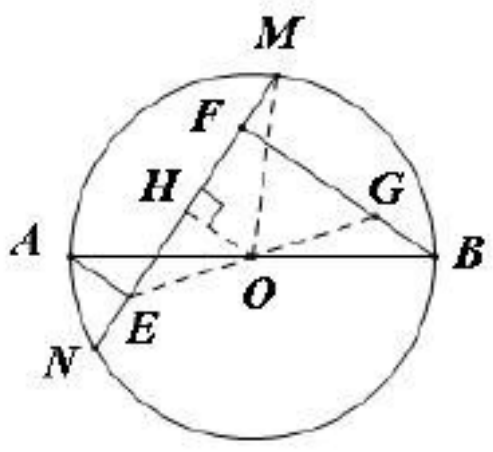
∴BE＝CD＝3+1＝4，PE＝PD

连接 AP，则 Rt△AEP≅Rt△ADP（HL），则 AE＝AD＝1

∴AB＝AE+BE＝5

6、如图，AB 是 O 的直径，MN 是弦，AE⊥MN 于 E，BF⊥MN 于 F，AB＝10，MN＝8.

求 BF－AE 的值.



解：∵AE⊥MN，BF⊥MN，则 AE∥BF，∴∠A＝∠B

如图，延长 EO 交 BF 于点 G，

则∠AOE＝∠BOG，AO＝BO

∴△AOE≅△BOG（AAS），则 OE＝OG

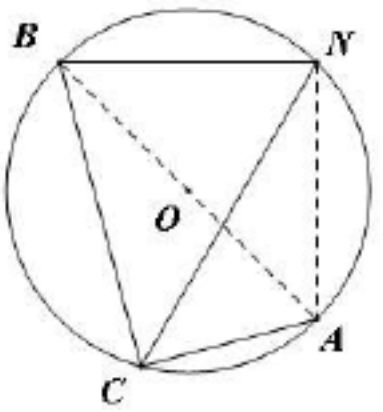
过点 O 作 OH⊥MN，FG＝2OH，HN＝4

连接 ON，则 ON＝5，OH＝$\sqrt{5^2-4^2}=3$，则 BG－AE＝FG＝6.

圆的培优专题 4—圆与勾股定理

1、如图，⊙O 是△BCN 的外接圆，弦 AC　BC，点 N 是 AB 的中点，　BNC＝ 60 ，

求 $\frac{BN}{BC}$ 的值.



解：如图，连接 AB，则 AB 为直径，∴　BNA＝90

连接AN，则BN＝AN，则△ABN 是等腰直角三角形

∴BN＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$AB；又　BAC＝　BNC＝ 60 ，

∴BC＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$AB，　∴$\frac{BN}{BC}$ ＝$\frac{\sqrt{6}}{3}$　（方法 2，过点 B 作 BD　CN，即可求解）

2、如图，⊙O 的弦 AC　BD，且 AC＝BD，若 AD＝ $2\sqrt{2}$ ，求⊙O 半径.

解：如图，作直径 AE，连接 DE，则　ADE＝90

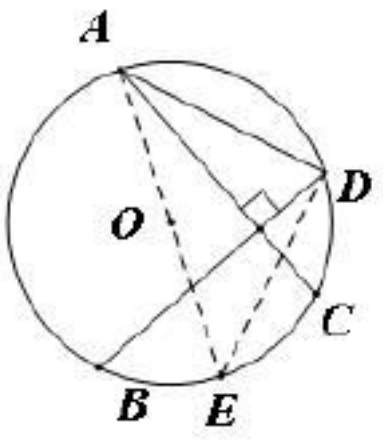
又 AC　BD，则　ADB＋　DAC＝　ADB＋　EDB＝90

∴　DAC＝　EDB，则 CD　BE ，∴ DE　BC ，

∵ AC＝BD，∴ AC　CD ，则 AD　BC　DE

∴AD＝DE，即△ADE 是等腰直角三角形

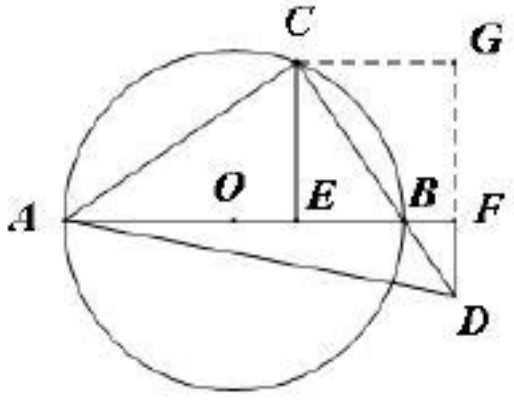
∴AE＝ $\sqrt{2}$ AD＝4，即⊙O 的半径为 2



3、如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，D 为 CB 延长线上一点，且　CAD＝ 45 ，

CE　AB 于点 E，DF　AB 于点 F.

（1）求证：CE＝EF；（2）若 DF＝2，EF＝4，求 AC.



（1）证：∵ AB 为⊙O 的直径，　CAD＝ 45 ，

则△ACD 是等腰直角三角形，即 AC＝DC

又 CE　AB，则　CAE＝　ECB

如图，过点C 作 CG 垂直DF 的延长线于点G

又 CE　AB，DF　AB，则四边形 CEFG 是矩形，　AEC＝　DGC＝90

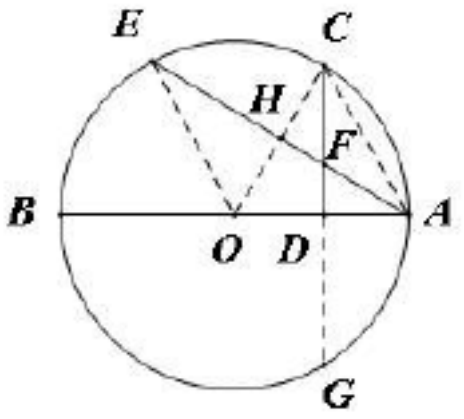
∴EF＝CG，CE∥DG，则　ECB＝　CDG＝　CAE

∴△ACE≌△DCG（AAS），则 CE＝CG＝EF

（2）略解：AC＝CD＝ $\sqrt{4^2\quad 6^2}$　$2\sqrt{13}$.

4、如图，AB 为⊙O 的直径，CD　AB 于点 D，CD 交 AE 于点 F，AC　CE．

（1）求证：AF＝CF；



（2）若⊙O 的半径为 5，AE＝8，求 EF 的长

（1）证：如图，延长CD 交⊙O 于点G，连接AC

∵直径 AB　CG，则 AG　AC　CE

∴　CAE＝　ACG，则 AF＝CF

（2）解：如图，连接 OC 交 AE 于点 H，则 OC　AE，EH＝AH＝$\frac{1}{2}$ AE=4

∴ OH＝$\sqrt{5^2 \quad 4^2}$　3，则 CH＝5－3＝2

设 HF＝ x，则 CF＝AF＝4－ x

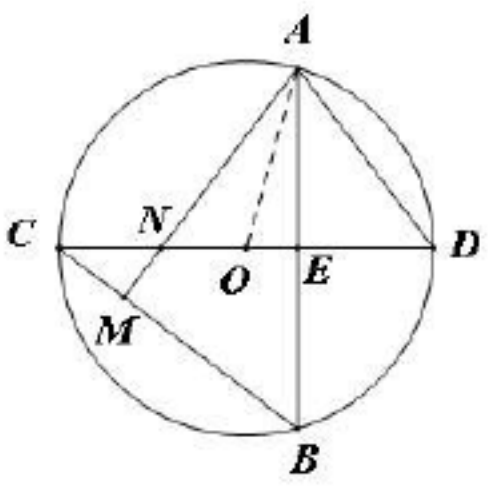
则 $x^2 \quad 2^2 \quad (4 \quad x)^2$，∴x　$\frac{3}{2}$，即 HF＝$\frac{3}{2}$

∴EF＝$\frac{11}{2}$

5、如图，在⊙O 中，直径 CD　弦 AB 于 E，AM　BC 于 M，交 CD 于 N，连接 AD.

（1）求证：AD＝AN；

（2）若 AB＝$4\sqrt{2}$，ON＝1，求⊙O 的半径.



（1）证：∵CD　AB，AM　BC

∴　C＋　CNM＝　C＋　B＝90

∴　B＝　CNM，

又　B＝　D，　AND＝　CNM

∴　D＝　AND，即 AD＝AN

（2）解：∵直径 CD　弦 AB，则 AE＝$2\sqrt{2}$

又 AN＝AD，则NE＝ED

如图，连接OA，设 OE＝ x，则 NE＝ED＝ x　1

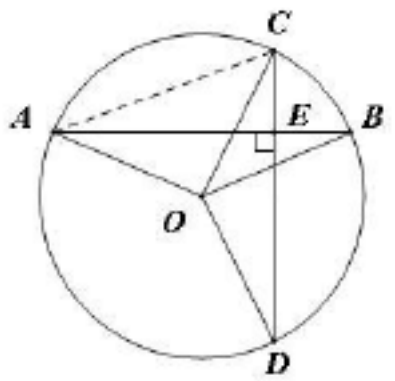
∴OA＝OD＝ 2x　1

∴ $x^2 \quad (2\sqrt{2})^2 \quad (2x \ 1)^2$，　则 x　1

∴⊙O 的半径OA＝3

圆的培优专题 5—圆中两垂直弦的问题

1、在⊙O 中，弦 AB　CD 于 E，求证：　AOD＋　BOC＝180 .



证：如图，连接 AC,

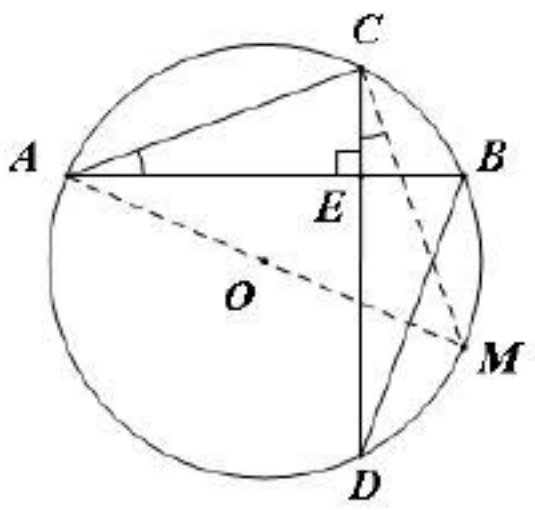
∵AB　CD，则　CAB＋　ACD＝90

又　AOD＝2　ACD,　BOC＝2　BAC

∴　AOD＋　BOC＝180 .

2、在⊙O 中，弦 AB　CD 于点 E，若⊙O 的半径为 R，求证：$AC^2+BD^2=4R^2$.

证：∵AB　CD，则　CAB＋　ACD＝90



如图，作直径 AM，连接CM

则　ACM＝　ACD＋　DCM＝90

∴　CAB＝　DCM,

∴BC　DM

∴CM　BD ,

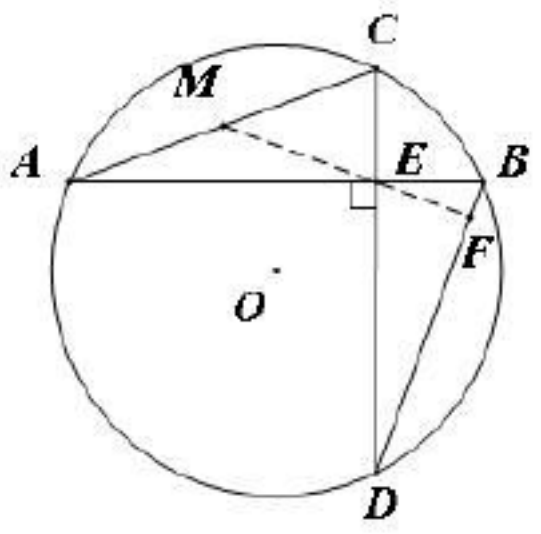
∴CM＝BD

∵$AC^2+CM^2=AM^2$

∴$AC^2+BD^2=4R^2$.

3、在⊙O 中，弦 AB　CD 于点 E，若点 M 为 AC 的中点，求证 ME　BD.

证：如图，连接 ME，并延长交 BD 于点 F



∵AB　CD，且点 M 为 AC 的中点

∴ME 为 Rt△AEC 斜边上的中线

∴AM＝ME

∴　A＝　AEM＝　BEF

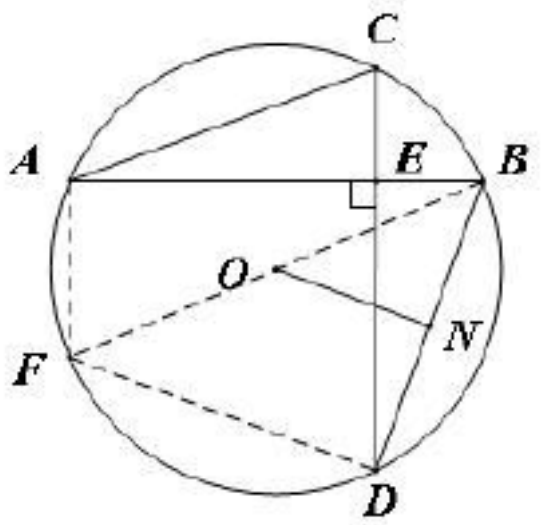
又　B＝　C,　A＋　C＝90

∴　BEF＋　B＝90 ，即　BFE＝90

∴ME　BD.

4、在⊙O 中，弦 AB　CD 于点 E，若 ON　BD 于 N，求证：ON＝$\frac{1}{2}$AC.

证：如图，作直径 BF，连接 DF，



则 DF　BD，又 ON　BD，

∴ON∥FD，又 OB＝OF

∴ON＝$\frac{1}{2}$DF

连接 AF，则 AF　AB，又 CD　AB

∴AF∥CD

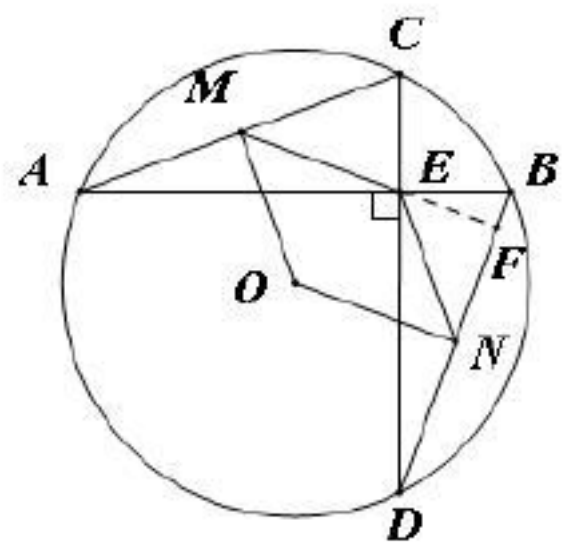
∴ AC　FD ，则 AC＝FD

∴ON＝$\frac{1}{2}$AC

5、在⊙O 中，弦 AB　CD 于点 E，若 AC＝BD，ON　BD 于 N，OM　AC 于 M.

(1) 求证：ME //ON；

(2) 求证：四边形OMEN 为菱形.



证:（1）如图，延长 ME 交 OD 于点 F

∵OM　AC，则点 M 为 AC 的中点

∵ AB　CD，则 ME 为 Rt△ACE 的斜边上中线

∴AM＝EM,

∴　A＝　AEM＝　BEF

又　B＝　C,　A＋　C＝90

∴　B＋　BEF＝90 ，则　BFE＝90

∴MF　BD，又 ON　BD

∴MF∥ON

（2）由（1）知 MF∥ON，同理可证OM∥NE,

∴四边形OMEN 是平行四边形

∵AC＝BD，∴OM＝ON

∴四边形OMEN 为菱形.

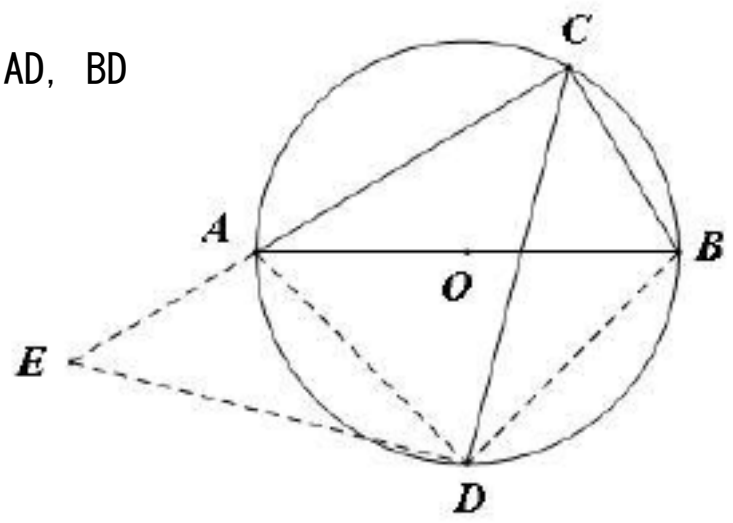
圆的培优专题 6—圆与内角（外角）平分线

一 圆与内角平分线问题往往与线段和有关，实质是对角互补的基本图形

1、如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，弦 CD 平分 ACB，ACB＝ 90 .

求证：CA＋CB＝ $\sqrt{2}$ CD.

证：如图，在CA 的延长线上截取AE＝BC，连 DE，AD，BD



∵CD 平分 ACB，∴AD＝BD

又 DAE＝ DBC，AE＝BC

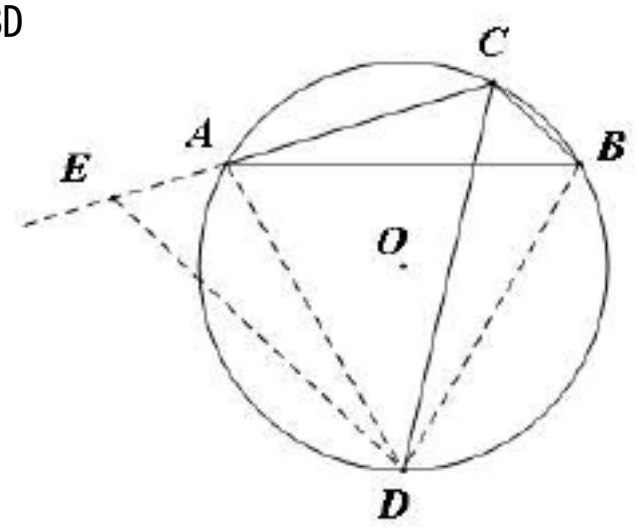
∴△DAE≅△DBC（SAS）

∴CD＝DE，又 ACD＝45

∴△CDE 是等腰直角三角形，则 CA＋CB＝CE＝ $\sqrt{2}$ CD.

2、如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，弦 CD 平分 ACB，ACB＝120 ，求 $\frac{CA+CB}{CD}$ 的值.

解：如图，在CA 的延长线上截取AE＝BC，连 DE，AD，BD



∵CD 平分 ACB，∴AD＝BD

又 DAE＝ DBC，AE＝BC

∴△DAE≅△DBC（SAS）

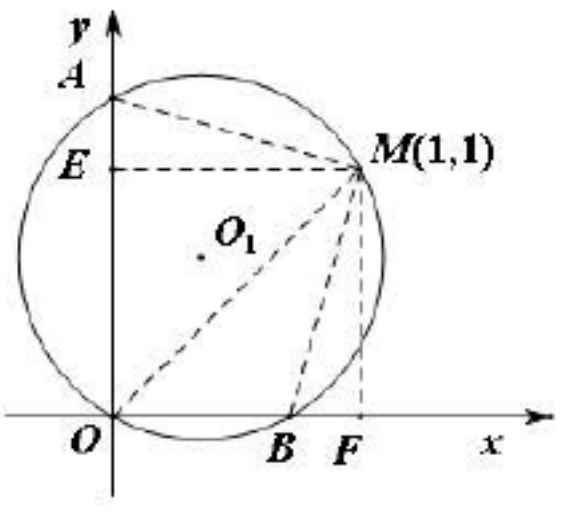
∴CD＝DE，又 ACD＝60

∴△CDE 是等边三角形

∴CD＝CE＝CA＋BC，即 $\frac{CA+CB}{CD}$ ＝1

3、如图，过 O、M(1,1)的动圆$\odot O_1$交 y 轴、x 轴于点 A、B，求 OA＋OB 的值.

解：如图，过点 M 作 ME y 轴，MF x 轴，连 AM、BM



由 M（1，1）知：四边形 OFME 是正方形

∴OE＝OF＝4，EM＝FM，又 MBF＝ MAE，

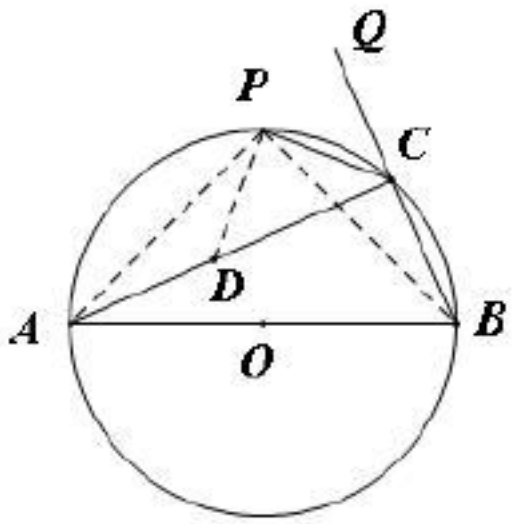
∴△AEM≅△BFM（AAS），则 AE＝BF

∴OA＋OB＝AE＋OE＋OF－BF＝8.

二 圆中的外角问题往往与线段的差有关

4、如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，弦 CP 平分△ABC 的外角 ACQ，ACB＝ 90 .

求证：(1) PA PB ；(2) AC－BC＝$\sqrt{2}$ PC.



证：(1) 如图，连接 AP，则 PCQ＝ PAB

又 PCQ＝ PCA，则 PAB＝ PCA

∴PA PB

(2) 连接BP，由 (1) 得，PA＝PB

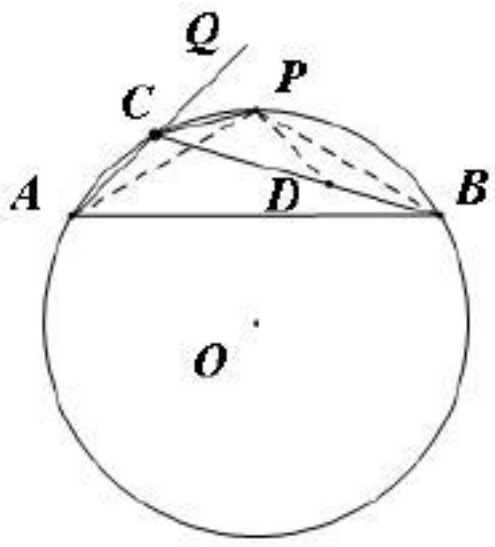
在 AC 上截取 AD＝BC，连 PD，又 PAD＝ PBC

∴△PAD≌△PBC (SAS)，则 PD＝PC

又 PCD＝45 ，则∴PCD 是等腰直角三角形，∴AC－BC＝CD＝ $\sqrt{2}$ PC.

5、如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，弦 CP 平分△ABC 的外角 ACQ，ACB＝120 .

求$\frac{BC-AC}{PC}$的值.



解：如图，在BC 上截取BD＝AC，连AP、BP、DP

∵ PCB＝ PCQ＝ PBA

∴AP＝BP，又 CAP＝ DBP

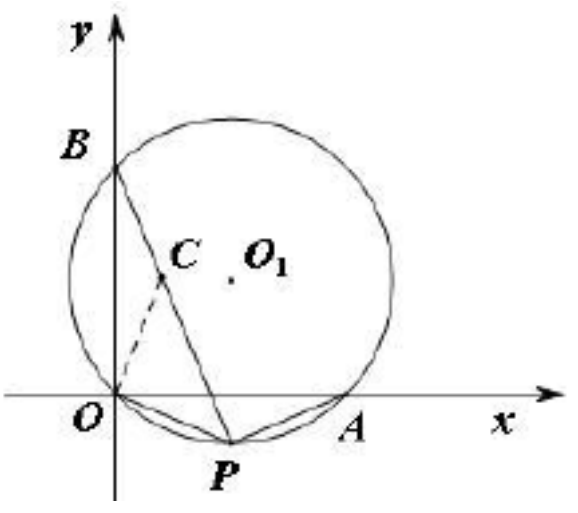
∴△CAP≌△DBP (SAS)，则 CP＝DP

又 ACB＝120 ，∴ PCD＝30 ，

∴$\frac{BC-AC}{PC}=\frac{CD}{PC}=\sqrt{3}$

6、如图，A (4,0)，B (0,4)，⊙O1 经过 A、B、O 三点，点 这 P 为OA 上动点（异于O、A）.

求$\frac{PB-PA}{PO}$的值.



解：如图，在BP 上截取BC＝AP

∵A (4,0)，B (0,4)，则 OA＝OB＝4

又 OAP＝ OBC

∴△OAP≌△OBC (SAS)

∴OC＝OP，且 COP＝ AOB＝90 ，则$\frac{PB-PA}{PO}=\frac{PC}{PO}=\sqrt{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/506103210235010210