

2023-2024 学年安徽省定远县民族私立中学高三二诊考试数学试题试卷

考生须知：

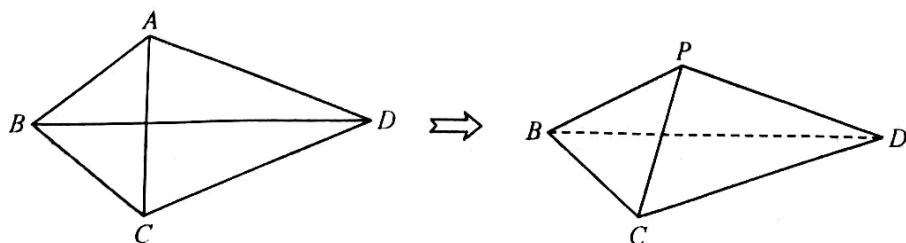
1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个实数 k ，使直线 $y = k(x + 3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交的概率为 ()

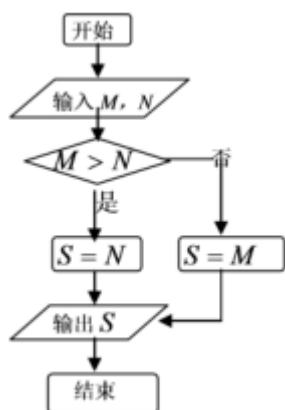
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

2. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，满足 $AB = BC, CD = AD$ ，且 $AB + AD = 10, BD = 8$ ，沿着 BD 把 ABD 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且使 $PC = 2$ ，则三棱锥 $P - BCD$ 体积的最大值为 ()



- A. 12 B. $12\sqrt{2}$ C. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

3. 已知 $M = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ ， $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ，由程序框图输出的 S 为 ()



- A. 1 B. 0 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\ln 2$

4. 已知点 $(m, 8)$ 在幂函数 $f(x) = (m-1)x^n$ 的图象上，设 $a = f\left(\frac{m}{n}\right), b = f(\ln \pi), c = f(n)$ ，则 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

5. 设 $a \in R$, $b > 0$, 则“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 若 $e = p$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm\sqrt{3}x$
B. $y = \pm 2\sqrt{2}x$
C. $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$
D. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

7. 已知 $(2 - mx)(1 - \frac{1}{x})^3$ 的展开式中的常数项为 8, 则实数 $m =$ ()

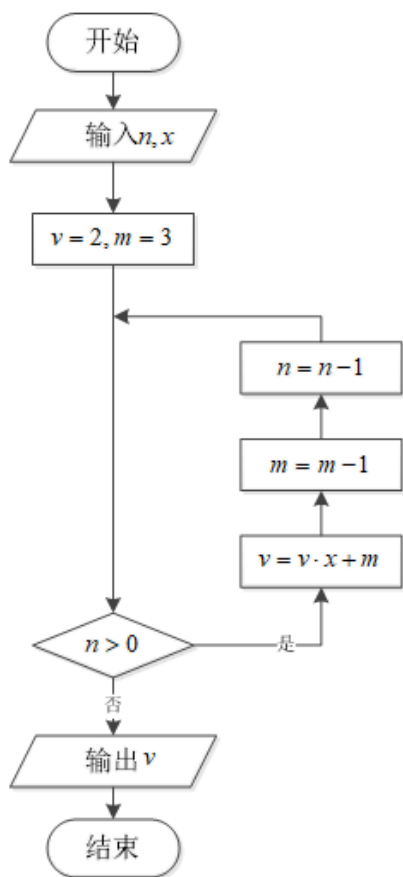
- A. 2
B. -2
C. -3
D. 3

8. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革, 深入推动优化升级和融合发展, 持续提高优质出口产品供给, 实现了行业的良性发展. 下面是 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收增长情况, 则下列说法错误的是 ()



- A. 2012 年至 2016 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
B. 2016 年我国数字出版业营收超过 2012 年我国数字出版业营收的 2 倍
C. 2016 年我国新闻出版业营收超过 2012 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
D. 2016 年我国数字出版营收占新闻出版营收的比例未超过三分之一

9. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州 (现四川省安岳县) 人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例. 若输入 n 、 x 的值分别为 3、1, 则输出 v 的值为 ()



- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

10. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2$, $AD = 5$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 点 M 在边 CD 所在直线上, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ME}$ 的最大值为 ()

- A. $-\frac{71}{4}$ B. -24 C. $-\frac{51}{4}$ D. -30

11. 波罗尼斯 (古希腊数学家, 的公元前 262-190 年) 的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果, 它将圆锥曲线的性质网罗殆尽, 几乎使后人没有插足的余地. 他证明过这样一个命题: 平面内与两定点距离的比为常数 k ($k > 0$, 且 $k \neq 1$) 的点的轨迹是圆, 后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆. 现有椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), A, B 为椭圆的长轴端点, C, D 为椭圆的短轴端点, 动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$, $\triangle MAB$ 面积的最大值为 8, $\triangle MCD$ 面积的最小值为 1, 则椭圆的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知实数 x, y 满足线性约束条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y+1}{x}$ 的取值范围为 ()

- A. $(-2, -1]$ B. $(-1, 4]$ C. $[-2, 4)$ D. $[0, 4]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设 $a \in \mathbb{R}$ ，若函数 $y = e^x + ax, x \in \mathbb{R}$ 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是_____。

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的一条准线与两条渐近线所围成的三角形的面积为_____。

15. 已知 $t > 0$ ，记 $f(t) = \int_0^t (1 - C_8^1 2x + C_8^2 4x^2 - C_8^3 8x^3 + \dots - C_8^7 128x^7 + C_8^8 256x^8) dx$ ，则 $f(t)$ 的展开式中各项系数和为_____。

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，直线 $l: x = 4a$ 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点。

若 $\triangle OAB$ (点 O 为坐标原点) 的面积为 32，且双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$ ，则双曲线 C 的离心率为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某机构组织的家庭教育活动上有一个游戏，每次由一个小孩与其一位家长参与，测试家长对小孩饮食习惯的了解程度。在每一轮游戏中，主持人给出 A, B, C, D 四种食物，要求小孩根据自己的喜爱程度对其排序，然后由家长猜测小孩的排序结果。设小孩对四种食物排除的序号依次为 $x_A x_B x_C x_D$ ，家长猜测的序号依次为 $y_A y_B y_C y_D$ ，其中 $x_A x_B x_C x_D$ 和 $y_A y_B y_C y_D$ 都是 1, 2, 3, 4 四个数字的一种排列。定义随机变量 $X = (x_A - y_A)^2 + (x_B - y_B)^2 + (x_C - y_C)^2 + (x_D - y_D)^2$ ，用 X 来衡量家长对小孩饮食习惯的了解程度。

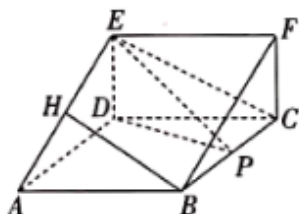
(1) 若参与游戏的家长对小孩的饮食习惯完全不了解。

(i) 求他们在一轮游戏中，对四种食物排出的序号完全不同的概率；

(ii) 求 X 的分布列 (简要说明方法，不用写出详细计算过程)；

(2) 若有一组小孩和家长进行来三轮游戏，三轮的结果都满足 $X < 4$ ，请判断这位家长对小孩饮食习惯是否了解，说明理由。

18. (12 分) 如图，在三棱柱 $ADE - BCF$ 中， $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $CDEF$ 是矩形， $ED = 1$ ，且平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， P 点在线段 BC 上移动 (P 不与 C 重合)， H 是 AE 的中点。



(1) 当四面体 $EDPC$ 的外接球的表面积为 5π 时，证明： $HB \parallel$ 平面 EDP

(2) 当四面体 $EDPC$ 的体积最大时，求平面 HDP 与平面 EPC 所成锐二面角的余弦值。

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = -4 \ln x + \frac{1}{2} x^2$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论 $g(x) = \frac{f(x)}{x} + \left(b - \frac{1}{2}\right)x$ 零点的个数.

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A 、 B , 焦距为 2, 直线 l 与椭圆交于 C, D 两点 (均异于椭圆的左、右顶点). 当直线 l 过椭圆的右焦点 F 且垂直于 x 轴时, 四边形 $ACBD$ 的面积为 6.

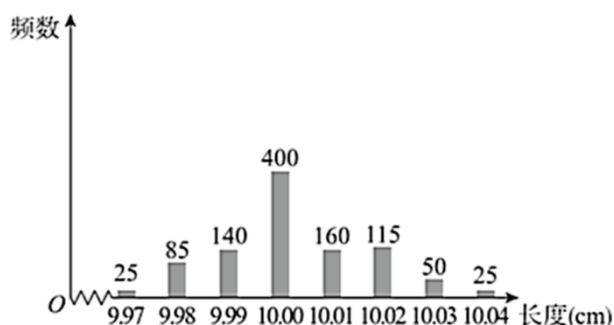
(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 .

①若 $k_2 = 3k_1$, 求证: 直线 l 过定点;

②若直线 l 过椭圆的右焦点 F , 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 并说明理由.

21. (12 分) 某工厂生产一种产品的标准长度为 10.00cm, 只要误差的绝对值不超过 0.03cm 就认为合格, 工厂质检部抽检了某批次产品 1000 件, 检测其长度, 绘制条形统计图如图:



(1) 估计该批次产品长度误差绝对值的数学期望;

(2) 如果视该批次产品样本的频率为总体的概率, 要求从工厂生产的产品中随机抽取 2 件, 假设其中至少有 1 件是标准长度产品的概率不小于 0.8 时, 该设备符合生产要求. 现有设备是否符合此要求? 若不符合此要求, 求出符合要求时, 生产一件产品为标准长度的概率的最小值.

22. (10 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , AB 为过焦点 F 且垂直于 x 轴的抛物线 C 的弦, 已知以 AB 为直径的圆经过点 $(-1, 0)$.

(1) 求 p 的值及该圆的方程;

(2) 设 M 为 l 上任意一点, 过点 M 作 C 的切线, 切点为 N , 证明: $MF \perp FN$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

利用直线 $y = k(x+3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交求出实数 k 的取值范围，然后利用几何概型的概率公式可求得所求事件的概率。

【详解】

由于直线 $y = k(x+3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交，则 $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ ，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

因此，所求概率为 $P = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查几何概型概率的计算，同时也考查了利用直线与圆相交求参数，考查计算能力，属于基础题。

2、C

【解析】

过 P 作 $PE \perp BD$ 于 E ，连接 CE ，易知 $CE \perp BD$ ， $PE = CE$ ，从而可证 $BD \perp$ 平面 PCE ，进而可知

$V_{P-BCD} = V_{B-PCE} + V_{D-PCE} = \frac{1}{3} S_{\triangle PCE} \cdot BD = \frac{8}{3} S_{\triangle PCE}$ ，当 $S_{\triangle PCE}$ 最大时， V_{P-BCD} 取得最大值，取 PC 的中点 F ，可得 $EF \perp PC$ ，再由 $S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} PC \cdot EF = \sqrt{PE^2 - 1}$ ，求出 PE 的最大值即可。

【详解】

在 $\triangle BPD$ 和 $\triangle BCD$ 中，
$$\begin{cases} PB = BC \\ PD = CD, \text{ 所以 } \triangle BPD \cong \triangle BCD, \text{ 则 } \angle PBD = \angle CBD, \\ BD = BD \end{cases}$$

过 P 作 $PE \perp BD$ 于 E ，连接 CE ，显然 $\triangle BPE \cong \triangle BCE$ ，则 $CE \perp BD$ ，且 $PE = CE$ ，

又因为 $PE \cap CE = E$ ，所以 $BD \perp$ 平面 PCE ，

所以 $V_{P-BCD} = V_{B-PCE} + V_{D-PCE} = \frac{1}{3}S_{VPCE} \cdot BD = \frac{8}{3}S_{VPCE} ,$

当 $S_{\triangle PCE}$ 最大时, V_{P-BCD} 取得最大值, 取 PC 的中点 F , 则 $EF \perp PC$,

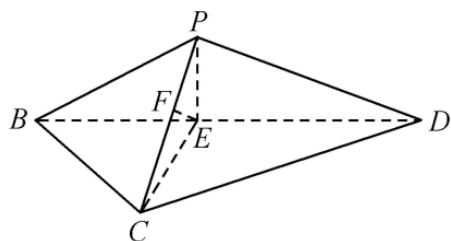
$$\text{所以 } S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} PC \cdot EF = \sqrt{PE^2 - 1},$$

因为 $PB + PD = 10, BD = 8$, 所以点 P 在以 B, D 为焦点的椭圆上 (不在左右顶点), 其中长轴长为 10, 焦距长为 8,

所以 PE 的最大值为椭圆的短轴长的一半, 故 PE 最大值为 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$$\text{所以 } S_{\triangle PCE} \text{ 最大值为 } 2\sqrt{2}, \text{ 故 } V_{P-BCD} \text{ 的最大值为 } \frac{8}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

故选: C.



【点睛】

本题考查三棱锥体积的最大值, 考查学生的空间想象能力与计算求解能力, 属于中档题.

3、D

【解析】

$$\text{试题分析: } M = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2, \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ 所以 } M < N, \text{ 所以由程序框图输出}$$

的 S 为 $\ln 2$. 故选 D.

考点: 1、程序框图; 2、定积分.

4、B

【解析】

先利用幂函数的定义求出 m 的值, 得到幂函数解析式为 $f(x) = x^3$, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 再利用幂函数 $f(x)$ 的单调性, 即可得到 a, b, c 的大小关系.

【详解】

由幂函数的定义可知, $m - 1 = 1, \therefore m = 2$,

$\therefore$ 点 $(2, 8)$ 在幂函数 $f(x) = x^n$ 上,

$$\therefore 2^n = 8, \therefore n = 3,$$

$\therefore$ 幂函数解析式为 $f(x) = x^3$, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\because \frac{m}{n} = \frac{2}{3}, 1 < \ln \pi < 3, n=3,$$

$$\therefore \frac{m}{n} < \ln \pi < n,$$

$$\therefore a < b < c,$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了幂函数的性质，以及利用函数的单调性比较函数值大小，属于中档题.

5、A

【解析】

根据对数的运算分别从充分性和必要性去证明即可.

【详解】

若 $3^a > 2b$, $b > 0$, 则 $a > \log_3 2b$, 可得 $a > \log_3 b$;

若 $a > \log_3 b$, 可得 $3^a > b$, 无法得到 $3^a > 2b$,

所以“ $3^a > 2b$ ”是“ $a > \log_3 b$ ”的充分而不必要条件.

所以本题答案为 A.

【点睛】

本题考查充要条件的定义，判断充要条件的方法是：

- ① 若 $p \Rightarrow q$ 为真命题且 $q \Rightarrow p$ 为假命题，则命题 p 是命题 q 的充分不必要条件；
- ② 若 $p \Rightarrow q$ 为假命题且 $q \Rightarrow p$ 为真命题，则命题 p 是命题 q 的必要不充分条件；
- ③ 若 $p \Rightarrow q$ 为真命题且 $q \Rightarrow p$ 为真命题，则命题 p 是命题 q 的充要条件；
- ④ 若 $p \Rightarrow q$ 为假命题且 $q \Rightarrow p$ 为假命题，则命题 p 是命题 q 的即不充分也不必要条件.
- ⑤ 判断命题 p 与命题 q 所表示的范围，再根据“谁大谁必要，谁小谁充分”的原则，判断命题 p 与命题 q 的关系.

6、A

【解析】

求出抛物线的焦点坐标，得到双曲线的离心率，然后求解 a, b 关系，即可得到双曲线的渐近线方程.

【详解】

抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 则 $p = 2$,

又 $e = p$, 所以 $e = \frac{c}{a} = 2$, 可得 $c^2 = 4a^2 = a^2 + b^2$, 可得: $b = \sqrt{3}a$, 所以双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \sqrt{3}x$.

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率以及双曲线渐近线方程的求法，涉及抛物线的简单性质的应用.

7、A

【解析】

先求 $(1 - \frac{1}{x})^3$ 的展开式，再分类分析 $(2 - mx)$ 中用哪一项与 $(1 - \frac{1}{x})^3$ 相乘，将所有结果为常数的相加，即为 $(2 - mx)(1 - \frac{1}{x})^3$ 展开式的常数项，从而求出 m 的值.

【详解】

$(1 - \frac{1}{x})^3$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r \cdot 1^{3-r} \cdot (-\frac{1}{x})^r = C_3^r \cdot (-1)^r x^{-r}$,

当 $(2 - mx)$ 取 2 时，常数项为 $2 \times C_3^0 = 2$,

当 $(2 - mx)$ 取 $-mx$ 时，常数项为 $-m \times C_3^1 \times (-1)^1 = 3m$

由题知 $2 + 3m = 8$ ，则 $m = 2$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了两个二项式乘积的展开式中的系数问题，其中对 $(2 - mx)$ 所取的项要进行分类讨论，属于基础题.

8、C

【解析】

通过图表所给数据，逐个选项验证.

【详解】

根据图示数据可知选项 A 正确；对于选项 B： $1935.5 \times 2 = 3871 < 5720.9$ ，正确；对于选项 C：

$16635.3 \times 1.5 > 23595.8$ ，故 C 不正确；对于选项 D： $23595.8 \times \frac{1}{3} \approx 7865 > 5720.9$ ，正确.选 C.

【点睛】

本题主要考查柱状图是识别和数据分析，题目较为简单.

9、B

【解析】

列出循环的每一步，由此可得出输出的 v 值.

【详解】

由题意可得：输入 $n = 3$ ， $x = 1$ ， $v = 2$ ， $m = 3$ ；

第一次循环， $v = 2 \times 1 + 3 = 5$ ， $m = 3 - 1 = 2$ ， $n = 3 - 1 = 2$ ，继续循环；

第二次循环， $v = 5 \times 1 + 2 = 7$ ， $m = 2 - 1 = 1$ ， $n = 2 - 1 = 1$ ，继续循环；

第三次循环, $v = 7 \times 1 + 1 = 8$, $m = 1 - 1 = 0$, $n = 1 - 1 = 0$, 跳出循环;

输出 $v = 8$.

故选: B.

【点睛】

本题考查根据算法框图计算输出值, 一般要列举出算法的每一步, 考查计算能力, 属于基础题.

10、A

【解析】

依题意, 如图以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系, 表示出点的坐标, 根据 $AE = BE$ 求出 E 的坐标, 求出边 CD 所在直线的方程, 设 $M(x, -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$, 利用坐标表示 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ME}$, 根据二次函数的性质求出最大值.

【详解】

解: 依题意, 如图以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系, 由 $AB = 2$, $AD = 5$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$,

$$\therefore A(0, 0), B(1, \sqrt{3}), C(4, \sqrt{3}), D(5, 0)$$

因为点 E 在线段 CB 的延长线上, 设 $E(x_0, \sqrt{3})$, $x_0 < 1$

$$\because AE = BE$$

$$x_0^2 + (\sqrt{3})^2 = (1 - x_0)^2 \text{ 解得 } x_0 = -1$$

$$\therefore E(-1, \sqrt{3})$$

$$\because C(4, \sqrt{3}), D(5, 0)$$

$$\therefore CD \text{ 所在直线的方程为 } y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$$

因为点 M 在边 CD 所在直线上, 故设 $M(x, -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = (x, -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{ME} = (-1 - x, \sqrt{3}x - 4\sqrt{3})$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ME} = x(-1 - x) + (\sqrt{3}x - 4\sqrt{3})(-\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$$

$$= -4x^2 + 26x - 60$$

$$= -4x^2 + 26x - 60$$

$$= -4\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{71}{4}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/508041103111006113>