广东省广州市奥林匹克中学2024~2025学年高三上学期期中考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设集合 $A=\{0,1,2\}$ ，$B=\{x|x\le 1\}$，则 $A\cap B$ 的子集个数为（　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．16

2．若复数 z 满足 $\dfrac{i+z}{z}=i+2$ ，则 z 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

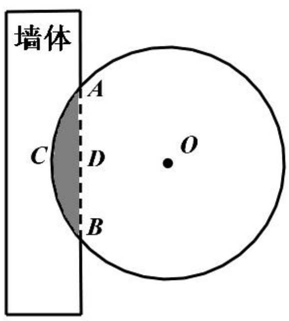
3．设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_2=5$ ，$a_1a_3=16$ ，则 $a_{12}=$（　）

A．12　　B．35　　C．75　　D．90

4．$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)(x-1)^6$ 的展开式中，常数项为（　）

A．12　　B．-12　　C．-10　　D．10

5．《九章算术》是我国古代著名数学经典，其中对勾股定理的论述，比西方早一千多年，其中有这样一个问题："今有圆材埋在壁中，不知大小；以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？"其意为：今有一圆柱形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯该材料，锯口深1寸，锯道长1尺，问这块圆柱形木料的直径是多少？长为0.5丈的圆柱形木材部分镶嵌在墙体中，截面图如图所示（阴影部分为镶嵌在墙体内的部分）.已知弦 $AB=1$尺，弓形高 $CD=1$寸，估算该木材镶嵌墙内部分的体积约为（）（注：一丈=10尺=100寸，$\pi\approx 3.14,\sin 22.5^\circ\approx\dfrac{5}{13}$）



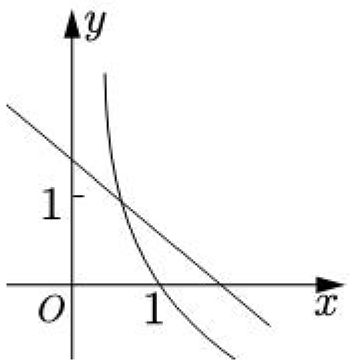
A．300立方寸　　B．305.6立方寸　　C．310立方寸　　D．316.6立方寸

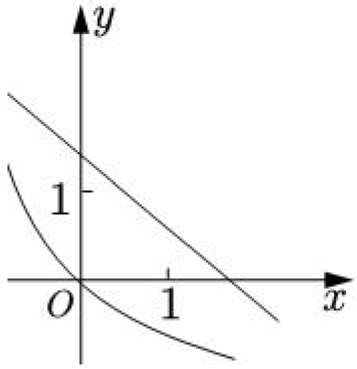
6．双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2,|F_1F_2|=4$，且 C 的一条渐近

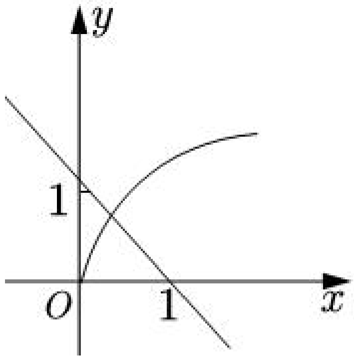
线与直线$l:\sqrt{3}x-y+1=0$平行，则双曲线C的标准方程为（　）

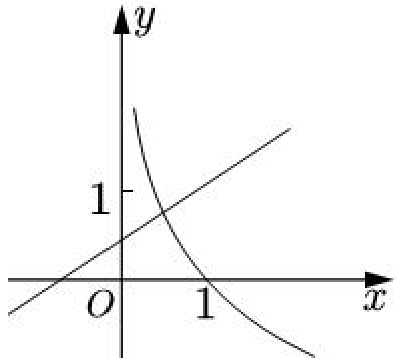
A．$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

7．函数$f\left(x\right)=-\log_a\left(x-b\right)$及$g\left(x\right)=bx+a$，则$y=f\left(x\right)$及$y=g\left(x\right)$的图象可能为（　）

A．


B．


C．


D．


8．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=CC_1=\sqrt{2}$，$BC=1$，点M在正方形CDD_1C_1内，$C_1M\perp$平面A_1CM，则三棱锥$M-A_1CC_1$的外接球表面积为（　）

A．$\frac{11}{2}\pi$　　B．7π　　C．11π　　D．14π

二、多选题

9．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$c=b(2\cos A+1)$，则下列结论正确的有（　）

A．$A=2B$

B．若$a=\sqrt{2}b$，则$\triangle ABC$为等腰直角三角形

C．若$a=\sqrt{3}b$，则$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}b^2$

D．若$\triangle ABC$为锐角三角形，$\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan A}$的最小值为1

10．设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，下述结论正确的是（　）

A．$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点

B．$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

C．$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ 单调递减

D．ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5},\frac{29}{10}\right)$

11．已知直线 $y=-x+2$ 分别与函数 $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln(2x)$ 的图象交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则（　）

A．$\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>2\mathrm{e}$

B．$x_1+x_2>\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}$

C．$\frac{\ln x_1}{x_1}+x_2\ln x_2>0$

D．$\mathrm{e}^{x_1}+\ln(2x_2)>2$

三、填空题

12．已知 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是互相垂直的单位向量，若 $\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ 与 $\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 $90°$，则实数 λ 的值是__________.

13．A 同学和 B 同学参加某市青少年围棋比赛并进入决赛，决赛采取“3 局 2 胜”制，若 A 同学每局获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$，且每局比赛相互独立，则在 A 先胜一局的条件下，A 最终能获胜的概率是__________.

14．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，以线段 AB 为直径的圆交 y 轴于 M，N 两点，设线段 AB 的中点为 Q，若点 F 到 C 的准线的距离为 3，则 $\sin\angle QMN$ 的值为__________.

四、解答题

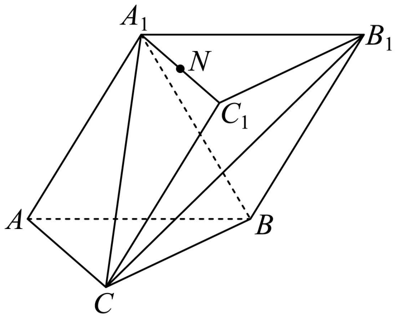
15．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，数列 $\{\log_3 b_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列，$b_1=1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_{2n+1}+b_{2n+1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， AA_1 与 BB_1 的距离为 $\sqrt{3}$， $AB=AC=A_1B=2$，

$A_1C=BC=2\sqrt{2}$.



(1)证明：平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC；

(2)若点 N 是棱 A_1C_1 的中点，求直线 AN 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值.

17．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-ax$.

(1)当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)讨论 $f(x)$ 极值点的个数.

18．已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{x^2}{6}=1$， F 是 Γ 的下焦点，过点 $R(0,6)$ 的直线 l 交 Γ 于 M 、 N 两点，

（1）求 F 的坐标和椭圆 Γ 的焦距；

（2）求 $\triangle MNF$ 面积的最大值，并求此时直线 l 的方程；

（3）在 y 轴上是否存在定点 S，使得 $\angle RSM+\angle RSN=\pi$ 恒成立?若存在，求出定点 S 的坐标；若不存在，请说明理由.

19．定义：若函数 $f(x)$ 图象上恰好存在相异的两点 P， Q 满足曲线 $y=f(x)$ 在 P 和 Q 处的切线重合，则称 P，Q 为曲线 $y=f(x)$ 的“双重切点”，直线 PQ 为曲线 $y=f(x)$ 的“双重切线”.

(1)直线 $y=2x$ 是否为曲线 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$ 的“双重切线”，请说明理由；

(2)已知函数 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{\mathrm{e}},x\le 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ 求曲线 $y=g(x)$ 的“双重切线”的方程；

(3)已知函数 $h(x)=\sin x$，直线 PQ 为曲线 $y=h(x)$ 的“双重切线”，记直线 PQ 的斜率所有可能

的取值为k_1，k_2，…，k_n，若$k_1>k_2>k_i$（$i=3,4,5,\cdots,n$），证明：$\frac{k_1}{k_2}<\frac{15}{8}$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	B	D	A	B	C	AB	AD
题号	11									
答案	ABD									

1．B

【解析】先计算 $A\cap B$，再计算其子集的个数即可.

【详解】因为 $A=\{0,1,2\}$， $B=\{x|x\le 1\}$，

$A\cap B=\{0,1\}$，子集为$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$共4个，

故选：B

2．A

【分析】求出 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，即得解.

【详解】由题得 $i+z=zi+2z,\therefore z(1+i)=i,\therefore z=\frac{i}{1+i}$，

所以 $z=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ，

复数 z 对应的点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，在第一象限.

故选：A

3．B

【解析】求出首项和公差d后可得a_{12}.

【详解】设公差为d，则$\begin{cases}a_1+d=5\\a_1(a_1+2d)=16\end{cases}$，$\because d>0$，故解得$\begin{cases}a_1=2\\d=3\end{cases}$，

$\therefore a_{12}=2+11\times 3=35$.

故选：B.

4．B

【分析】利用二项式定理展开式直接计算可求得结果.

【详解】根据题意可知只有$\frac{2}{x}$与$(x-1)^6$的展开式中的一次项乘积为常数，

即$\frac{2}{x}C_6^5x^1\left(-1\right)^5=-2C_6^5=-12$.

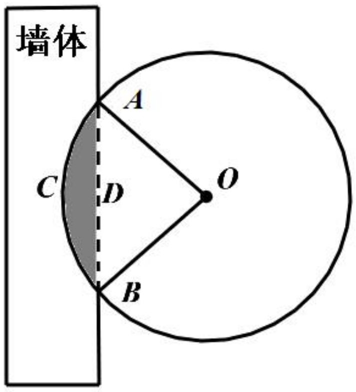
故选：B

5．D

【分析】算出截面图中阴影部分的面积后利用柱体的体积公式可求木材镶嵌墙内部分的体积.

【详解】设截面图中圆的半径为R（寸），则$\sqrt{R^2-25}+1=R$，解得$R=13$.

如图，在截面图中连接OA,OB，设$\angle AOB=\alpha$，



则$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{13}$，故$\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\pi}{8}$即$\alpha\approx\frac{\pi}{4}$.

阴影部分的面积约为$\frac{1}{2}\times169\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times10\times\sqrt{13^2-5^2}=6.3325$，

故木材镶嵌墙内部分的体积约为$6.3325\times50=316.625$（立方寸），

故选：D.

【点睛】本题考查数学文化中几何体体积的计算，注意根据柱体的截面图来寻找几何体各几何量之间的关系，本题属于中档题.

6．A

【分析】利用已知条件求出 a、b、c 的值代入方程即可

【详解】由题意知$\begin{cases}2c=4\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\\ c=2\end{cases}$，故双曲线$C$的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

故选：A.

7．B

【分析】讨论$0<a<1$、$a>1$确定$f\left(x\right)=-\log_a\left(x-b\right)$的单调性和定义域、$g\left(x\right)=bx+a$在$y$轴上的截距，再讨论$b>0$、$b<0$，结合$g\left(x\right)=bx+a$的单调性，即可确定函数的可能图象.

【详解】当$0<a<1$时，$t=\frac{1}{x-b}>0$单调递减，$f(t)=\log_a t$单调递减，所以$f(x)=\log_a\frac{1}{x-b}$

单调递增且定义域为$(b,+\infty)$，此时$g\left(x\right)=bx+a$与y轴的截距在$(0,1)$上，排除C.

当$a>1$时，$t=\dfrac{1}{x-b}>0$单调递减，$f(t)=\log_a t$单调递增，所以$f(x)=\log_a \dfrac{1}{x-b}$单调递减且定义域为$(b,+\infty)$，此时$g\left(x\right)=bx+a$与$y$轴的截距在$(1,+\infty)$上.

∴当$b>0$时，$g(x)$单调递增；当$b<0$时，$g(x)$单调递减，故只有B符合要求.

故选：B.

8．C

【解析】证明M是正方形CDD_1C_1对角线交点，取E是CC_1中点，F是BB_1中点，则可得三棱锥A_1-MCC_1的外接球球心O在直线EF上，求出球半径可得表面积.

【详解】长方体AC_1中，$A_1D_1\perp$平面CDD_1C_1，$C_1M\subset$平面CDD_1C_1，$\therefore C_1M\perp A_1D_1$，

又$C_1M\perp$平面A_1CM，$A_1C\subset$平面A_1CM，$\therefore C_1M\perp A_1C$，

$\because A_1C\cap A_1D_1=A_1$，$\therefore C_1M\perp$平面$A_1CD_1$，而$CD_1\subset$平面$A_1CD_1$，$\therefore C_1M\perp CD_1$，

CDD_1C_1是正方形，$\therefore M$是CD_1与C_1D交点，即为CD_1的中点，也是C_1D的中点.

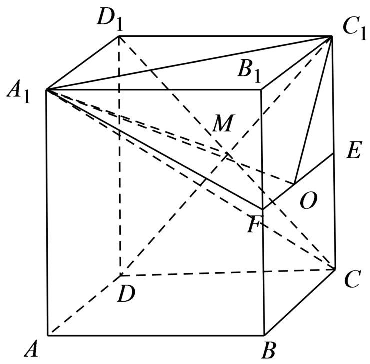
$\triangle C_1MC$是直角三角形，设E是CC_1中点，F是BB_1中点，则由$EF//BC$可得$EF\perp$平面MCC_1（长方体中棱与相交面垂直），E是$\triangle C_1MC$的外心，三棱锥A_1-MCC_1的外接球球心O在直线EF上（线段EF或EF的延长线上）.

设$OE=h$，则$h^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(1-h)^2$，解得$h=\dfrac{3}{2}$，

∴外接球半径为$r=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，

表面积为$S=4\pi r^2=4\pi\times\dfrac{11}{4}=11\pi$.

故选：C.



【点睛】关键点点睛：本题考查三棱锥外接球表面积，解题关键是确定球心位置，求出半径. 应用结论：三棱锥的外接球球心一定在过各面外心且与此面垂直的直线上.

9．AB

【分析】A：根据正弦定理进行边化角，结合两角和差的正弦公式可得结果；B：根据正弦定理进行边化角求解出B，则三角形形状可判断；C：根据正弦定理进行边化角求解出B，结合三角形面积公式可求结果；D：先化简原式，然后分析B的范围，判断原式的取值情况，由此可判断.

【详解】对于 A：因为$c=b\left(2\cos A+1\right)$，所以$\sin C=\sin B\left(2\cos A+1\right)$，所以

$\sin C=2\sin B\cos A+\sin B$，

所以$\sin\left(A+B\right)=2\sin B\cos A+\sin B$，所以$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin B\cos A+\sin B$，

所以$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin B$，所以$\sin\left(A-B\right)=\sin B$，

因为$A\in\left(0,\pi\right),B\in\left(0,\pi\right)$，所以$A-B\in\left(-\pi,\pi\right)$，所以$A-B=B$或$A-B+B=\pi$，

当$A-B+B=\pi$时，此时$A=\pi$显然不成立，所以$A-B=B$，即$A=2B$，故 A 正确；

对于 B：因为$a=\sqrt{2}b$，所以$\sin A=\sqrt{2}\sin B=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin B>0$，所以$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$B=\dfrac{\pi}{4}$，所以$A=2B=\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，故 B 正确；

对于 C：因为$a=\sqrt{3}b$，所以$\sin A=\sqrt{3}\sin B=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin B>0$，所以$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，

所以$c=2b,a=\sqrt{3}b$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}b\times 2b\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2$，故 C 错误；