

高考前数学知识点总结

一. 备考内容:

知识点总结

二. 复习过程:

高考临近, 对以下问题你是否有清楚的认识?

1. 对于集合, 一定要抓住集合的代表元素, 及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如: 集合 $A = \{x|y = \lg x\}$, $B = \{y|y = \lg x\}$, $C = \{(x,y)|y = \lg x\}$, A 、 B 、 C 中元素各表示什么?

2. 进行集合的交、并、补运算时, 不要忘记集合本身和空集 $\emptyset$ 的特殊情况。

注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集, 是一切非空集合的真子集。

3. 注意下列性质:

(1) 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是 2^n ;

(2) 若 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$, $A \cap B = B$;

- (3) 德摩根定律:

$$C_U(A \cap B) = (C_U A) \cap (C_U B), C_U(A \cup B) = (C_U A) \cup (C_U B)$$

4. 你会用补集思想解决问题吗? (排除法、间接法)

5. 可以判断真假的语句叫做命题, 逻辑连接词有“或” ($\vee$), “且” ($\wedge$) 和“非” ($\neg$).

若 $p \wedge q$ 为真, 当且仅当 p 、 q 均为真

若 $p \vee q$ 为真, 当且仅当 p 、 q 至少有一个为真

若 $\neg p$ 为真, 当且仅当 p 为假

6. 命题的四种形式及其相互关系是什么?

(互为逆否关系的命题是等价命题。)

原命题与逆否命题同真、同假; 逆命题与否命题同真同假。

7. 对映射的概念了解吗? 映射 $f: A \rightarrow B$, 是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性, 哪几种对应能构成映射?

(一对一, 多对一, 允许 B 中有元素无原象。)

8. 函数的三要素是什么? 如何比较两个函数是否相同?

(定义域、对应法则、值域)

9. 求函数的定义域有哪些常见类型?

10. 如何求复合函数的定义域?

如: 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, $b > -a > 0$, 则函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是_____。

(答: $[a, -a]$)

11. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时, 注明函数的定义域了吗?

12. 反函数存在的条件是什么?

(一一对应函数)

求反函数的步骤掌握了吗?

(①反解 x ; ②互换 x 、 y ; ③注明定义域)

13. 反函数的性质有哪些?

①互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称;

②保存了原来函数的单调性、奇偶性;

③ 设 $y = f(x)$ 的定义域为 A , 值域为 C , $a \in A$, $b \in C$, 则 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

$$\therefore f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a, f[f^{-1}(b)] = f(a) = b$$

14. 如何用定义证明函数的单调性?

(取值、作差、判正负)

如何判断复合函数的单调性?

$$(y = f(u), u = \varphi(x), \text{ 则 } y = f[\varphi(x)])$$

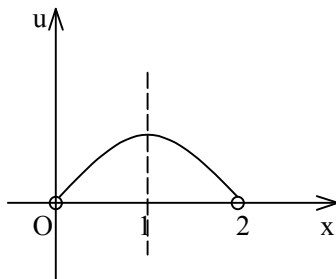
(外层) (内层)

当内、外层函数单调性相同时 $f[\varphi(x)]$ 为增函数, 否则 $f[\varphi(x)]$ 为减函数。)

如: 求 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x)$ 的单调区间

(设 $u = -x^2 + 2x$, 由 $u > 0$ 则 $0 < x < 2$)

且 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $u = -(x-1)^2 + 1$, 如图:



当 $x \in (0, 1]$ 时, $u \uparrow$, 又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $\therefore y \downarrow$

当 $x \in [1, 2)$ 时, $u \downarrow$, 又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $\therefore y \uparrow$

$\therefore \dots\dots$)

15. 如何利用导数判断函数的单调性?

在区间 (a, b) 内, 若总有 $f'(x) \geq 0$ 则 $f(x)$ 为增函数。(在个别点上导数等于零, 不影响函数的单调性), 反之也对, 若 $f'(x) \leq 0$ 呢?

如: 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数, 则 a 的最大值是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

$$(\text{令 } f'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geq 0)$$

$$\text{则 } x \leq -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ 或 } x \geq \sqrt{\frac{a}{3}}$$

由已知 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 则 $\sqrt{\frac{a}{3}} \leq 1$, 即 $a \leq 3$

$\therefore a$ 的最大值为 3)

16. 函数 $f(x)$ 具有奇偶性的必要 (非充分) 条件是什么?

($f(x)$ 定义域关于原点对称)

若 $f(-x) = -f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点对称

若 $f(-x) = f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于y轴对称

注意如下结论：

(1) 在公共定义域内：两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；一个偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数且定义域中有原点，则 $f(0) = 0$ 。

17. 你熟悉周期函数的定义吗？

(若存在实数 T ($T \neq 0$)，在定义域内总有 $f(x+T) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 为周期函数， T 是一个周期。)

如：若 $f(x+a) = -f(x)$ ，则_____

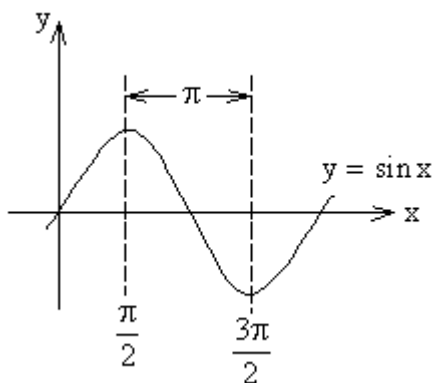
(答： $f(x)$ 是周期函数， $T = 2a$ 为 $f(x)$ 的一个周期)

又如：若 $f(x)$ 图象有两条对称轴 $x = a$ ， $x = b$ ($\Leftrightarrow$)

即 $f(a+x) = f(a-x)$ ， $f(b+x) = f(b-x)$

则 $f(x)$ 是周期函数， $2|a-b|$ 为一个周期

如：



18. 你掌握常用的图象变换了吗？

$f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 y轴 对称

$f(x)$ 与 $-f(x)$ 的图象关于 x轴 对称

$f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图象关于 原点 对称

$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于 直线 $y = x$ 对称

$f(x)$ 与 $f(2a-x)$ 的图象关于 直线 $x = a$ 对称

$f(x)$ 与 $-f(2a-x)$ 的图象关于 点 $(a, 0)$ 对称

将 $y = f(x)$ 图象 $\xrightarrow{\text{左移}a(a>0)\text{个单位}}$ $y = f(x+a)$
 $\xrightarrow{\text{右移}a(a>0)\text{个单位}}$ $y = f(x-a)$

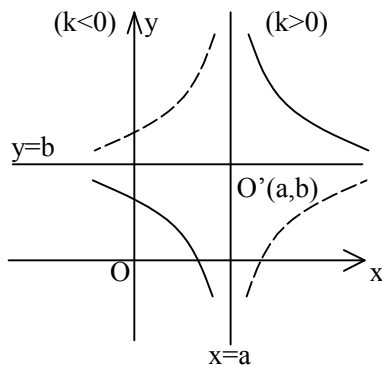
$\xrightarrow{\text{上移}b(b>0)\text{个单位}}$ $y = f(x+a) + b$
 $\xrightarrow{\text{下移}b(b>0)\text{个单位}}$ $y = f(x+a) - b$

注意如下“翻折”变换：

$f(x) \longrightarrow |f(x)|$

$f(x) \longrightarrow f(|x|)$

19. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗?



(1) 一次函数: $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

(2) 反比例函数: $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 推广为 $y = b + \frac{k}{x-a}$ ($k \neq 0$) 是中心 $O'(a, b)$ 的双曲线。

(3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 图象为抛物线
 顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, 对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$

开口方向: $a > 0$, 向上, 函数 $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$a < 0$, 向下, $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

应用: ① “三个二次” (二次函数、二次方程、二次不等式) 的关系——二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta > 0$ 时, 两根 x_1 、 x_2 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的两个交点, 也是二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0) 解集的端点值。

② 求闭区间 $[m, n]$ 上的最值。

③ 求区间定 (动), 对称轴动 (定) 的最值问题。

④ 一元二次方程根的分布问题。

(4) 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

(5) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

由图象记性质! (注意底数的限定!)

