# 目 录

## 图表目录

# 1 研究背景

在《量化因子掘金系列（四）构建复合选股因子》中，我们提出了一个选股复合因子。该因子融合了个股量价和基本面的信息，其在周度调仓的年化收益率为 16.1%，夏普 0.68，日胜率 58.2%，盈亏比为 1.21，最大回撤 42%，低于基准指数，IC0.115 和 IR0.708。超额收益较稳定，且在中证 500 和沪深 300 指数中的选股效果持续显著。

构建指增组合的核心在于，在满足产品要求和投资者投资目标的条件下，调整组合中个股的持仓比例。在不同的条件下计算理想的调仓比例，实际是 一种最优化求解的问题，其优化目标会根据不同的应用场景而变化。而这个 求解的过程，需要构建组合优化器。组合优化器的建立方式有多样，本研究 提出一种泛用性强、开发和维护难度低、适应性强的组合优化器，并应用该 优化器及前述的复合因子，构建指数增强策略。

指数增强产品旨在通过主动管理策略在跟踪指数的基础上获取超越指 数表现的收益，这对于投资者而言是重要的吸引力。指增产品结合了被动投资和主动投资的特点，可能的收益来源包含跟踪指数带来的被动收益和个股选择、权重调整、择时等主动管理带来的超额收益。指增产品为投资者提供了一种更高效、更便捷的投资工具，正日益受到市场的关注和认可。

图 1、基金和指增基金的累计发行数目[1]

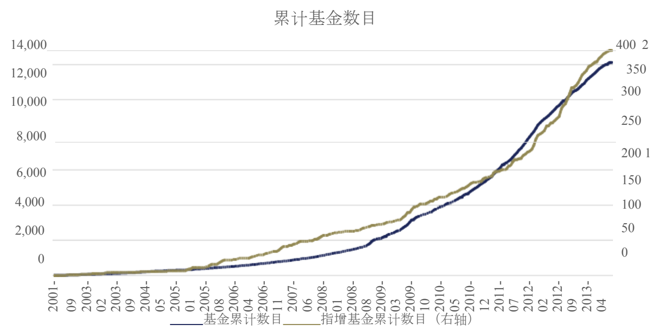
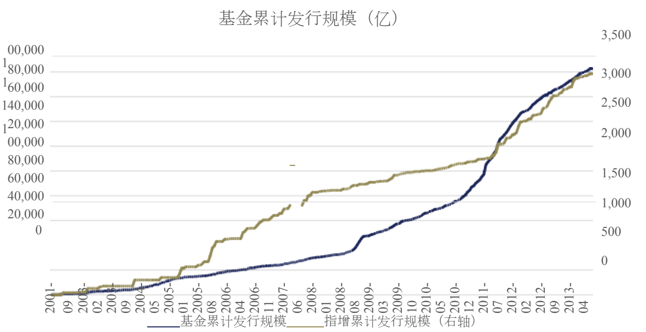



图 2、基金和指增基金的累计发行规模




来源：iFinD、江海证券研究发展部

[1] 不完全统计，仅包含仍在运作中的基金，且只考虑上市日期明确的基金。指增基金以其名字带有“增强”二字识别。ABC 类基金只计算一次。统计时间范围自 2001 年 9 月 1 日至 2024 年 11 月 14 日。

据不完全统计，指增产品的发行增速与基金发行增速大致同步，而在2008-2020年，其发行规模增速明显超越了全市场基金发行规模增速。随着居民财富管理需求的增长，产品线更加丰富，管理更加成熟，市场对指增产品的关注度逐年累增。对指增产品的研究是金融工程领域中一个重要而富有意义的课题，推出什么类型的指增产品和怎样更有效地管理指增产品是资管机构的持续关注点。

# 2 构建组合优化器

## 2.1 组合优化器

组合优化的历史可以追溯到20世纪50年代，当时美国经济学家哈里马科维茨首次提出了现代投资组合理论（Modern Portfolio Theory, MPT）[2]。他对均值-方差分析方法和投资组合有效边界模型进行了开创性的研究，为后续的组合优化奠定了理论基础。

广义上，组合优化涵盖从预测信号到执行交易的整个过程中的所有工程细节。狭义上，特指在股票市场中，根据上游提供的预测信号和条件限制，确定某一时刻的期望仓位，即将收益预测转化为持仓权重的过程。

组合优化通过数学方法寻找离散事件（例如股票交易中的买卖订单）的最优编排、分组、排序或筛选。目前主流的组合优化算法主要包括四大类：数学优化算法、启发式算法、元启发式算法和机器学习方法。本文中，我们主要采用数学优化算法来进行研究。

构建投资组合通常分为两个主要步骤：确定拟配置的投资标的、确定这些标的仓位权重。注意到，合理的组合存在但不必唯一，投资组合本身或许存在全局唯一最优解，但我们通常寻求的是在特定条件下的、综合考量的最优解。

在量化研究中，组合优化用于考虑约束条件下求解目标函数的最值，产生具体的权重比例。比如正优化量的最大化，如最大化收益；负优化量的最小化，比如最小化最大回撤。在优化器的设置上，需要首先明确优化目标和

[2] **Portfolio Selection,** Harry Markowitz, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91

约束，然后动态地、循环往复地反馈调整。

## 1.1 优化目标

优化目标需要贴合具体的场景。常见的优化目标有：最小化组合风险、最大化组合收益、最大化夏普比率、最小化跟踪误差、风险平价、最大化/最小化因子值、最大/最小化 z 分数、最大化 IR 值等。借助 Python 中 scipy.optimize 框架，可以分别对目标函数和约束进行模块化处理，灵活地应对不同的优化需求。

本研究专注于指增策略，则优化目标是在满足跟踪误差等条件下的最大化组合（绝对）收益。鉴于《系列（四）》中构建的因子单调性强，因此在该场景下，最大化组合收益实际上等同于最大化组合因子值，亦即最大化组合的 IC 值。此外，本研究设定的优化目标是从投资者的持有体验出发的。虽然最大化夏普比率确实可以增强风险调整后性能，但可能导致绝对收益下降。考虑到购买指增产品的客户通常不会对指增产品应用杠杆，因此我们以绝对收益最大化作为优化目标。

### 1.1.1 最小化组合风险

这是经典的均值-方差优化问题，由马科维茨在现代投资组合理论中提出。该问题的目标是找到一个投资组合权重向量 w，使得在给定预期收益条件下的投资组合风险最小化。在这里，“风险”通常是指投资组合的方差，它可以通过协方差矩阵来描述资产之间的相关性。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

预测收益率序列： $\hat{R} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \ldots, \hat{r}_n)$

收益率协方差矩阵： $\Sigma_{\hat{R}} = Cov(\hat{R})$

目标函数： $arg\ min\ PortVar(w) = w^T \Sigma_{\hat{R}} w$

在实际应用中，最小化投资组合方差的问题通常需要额外的约束条件，例如权重之和为 1（$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$）和每个权重的非负性（$w_i \geq 0$）等。详见后文在约束部分的介绍。

在某些场景中，如果没有预测的收益率序列，常见做法是用历史一段连续时间的收益率均值作为期望的估计，下同。

### 2.1.1 最大化组合收益

最大化组合（绝对）收益，指实现组合的最大预期收益。求解过程如下：

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

预测收益率序列： $\hat{R} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \ldots, \hat{r}_n)$

目标函数： $arg\ max\ PortReturn(w) = w \cdot \hat{R}$

预测收益率序列可以通过多种方法获得，如基于历史数据的统计分析、市场预测模型、或通过因子值的线性回归获得。在某些约束条件下，并不是预测收益率最高的标的就能分配最高的权重，因此仍然需要进行优化目标求解。

### 2.1.2 最大化夏普比率

最大化夏普比率即最大化风险调整后收益，核心目标是在给定风险水平下最大化投资组合的预期收益，或在给定预期收益水平下最小化投资组合的风险。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

预测收益率序列： $\hat{R} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \ldots, \hat{r}_n)$

收益率协方差矩阵： $\Sigma_{\hat{R}} = Cov(\hat{R})$

目标函数： $arg\ max\ Sharpe(w) = \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma_{\hat{R}} w}}$

$r_f$为无风险利率，如无特别说明，本研究取值年化 3%。注意到，最大化夏普比率并不总是等同于最大化绝对收益，因为夏普比率考虑了风险因素。

### 2.1.3 最小化跟踪误差

最小化组合的跟踪误差使投资组合的收益尽可能地贴近基准指数的收

益，即最小化两者之间的收益率差异。跟踪误差用投资组合收益与基准指数收益之间差异的标准差来衡量。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$，n 为标的个数

组合收益率序列： $R_t = (r_1, r_2 \ldots, r_n)$，t 为 期 数

基准收益率序列： $R_{b,t}$

目 标 函 数 ： $\arg\min TE(w) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_t \cdot w - R_{b,t})^2}$

实际上，跟踪误差（Tracking Error， TE）会以每日和年化来衡量，年化时把每日的误差乘以一个年化系数，如$\sqrt{242}$即可，但在目标函数中是否年化对权重的求解不影响。

## 2.1.4 风险平价

风险平价使得投资组合中每个资产的风险贡献相等，以实现风险的均衡分配，这种方法旨在避免投资组合过度依赖于某一资产类别的风险，以期在风险平衡的基础上实现理想的投资收益。在实际的组合优化中，由于有约束条件的限制，通常无法使每个资产的风险贡献完全相等。因此，将目标转化为最小化资产间风险贡献的差异，此处用方差以衡量。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

投资组合总体风险: $\sigma(P) = \sqrt{w^T \Sigma_{rp} w}$

标的对组合的风险贡献: $RC_i = w_i \cdot \frac{\partial \sigma(P)}{\partial w_i}$

目标函数： $\arg\min VarRC(w) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(RC_i - \frac{\sigma_P}{n}\right)^2}{n-1}$

这个目标函数旨在最小化每个资产的风险贡献与平均风险贡献之间的 差异，从而实现风险平价。这里的$\frac{\sigma_P}{n}$表示如果风险完全平均分配时，每个资产应有的风险贡献。

### 2.1.5 最大/最小化因子值

如果因子的 IC 值为正，意味着因子值与未来收益正相关，则最大化组合的因子值可以获得最大的预测收益率。反之，如果因子的 IC 值为负，最小化组合的因子值可以获得最大效益。以下以 IC 值为正的因子为例进行说明。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

因子值序列： $F = (f_1, f_2 \ldots, f_n)$

目标函数： $arg\ max\ PortFacVal(w) = w \cdot F$

这种方法特别适用于那些依赖于因子模型进行资产选择和权重分配的 量化投资策略。

### 2.1.6 最大/最小化z 分数

与最大/最小化组合因子值类似，最大/最小化 z 分数也是以组合因子值为基础，使该因子值最大化。不同的是，此处使用 z 分数对因子值进行截面标准化。各标的之间的权重以 z 分数为度量，而不是原始的因子值。这种做法更加平稳标准，而 2.2.6 的方法更激进，进攻性更强。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ n 为标的个数

因子值序列： $F = (f_1, f_2 \ldots, f_n)$

组合因子值的 z 分数序列： $z = \frac{F-\bar{F}}{\sqrt{w^T \Sigma_F w}}$

目标函数： $arg\ max\ PortZ(w) = w \cdot z$

### 2.1.7 最大化IR 值

IR 指信息比率，是 IC 的多周期均值与其标准差之比值，用以评估组合获取稳定阿尔法的能力。IR 兼顾了因子的选股能力(由 IC 代表)和因子选股能力的稳定性(由 IC 的标准方差的倒数代表)。IR 值越大，获取稳定阿尔法的能

力越强。以阿尔法收益为目标的组合，可以应用该优化方法。

求解： $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$，n 为标的个数

IC 值序列： $IC_t = (IC_{t,1}, IC_{t,2} \ldots, IC_{t,n})$， t 为期数

组合的 IR 序列： $IR = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} IC_t}{\sqrt{w^T \Sigma_{IC} w}}$

目标函数： $arg\ max\ PortIR(w) = w \cdot IR$

这种优化方法特别适合于那些以阿尔法收益为目标的组合。尤其是在量化投资策略中，可以帮助投资者在长期内实现更稳定的超额回报。

## 2.2 约束

在组合优化中，约束条件是在权重分配时必须遵守的限制，确保投资组合的构建符合特定的风险管理标准和投资策略要求。 在 Python 的 scipy.optimize.minimize 模块中，这些约束条件通过 constraints 参数来定义。Constraints 通常是一个元组（tuple），其中每个元素是一个字典，代表一个单独的约束条件，字典里面的“type”用于指定约束类型，其中“eq”表示等式约束，默认为 0；“ineq”为不等式约束，默认其大于等于 0。“fun” 可以套用函数，在函数中编写限制条件，也可以在 lambda 后面直接定义。一个约束的写法示例如图 3 所示。

图 3、约束的写法示例

```python
# 定义约束条件，x为权重向量
constraints = (
        # 标的权重之和为1
        {'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1},

        # 组合中属于中证500成分股的股票权重加总至少为80%
        {'type': 'ineq', 'fun':
         lambda x: np.sum([x[i] for i in range(n_stocks) if stock_list[i] in stock_list]) - 0.8},

        # T-1的组合加权收益率和T-1的指数收益率之跟踪误差，小于等于阈值
        {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: te_cons(x, rx, rb)},

        # 权重调整不能超过原权重50%之范围
        {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: per_constraint(x, index_weights)}
    )
```

来源：江海证券研究发展部

以下是常见的约束类型和说明。

线性约束：通用表达为 $b_l \leq A \cdot x \leq b_u$，其中 $A$ 为约束矩阵，$x$ 为决策

变量向量，$b_l$和$b_u$为约束向量。这是最常见的约束类型，包括组合权重的上下限约束，风格暴露约束、行业暴露约束、Barra 暴露约束、成分股占比等。

二次约束：表达式为二次的形式，如$x^T \cdot Q \cdot x \le c$，$Q$为二次项系数矩阵，$c$ 为常数。这类约束通常用于限制组合风险，比如限制组合的方差或标准差。

L1 范数约束：形如$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| < c$的约束为 L1 范数约束，也称为曼哈顿距离或稀疏规则算子（Laaso regularization），比如换手率的约束，因为它可以促进权重向量的稀疏性，从而减少交易频率和成本。

L2 范数约束：形如$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < c$的约束为 L2 范数约束，也称为欧几里得距离或Frobenius 范数，比如跟踪误差的约束，因为它可以限制组合权重与基准指数权重之间的偏离程度。

## 1.1 界限

组合优化中，界限指对优化问题中变量的取值范围进行限制的条件，定义取值的上下限范围，对应minimize 模块中的 bounds 参数。界限的设定对于确保优化结果的可行性和实用性至关重要。比如，个股权重上下限，个股风格暴露上下限，个股 Barra 暴露上下限等。

通过不同的优化目标、约束和界限的交叉组合，可以形成多种优化方法。通常，优化目标在一次优化过程中只能设定一个，而约束和界限则可以多样化组合。应根据实际具体的场景和问题使用贴合的优化方法。

图 4、优化方法图示

| 优化目标 | | 约束 | | 界限 |
|---|---|---|---|---|
| 最小化组合风险 | | 组合权重 | | 个股权重 |
| 最大化组合收益 | | 风格暴露 | | 个股风格 |
| 最大化夏普比率 | | 行业暴露 | | 个股Barra |
| 最小化跟踪误差 | | Barra暴露 | | ... |
| 风险平价 | × | 成分股占比 | × | |
| 最大/最小化因子值 | | 组合风险 | | |
| 最大/最小化z分数 | | 换手率 | | |
| 最大化IR值 | | 跟踪误差 | | |
| ... | | ... | | |

来源：江海证券研究发展部