第五章 三角函数

5.4.3 正切函数的性质与图象

必备知识解读

知识点1 正切函数的性质与图象

例1-1 (2024·山东省济南市期末)函数$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的定义域是(**A**)

A.$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\}$　　B.$\{x|x\neq k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\}$

C.$\{x|x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\}$　　D.$\{x|x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\}$

【解析】易知$x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.故函数的定义域为$\{x|x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

例1-2 函数$y=\tan x,x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$的值域为$\underline{\mathbf{[-1,1]}}$.

【解析】$\because$ 函数$y=\tan x$在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上单调递增，$\therefore$ 函数$y=\tan x$在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上的值域为$[-1,1]$.

例1-3 作出函数$y = \tan x + 2$，$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的简图.

【解析】（1）列表:

		0x	
		tan x 0	1
	1	tan x + 2 2	3

（2）画$x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$两条虚线，描点.

（3）用光滑曲线连接，如图5.4.3-1所示.

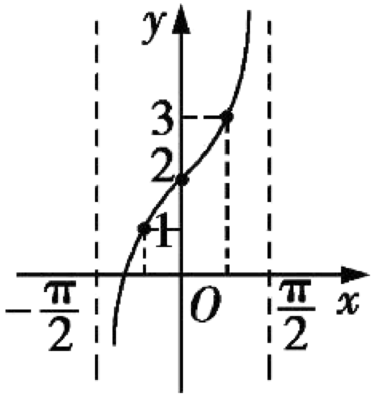


图5.4.3-1

知识点2 正切型函数的性质

例2-4 (2024·浙江省杭州市期末)下列坐标所表示的点不是函数$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$图象的对称中心的是(C)

A.$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ B.$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ C.$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ D.$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$

【解析】 令$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{k\pi}{6}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

当$k=0$，1，2时，$x=\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{12}$，A,B,D均符合题意．故选C．

关键能力构建

题型1 正切函数图象的应用

例5 画出函数$y=2\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$在$x\in[0,2\pi]$上的简图.

【解析】 令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,可得$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

又$x\in[0,2\pi]$，所以直线$x=\frac{3\pi}{2}$是该函数图象的一条渐近线.

当$x=0$时，$y=2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2$；

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$y=2\tan 0=0$;

当$x=\pi$时，$y=2\tan\frac{\pi}{4}=2$；

当$x=2\pi$时，$y=2\tan\frac{3\pi}{4}=-2$.

描点$(0,-2)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,2)$，$(2\pi,-2)$，画虚线$x=\frac{3\pi}{2}$

根据正切曲线的趋势，画出简图，如图5.4.3-2所示.

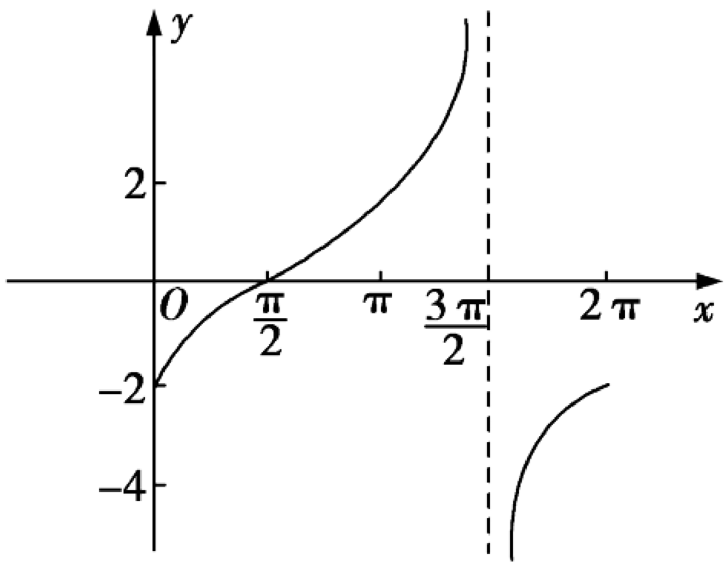


图5.4.3-2

例6 图5.4.3-3中的图形分别是

①$y=|\tan x|$；②$y=\tan x$;

③$y=\tan(-x)$；④$y=\tan|x|$在

$x\in(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$内的大致图象，那么由a到

d对应的函数关系式应是（ D ）

A.①②③④　　　　B.①③④②

C.③②④①　　　　D.①②④③

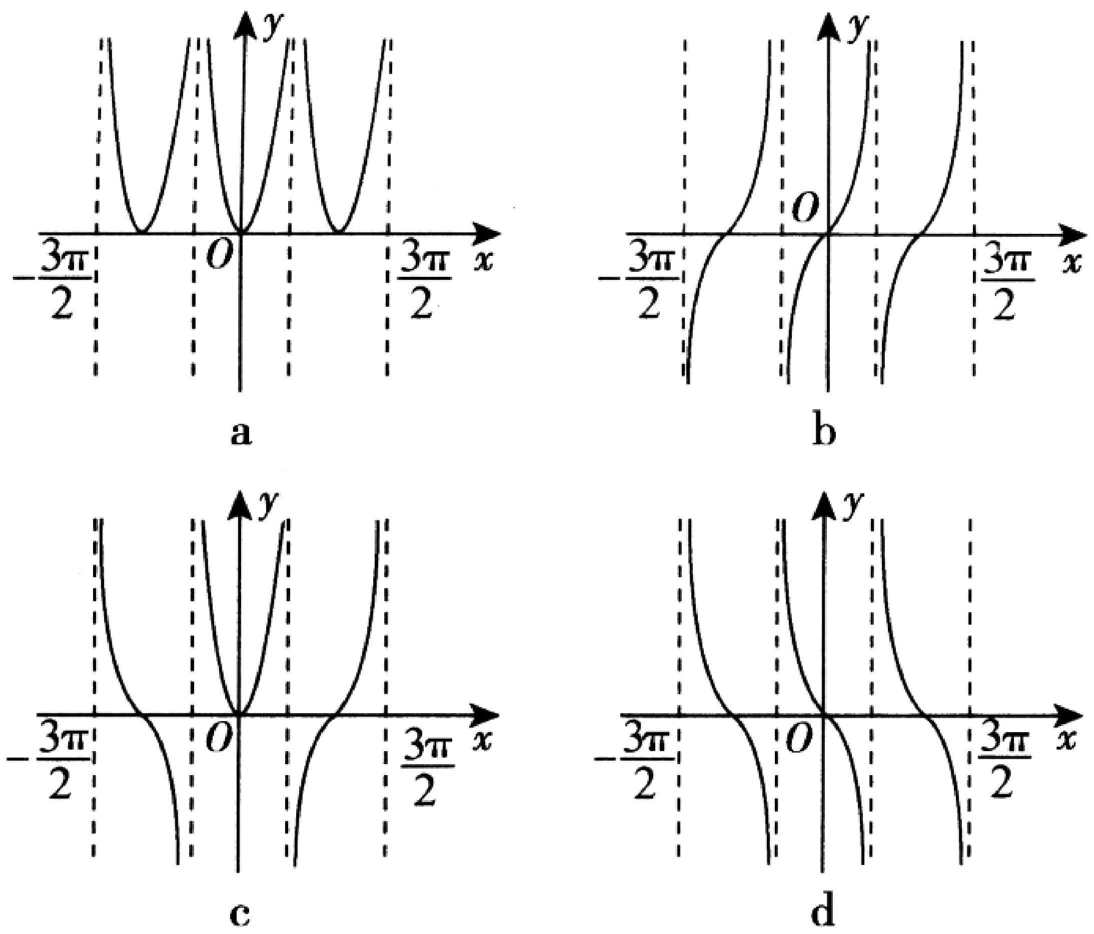
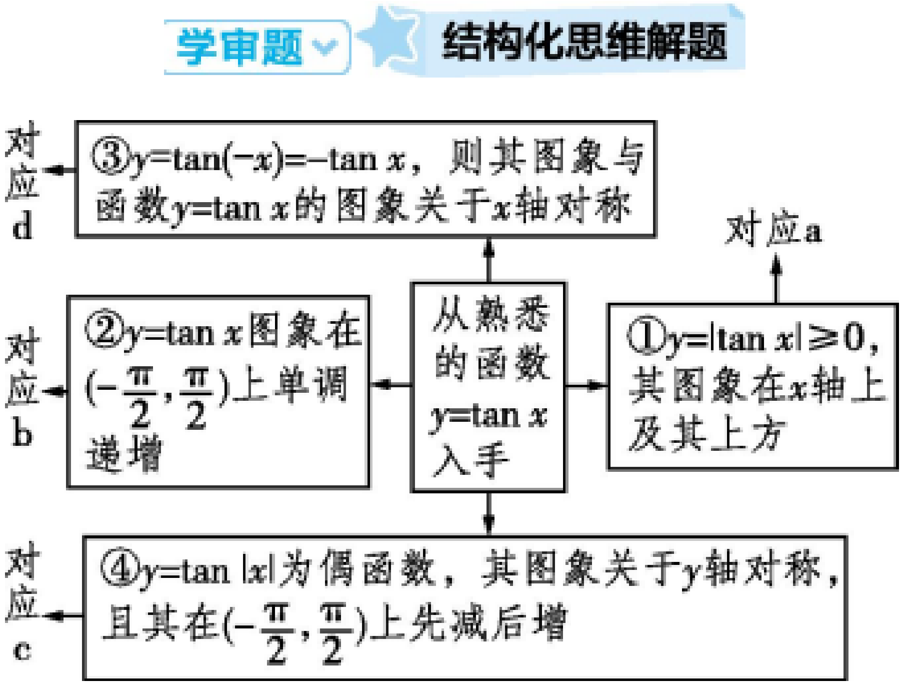


图5.4.3-3

【解析】



学审题
结构化思维解题
③y=tan(−x)=−tan x，则其图象与函数y=tan x的图象关于x轴对称
对应d
②y=tan x图象在(−π/2,π/2)上单调递增
对应b
从熟悉的函数y=tan x入手
①y=|tan x|≥0，其图象在x轴上及其上方
对应a
④y=tan |x|为偶函数，其图象关于y轴对称，且其在(−π/2,π/2)上先减后增
对应c

答案 D

例7 函数$y=\sqrt{1-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$的定义域为 $\underline{\left\{x \middle| -\frac{3\pi}{4}+k\pi<x\leq k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}\right\}}$.

【解析】由$1-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$,得$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$,且

$x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$（【易错点】求与正轴函数有关的函数的定义域时，切记保证正切函数$y=\tan x$有意义，即$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）.

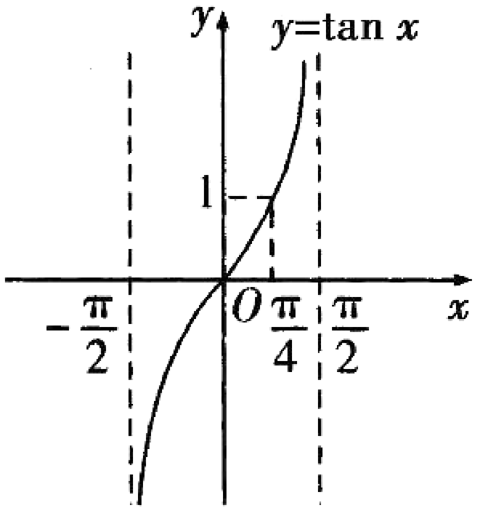


图5.4.3-4

由图5.4.3-4可得$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即

$-\frac{3\pi}{4}+k\pi<x\leq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数$y=\sqrt{1-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$的定义域为

$\left\{x \middle| -\frac{3\pi}{4}+k\pi<x\leq k\pi\ ,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

例8 在区间$\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内，函数$y=\tan x$与函数$y=\sin x$的图象交点的个数为(　C　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【解析】方法1 （方程思想） 令$\sin x=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，得$\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)=0$，解得$\sin x=0$或$\cos x=1$．

在$x\in\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$内，由$\sin x=0$得$x=-\pi$或$x=0$或$x=\pi$，由$\cos x=1$得$x=0$，故交点个数为3．

方法2 （数形结合思想） 在同一平面直角坐标系中，先作出函数$y = \sin x$与$y = \tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的图象，当$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时，有$\sin x < x < \tan x$（注意结合名师点评理解），然后利用对称性作出$x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$的两函数的图象，如图5.4.3-5所示，由图象可知它们有3个交点．

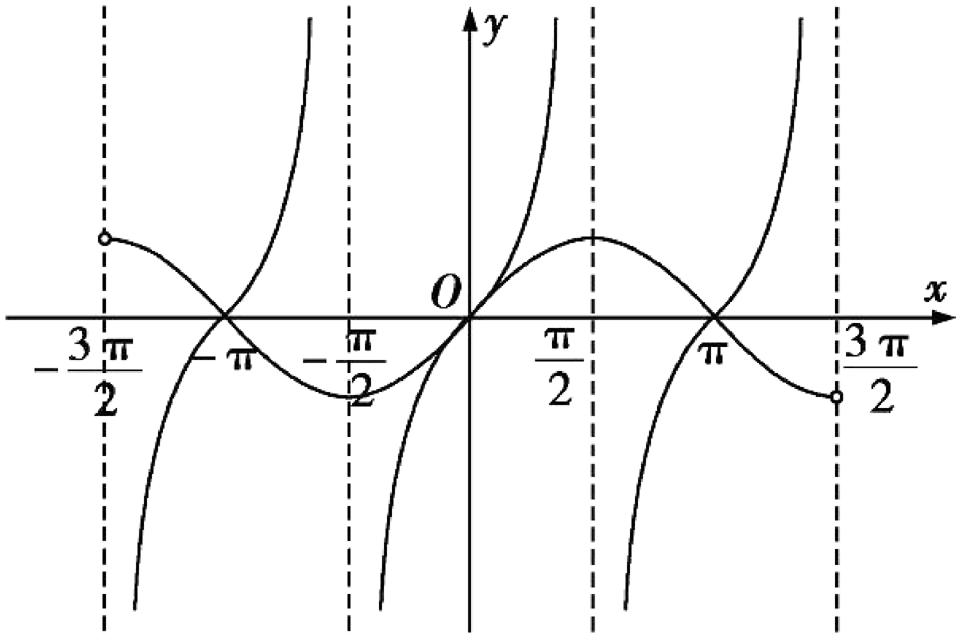


图5.4.3-5

题型2 正切函数单调性的应用

例9 [教材改编P214 T14] (2024·河南省新乡市期末)函数$y = \tan\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right)$的单调递减区间为$\underline{\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)(k \in \mathbf{Z})}$.

【解析】

求 $y=\tan(-3x+\frac{\pi}{4})$ 的单调递减区间 $\xrightarrow[\tan(-x)=-\tan x]{\text{利用诱导公式}}$ 转化为求 $y=-\tan(3x-\frac{\pi}{4})$ 的单调递减区间，即求 $y=\tan(3x-\frac{\pi}{4})$ 的单调递增区间

函数 $y=\tan x$ 的单调递增区间为 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in \mathbf{Z})$

则 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

答案 $(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$

【学会了吗|变式题】

1. **[多选题]** 下列选项中，是函数$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间的有(　**BC**　)

A.$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$　　B.$\left(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$　　C.$\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$　　D.$\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$

【解析】令$k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得$k\pi-\frac{5\pi}{6}<x<k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，则函数$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间为$\left(k\pi-\frac{5\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.令$k=0$，函数$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间为$(-\frac{5\pi}{6}，\frac{\pi}{6})$，B正确.令$k=1$，函数$y=\tan(x+\frac{\pi}{3})$的单调递增区间为$(\frac{\pi}{6}，\frac{7\pi}{6})$，C正确.A，D明显错误．故选BC．

例10 (2024·浙江省温州市期末)若函数$f(x)=\tan \omega x$在$(-\pi\ ,\pi)$上是增函数，则ω的最大值是$\underline{\frac{1}{2}}$.

【解析】因为函数$f(x)=\tan \omega x$在$(-\pi\ ,\pi)$上是增函数，所以$\omega>0$，

且$\begin{cases} k\pi-\frac{\pi}{2}\le \omega\cdot(-\pi), \\ \omega\pi\le k\pi+\frac{\pi}{2}, \\ k\in \mathbf{Z}, \end{cases}$解得$\begin{cases} \omega\le \frac{1}{2}-k, \\ \omega\le \frac{1}{2}+k, \\ k\in \mathbf{Z}, \end{cases}$

所以$\omega\le\frac{1}{2}$，即ω 的最大值是$\frac{1}{2}$.

例11 已知函数$f(x)=A\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，若$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{2}，\pi)$内单调递减，则$\omega$ 的取值范围是(　C　)

A.$\left(0,\frac{1}{6}\right)$　　B.$(\frac{1}{3}，\frac{7}{6})$　　C.$(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{7}{6}]$　　D.$\left(0,\frac{1}{6}\right)\cup(\frac{1}{3}，\frac{7}{6})$

【解析】

给什么 得什么	由函数 $f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内单调递减,得 $A<0$,故可知 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$内单调递增.
求什么 想什么	要想求ω的取值范围,我们就要想办法去构建关于ω的表达式或不等式,那么落脚点肯定是在如何运用上述所得结论"$y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$内单调递增"上.
差什么 找什么	由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\omega x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得$\frac{k\pi}{\omega}-\frac{5\pi}{6\omega}<x<\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{6\omega}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$的单调递增区间为$(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{5\pi}{6\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{6\omega})$,$k\in\mathbf{Z}$. 由 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$内单调递增,可得$(\frac{\pi}{2},\pi)\subseteq(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{5\pi}{6\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{6\omega})$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{5\pi}{6\omega}\le\frac{\pi}{2},\\ \pi\le\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{6\omega},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $2k-\frac{5}{3}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{1}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$. 由 $2k-\frac{5}{3}\leqslant k+\frac{1}{6}$,得 $k\leqslant\frac{11}{6}$, 由 $0<\omega\leqslant k+\frac{1}{6}$,得 $k>-\frac{1}{6}$, 所以$-\frac{1}{6}<k\leqslant\frac{11}{6}$且 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=0$ 或 $k=1$. 当 $k=0$ 时,$0<\omega\leqslant\frac{1}{6}$; 当 $k=1$ 时,$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$. 综上所述,$\omega\in(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{7}{6}]$.

例12 [教材改编P213练习T5] 比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\tan\frac{15\pi}{4}$与$\tan\frac{19\pi}{5}$;

【答案】因为$\tan\frac{15\pi}{4}=\tan\frac{3\pi}{4}$，$\tan\frac{19\pi}{5}=\tan\frac{4\pi}{5}$，且$\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{4}<\frac{4\pi}{5}<\pi$,$y=\tan x$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内单调递增，所以$\tan\frac{3\pi}{4}<\tan\frac{4\pi}{5}$,即$\tan\frac{15\pi}{4}<\tan\frac{19\pi}{5}$.

(2) $\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$与$\tan\left(-\frac{16\pi}{5}\right)$.

【答案】因为$\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}$,$\tan\left(-\frac{16\pi}{5}\right)=-\tan\frac{\pi}{5}$,且$0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,$y=\tan x$在$[0,\frac{\pi}{2})$内单调递增，所以$\tan\frac{\pi}{5}>\tan\frac{\pi}{6}$，所以$-\tan\frac{\pi}{5}<-\tan\frac{\pi}{6}$，即$\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)>\tan\left(-\frac{16\pi}{5}\right)$.

【学会了吗|变式题】

2.(2024·山东省聊城市期中)若$\tan 2=a$,$\tan 3=b$,$\tan 5=c$，则(　D　)

A.$a<b<c$　　B.$b<c<a$　　C.$c<b<a$　　D.$c<a<b$

例13 若$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$,求函数$y=\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1$的最值及相应的$x$的值.

【解析】 $y=\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\tan x+1=\tan^2 x+2\tan x+2=(\tan x+1)^2+1$.（【巧转化】将函数化为关于$\tan x$的二次函数）

$\because x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$,$\therefore \tan x\in[-\sqrt{3},1]$，

$\therefore$ 当$\tan x=-1$，即$x=-\frac{\pi}{4}$时，y取得最小值，为1；

当$\tan x=1$，即$x=\frac{\pi}{4}$时,y取得最大值，为5.

题型3 周期性与对称性

例14 [教材改编P213 T8] 函数$f(x)=\tan\left(-4x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为(A)

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{2}$　　C.π　　D.2π

【解析】 函数$f(x)=\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$，直接利用公式,可得

$T=\frac{\pi}{|-4|}=\frac{\pi}{4}$.