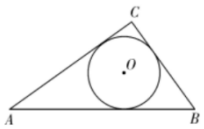
专项 23　三角形的内心与外心

【解题思路】

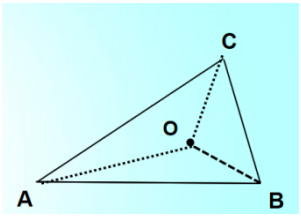
考点 1 三角形的内心

（1）三角形的内切圆：在三角形内部且与三角形三边都相切的圆；

（2）三角形的内心：三角形内切圆的圆心，实质是三角形的三个内角平分线交点；



【解题技巧】

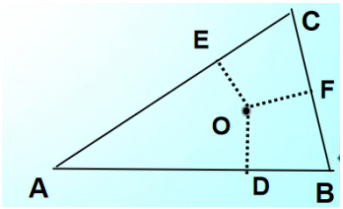


（3）见到三角形的内心就想以下两点：

①角平分线：内心与顶点的连线必然平分三角形的内角.

如图，点 O 为△ABC 的内心，连接 AO、BO、CO，

必有 AO 平分∠CAB，BO 平分∠ABC，CO 平分∠ACB



②等距：内心到三角形三边的距离必定相等.

如图，点 O 为△ABC 的内心，过点 O 作三边的垂线，

必有 OD=OE=OF.

注意：内切圆及有关计算。

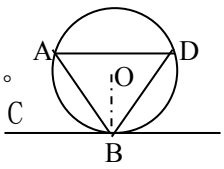
（1）三角形内切圆的圆心是三个内**角平分线**的交点，它到三边的距离相等。

（2）△ABC 中，∠C=90°，AC=b，BC=a，AB=c，则内切圆的半径 r=$\frac{a+b-c}{2}$。

（3）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$，其中 a，b，c 是边长，r 是内切圆的半径。

（4）弦切角：角的顶点在圆周上，角的一边是圆的切线，另一边是圆的弦。

如图，BC 切⊙O 于点 B，AB 为弦，∠ABC 叫弦切角，∠ABC=∠D。



考点 2　三角形的外心

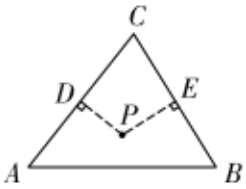
（1）三角形的外接圆：经过三角形的三个顶点可以作一个圆，

这个圆叫作三角形的外接圆；

（2）三角形的外心：三角形外接圆的圆心，实质是三角形的 三条边的垂直平分线交点；

【解题技巧】

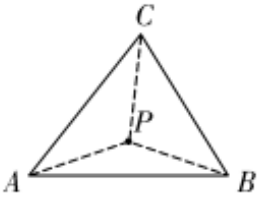
（3）见到三角形的外心就想以下两点：



①垂直平分线：外心到三角形三边的垂线必然平分三条边.

如图，点 P 为△ABC 的外心，若 PD⊥AC，PE⊥BC，

必有 AD=CD，BE=CE.



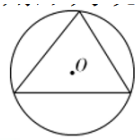
②等距：外心到三角形三个顶点的距离必然相等.

如图，点 P 为△ABC 的外心，连接 PA、PB、PC，

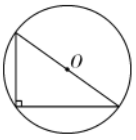
必有 PA=PB=PC.

（4）与三角形外心有关的角度问题：

①外心在三角形的内部 ⟺ 三角形为锐角三角形 ⟺ 三个角都小于 90°



②外心在三角形的边上 ⟺ 三角形为直角三角形 ⟺ 有一个角为 90°；



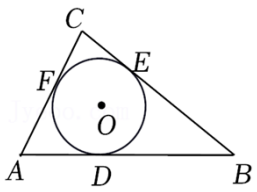
③外心在三角形的外部 ⟺ 三角形为钝角三角形 ⟺ 有一个角大于 90°.



【典例分析】

【考点 1　三角形的内心】

【典例 1】（2022•河池模拟）如图，△ABC 的内切圆⊙O 与 AB，BC，CA 分别相切于点 D，E，F，AB＝14，BC＝13，CA＝9，则 AD 的长是（　　）



A．3.5　　B．4　　C．4.5　　D．5

【答案】D

【解答】解：设 $AD=x$，

∵△ABC 的内切圆⊙O 与 AB，BC，CA 分别相切于点 D，E，F，

∴$AF=AD$，$CE=CF$，$BD=BE$，

∵AB＝14，BC＝13，CA＝9，

∴$BD=BE=14-x$，$CF=CE=9-x$，

∵$CE+BE=BC=13$，

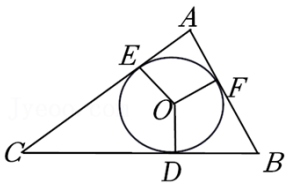
∴$9-x+14-x=13$，

∴$x=5$，

∴$AD=5$．

故选：D．

【变式 1-1】（2022•五华区校级三模）如图，△ABC 的内切圆⊙O 与 BC，CA，AB 分别相切于点 D，E，F．已知△ABC 的周长为 36，AB＝9，BC＝14，则 AF 的长为（　　）



A．4　　B．5　　C．9　　D．13

【答案】A

【解答】解：设 $AF=a$，

∵△ABC 的周长为 36，AB＝9，BC＝14，

∴AC＝13，

∵△ABC 的内切圆⊙O 与 BC，CA，AB 分别相切于点 D，E，F，

∴AF＝AE，CE＝CD，BF＝BD，

∵AB＝9，BC＝14，CA＝13，

∴BD＝BF＝9﹣a，CD＝CE＝13﹣a，

∵BD+CD＝BC＝14，

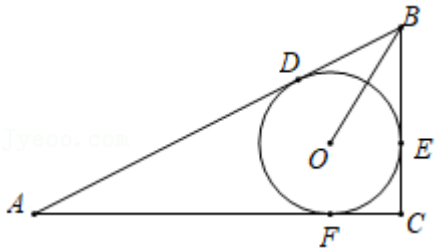
∴（9﹣a）+（13﹣a）＝14，

解得：a＝4，

即 AF＝4．

故选：A．

【典例 2】（2019 秋•江岸区校级月考）如图，△ABC 中，∠ACB＝90°，⊙O 为△ABC 的内切圆，切点分别为 D、E、F．若 AD＝10，BC＝5，则 OB 的长为（　　）



A．4　　B．$\sqrt{7}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．$3\sqrt{3}$

【答案】C

【解答】解：连接 OE、OF，如图所示：

∵⊙O 为△ABC 的内切圆，切点分别为 D、E、F，

∴AD＝AF＝10，BD＝BE，CE＝CF，OE⊥BC，OF⊥AC，

∵∠ACB＝90°，

∴四边形 $OECF$ 是正方形，

∴OE＝CE＝CF，

设 BD＝BE＝x，则 OE＝CF＝CE＝5﹣x．AC＝AF+CF＝10+5﹣x＝15﹣x，

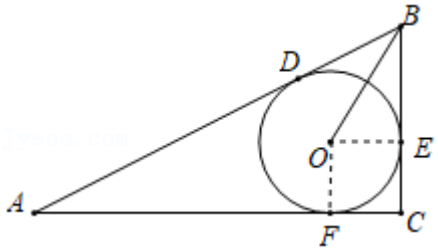
在 Rt△ABC 中，由勾股定理得：5^2+（15﹣x）^{2}＝（10+x）^{2}，

解得：x＝3，

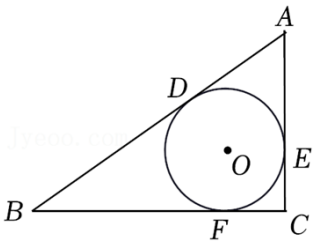
∴BE＝3，OE＝2，

∴$OB=\sqrt{OE^2+BE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$；

故选：C.

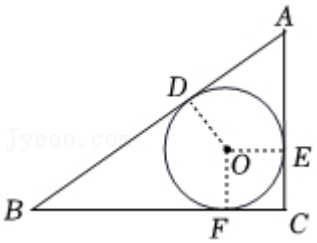


【变式 2-1】（2021 秋•南丹县期末）如图，△ABC 的内切圆⊙O 分别与 AB，AC，BC 相切于点 D，E，F．若∠C=90°，AC=6，BC=8，则⊙O 的半径等于 ____.



【答案】2

【解答】解：如图，连结 OD，OE，OF，设⊙O 半径为 r，



∵∠C=90°，AC=6，BC=8，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

∵△ABC 的内切圆⊙O 与 AB，BC，AC 分别相切于点 D，F，E，

∴$AC\perp OE$，$AB\perp OD$，$BC\perp OE$，且 $OF=OD=OE=r$，

∴四边形 $OECF$ 是正方形，

∴$CF=CE=OF=r$，

∴$AE=AE=AC-CE=6-r$，$BF=BD=BC-CF=8-r$，

∵$AD+BD=AB=10$，

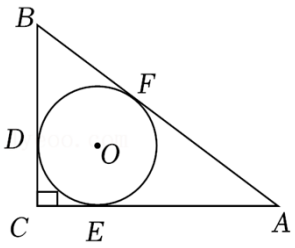
∴$6-r+8-r=10$，

∴$r=2$.

∴⊙O 的半径等于 2.

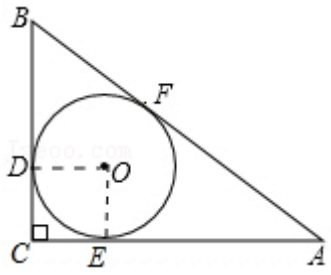
故答案为：2.

【变式 2-2】（2021 秋•南开区期末）图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，⊙O 是△ABC 的内切圆，三个切点分别为 D、E、F，若 BF=2，AF=3，则△ABC 的面积是 ____.



【答案】6

【解答】解：连接 DO，EO，



∵⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 D，E，F，

∴OE⊥AC，OD⊥BC，CD=CE，BD=BF=2，AF=AE=3，

又∵∠C=90°，

∴四边形 $OECD$ 是矩形，

又∵EO=DO，

∴矩形 $OECD$ 是正方形，

设 EO=x，

则 EC=CD=x，

在 Rt△ABC 中

$BC^2+AC^2=AB^2$，

故（x+2）^{2}+（x+3）^{2}=5^2，

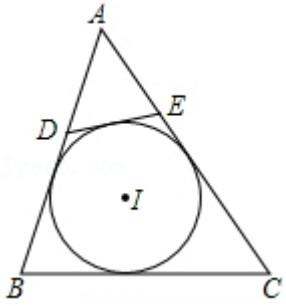
解得：x=1，

∴BC=3，AC=4，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，

故答案为：6.

【典例 3】（2019 秋•岳麓区校级月考）如图为△*ABC* 的内切圆，点 *D*，*E* 分别为边 *AB*，*AC* 上的点，且 *DE* 为⊙*I* 的切线分别交 *AB*、*AC* 于 *D*、*E* 两点，若△*ABC* 的周长与△*ADE* 的周长的差等于 12，则 *BC* 的长为（　　）



A．12　　B．10　　C．8　　D．6

【答案】D

【解答】解：如图，设⊙*I* 与 *DE* 的切点为点 *M*，⊙*I* 与△*ABC* 三边的切点分别为 *N*、*G*、*H*，

∵⊙*I* 为△*ABC* 的内切圆，

∴*DM*＝*DN*，*EM*＝*EH*，*BN*＝*BG*，*CH*＝*CG*，

∵△*ABC* 的周长与△*ADE* 的周长的差等于 12，

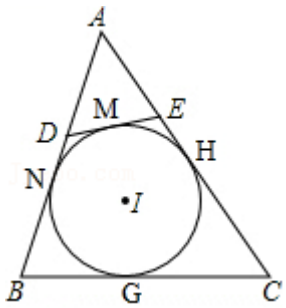
∴*AB*+*AC*+*BC* -（*AD*+*DE*+*AE*）＝12，

即 *AD*+*DN*+*BN*+*AE*+*EH*+*CH*+*BC* -（*AD*+*DM*+*EM*+*AE*）＝12，

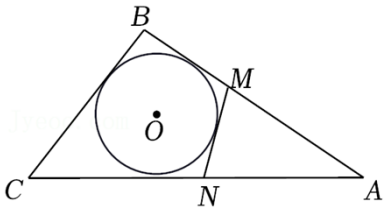
∴2*BC*＝12，

∴*BC*＝6；

故选：*D*.



【变式 3-1】（2021 秋•陵城区期末）如图，△*ABC* 周长为 20*cm*，*BC*＝6*cm*，圆 *O* 是△*ABC* 的内切圆，圆 *O* 的切线 *MN* 与 *AB*、*CA* 相交于点 *M*、*N*，则△*AMN* 的周长为（　　）



A．14*cm*　　B．8*cm*　　C．7*cm*　　D．9*cm*

【答案】B

【解答】解：∵圆 *O* 是△*ABC* 的内切圆，圆 *O* 的切线 *MN* 与 *AB*、*CA* 相交于点 *M*、*N*，

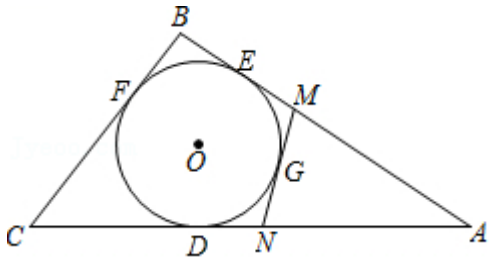
∴*BF*＝*BE*，*CF*＝*CD*，*DN*＝*NG*，*EM*＝*GM*，*AD*＝*AE*，

∵△*ABC* 周长为 20*cm*，*BC*＝6*cm*，

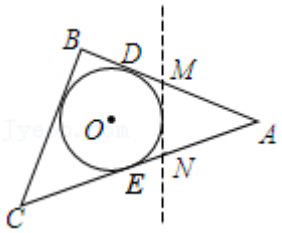
∴$AE=AD=\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{20-BC-BC}{2}=\frac{20-12}{2}=4$（*cm*），

∴△*AMN* 的周长为 *AM*+*MG*+*NG*+*AN*＝*AM*+*ME*+*AN*+*ND*＝*AE*+*AD*＝4+4＝8（*cm*），

故选：*B*.



【变式 3-2】（2022 春•西乡塘区校级期末）如图，△*ABC* 是一张周长为 17*cm* 的三角形的纸片，*BC*＝5*cm*，⊙*O* 是它的内切圆，小明准备用剪刀在⊙*O* 的右侧沿着与⊙*O* 相切的任意一条直线 *MN* 剪下△*AMN*，则剪下的三角形的周长为 _____.



【答案】7*cm*

【解答】解：设 *E*、*F* 分别是⊙*O* 的切点，

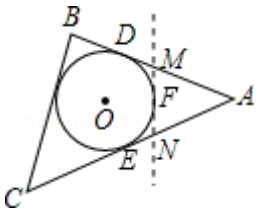
∵△*ABC* 是一张三角形的纸片，*AB*+*BC*+*AC*＝17*cm*，⊙*O* 是它的内切圆，点 *D* 是其中的一个切点，*BC*＝5*cm*，

∴*BD*+*CE*＝*BC*＝5*cm*，则 *AD*+*AE*＝7*cm*，

故 *DM*＝*MF*，*FN*＝*EN*，*AD*＝*AE*，

∴$AM+AN+MN=AD+AE=7$（cm）．

故答案为：$7cm$．



【典例 4】（2022•黄石模拟）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有下列问题“今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何？”其意思是：“今有直角三角形，勾（短直角边）长为 8 步，股（长直角边）长为 15 步，问该直角三角形能容纳的圆形（内切圆）直径是____步．

【答案】6

【解答】解：

设三角形为△ABC，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=15$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$，

设内切圆的半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$（$AB+BC+CA$）•$r$，

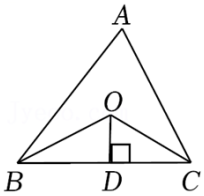
∴$\frac{1}{2}AC•BC=\frac{1}{2}$（$AB+BC+CA$）•$r$，即$\frac{1}{2}\times8\times15=\frac{1}{2}\times$（$8+15+17$）•$r$，

解得 $r=3$，

∴内切圆的直径是 6 步，

故答案为：6．

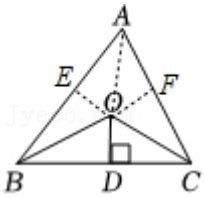
【变式 6】（2022•石家庄模拟）如图，已知△ABC 的周长是 20，点 O 为三角形内心，连接 OB、OC，$OD\perp BC$ 于点 D，且 $OD=3$，则△ABC 的面积是（　　）



A．20　　B．25　　C．30　　D．35

【答案】C

【解答】解：如图，连接 OA，过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，$OF\perp AC$ 于点 F，



∵点 O 为三角形内心，$OD\perp BC$，

∴$OD=OE=OF=3$，

∴$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$

$=\frac{1}{2}\times AB\cdot OE+\frac{1}{2}\times AC\cdot OF+\frac{1}{2}\times BC\cdot OD$

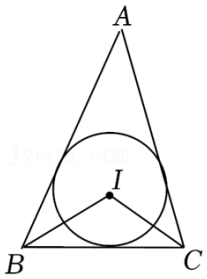
$=\frac{1}{2}\times OD(AB+AC+BC)$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 20$

$=30$.

故选：C.

【典例 7】（2022•海曙区校级开学）如图所示，已知⊙I 是△ABC 的内切圆，点 I 是内心，若∠$A=28°$，则∠BIC 等于（　　）



A．100°　　B．104°　　C．105°　　D．114°

【答案】B

【解答】解：∵$\angle A=28°$，

∴$\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=152°$，

∵⊙I 是△ABC 的内切圆，点 I 是内心，

∴BI 平分∠ABC，CI 平分∠ACB，

∴$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∴$\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=76°$，

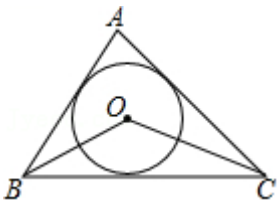
∴∠BIC=180°﹣（∠IBC+∠ICB）

=180°﹣76°

=104°，

故选：B.

【变式 7-1】（2021 秋•大余县期末）如图，⊙O 是△ABC 的内切圆，若∠A=70°，则∠BOC=（　　）



A．125°　　B．115°　　C．100°　　D．130°

【答案】A

【解答】解：∵⊙O 是△ABC 的内切圆，

∴OB 平分∠ABC，OC 平分∠ACB，

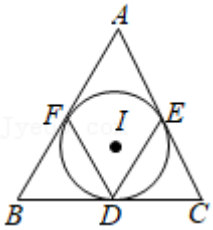
∴$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∴$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$，

∴$\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A=180°+\frac{1}{2}\times 70°=125°$.

故选：A.

【变式 7-2】（2020 秋•曲靖期末）如图，△ABC 中，内切圆 I 和边 BC、AC、AB 分别相切于点 D、E、F，若∠B=65°，∠C=75°，则∠EDF 的度数是（　　）



A．65°　　B．140°　　C．55°　　D．70°

【答案】D

【解答】解：连接 IE、IF，如图，

∵内切圆 I 和边 AC、AB 分别相切于点 E、F，

∴$OE\perp AC$，$OF\perp AB$，

∴$\angle AEI=\angle AFI=90°$，

∴$\angle A=180°-\angle EIF$，

∵$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle EIF$，

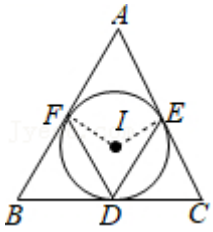
∴$\angle EDF=90°-\frac{1}{2}\angle A$，

∵$\angle B=65°$，$\angle C=75°$，

∴$\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-65°-75°=40°$，

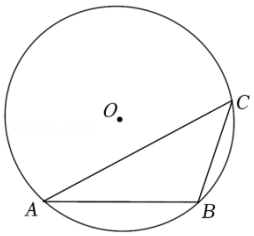
∴$\angle EDF=90°-\frac{1}{2}\times 40°=70°$．

故选：D．



【考点 2　三角形的外心】

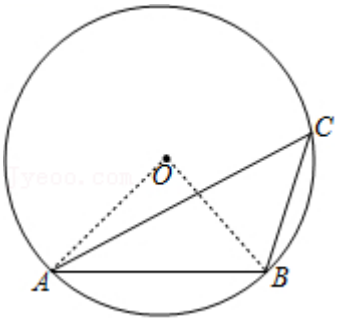
【典例 8】（2022•沈阳模拟）如图，$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，$\angle C=45°$，$AB=6$，则$\odot O$ 的半径长为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

【答案】C

【解答】解：如图，连接 OA，OB，



∵∠ACB=45°，

∴∠AOB=2∠ACB=90°，

∵OA=OB，

∴△AOB 是等腰直角三角形，

在 Rt△OAB 中，$OA^2+OB^2=AB^2$，AB=6，

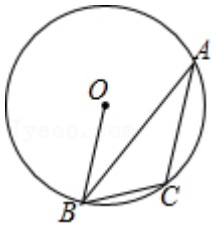
∴$2OA^2$=36，

∴$OA=3\sqrt{2}$，

即⊙O 的半径是 $3\sqrt{2}$，

故选：C.

【变式 8-1】（2022•东营模拟）如图，△ABC 内接于⊙O，若∠A=α，AB 为∠OBC 的角平分线，则∠BCA 等于（　　）



A．$180°-\frac{1}{2}\alpha$　　B．$90°+\frac{1}{2}\alpha$　　C．$135°-\frac{1}{2}\alpha$　　D．$135°+\frac{1}{2}\alpha$

【答案】C

【解答】解：连接 OC，

∵∠A=α，

∴∠O=2∠A=2α，

∵OB=OC，

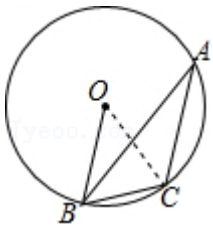
∴$\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180°-\angle O)=90°-\alpha$，

∵AB 为∠OBC 的角平分线，

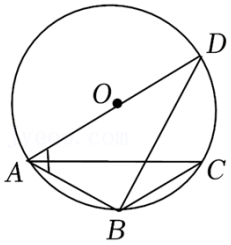
∴$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle OBC=45°-\frac{1}{2}\alpha$，

∴$\angle ACB=180°-\angle A-\angle ABC=180°-\alpha-(45°-\frac{1}{2}\alpha)=135°-\frac{1}{2}\alpha$，

故选：C.



【变式 8-2】（2022•瓜州县校级模拟）如图，△*ABC* 内接于⊙*O*，∠*ABC*＝110°．*AB*＝*BC*，*AD* 是⊙*O* 的直径．则∠*DAB* 的度数是（　　）



A．35°　　B．55°　　C．65°　　D．70°

【答案】B

【解答】解：∵*AB*＝*BC*，∠*ABC*＝110°，

∴∠*C*＝35°，

∴∠*D*＝∠*C*＝35°，

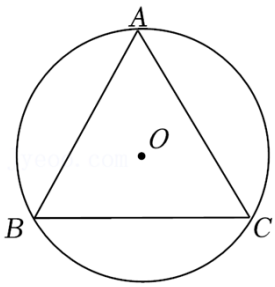
∵*AD* 为⊙*O* 的直径，

∴∠*ABD*＝90°，

∴∠*DAB*＝90°﹣∠*D*＝90°﹣35°＝55°．

故选：*B*．

【典例 9】（2022•邵阳）如图，⊙*O* 是等边△*ABC* 的外接圆，若 *AB*＝3，则⊙*O* 的半径是（　　）



A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】C

【解答】解：连接 *OB*，过点 *O* 作 *OE*⊥*BC*，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/507054112104006144