

湖南省名师网络工作室精品课

2.3.3点到直线的距离公式

年 级：高二年级

学 科：数学(人教A版)

主讲人：周学鹏

学 校：湖南省株洲市第八中学



湖南省名师网络工作室精品课

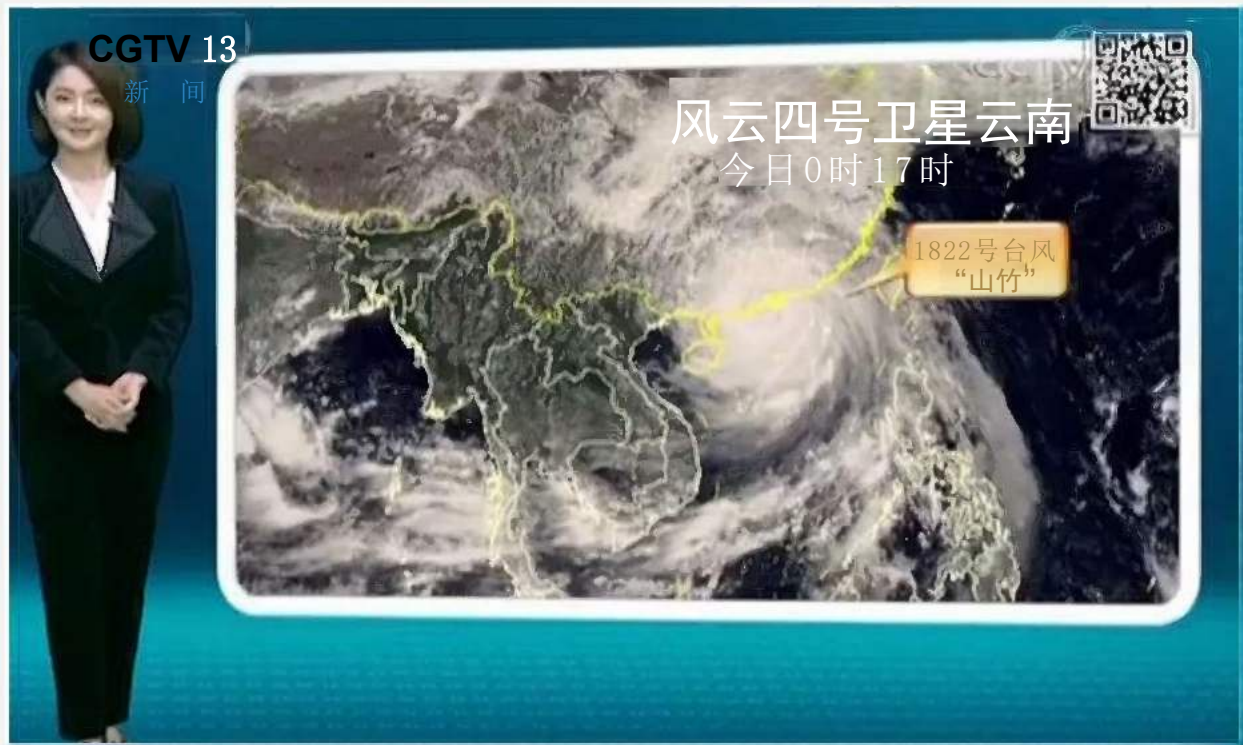
2.3.3点到直线的距离公式

年 级：高二年级 学 科：数学(人教A版)
主讲人：周学鹏 学 校：株洲市第八中学





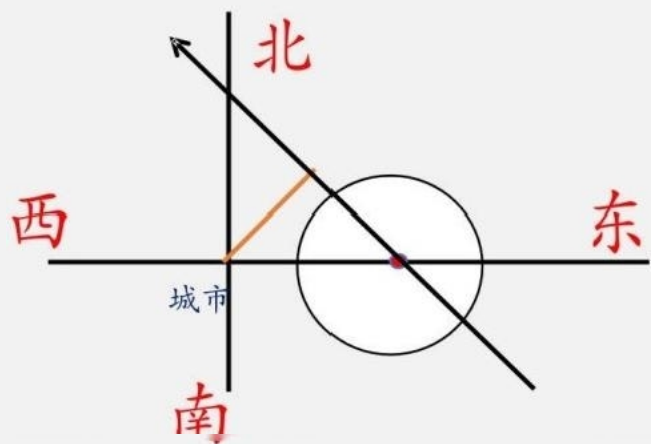
情景引入





情景引入

据预测，台风中心位于我市的正东方向200km的海平面上，正向西北方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，半径为100km。问：未来我市会受到台风的影响吗？

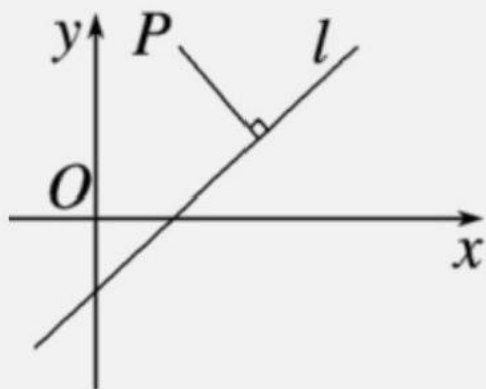




自主探究

探究一：用坐标法推导点到直线的距离公式

问题1:如图，平面直角坐标系中，已知点 $P(x_0, Y_0)$ ，
直线 $l: Ax+By+C=0(A \neq 0, B \neq 0)$ ，怎样求出点 P 到
直线 l 的距离呢？





提示：两点间的距离公式

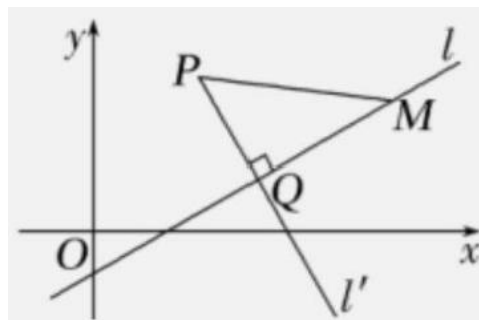
设点P到直线l的垂线为 l' ,垂足为Q,

由 $l \perp l'$ 可知 l' 的斜率为 $\frac{B}{A}$

$\therefore l'$ 的方程为 $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$

与l联立方程组, 可得

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ay - Ay_0 = Bx - Bx_0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ABy - AB y_0 - B^2 x + B^2 x_0 = 0 \\ A^2 x + AB y + AC = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (A^2 + B)x = -AB y, -AC + Bx,$$

$$\therefore x = \frac{B^2 x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}$$

$$y = \frac{A^2 y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2}$$



$$Q\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

∴由两点间的距离公式有：

$$|PQ|^2 = \left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2$$



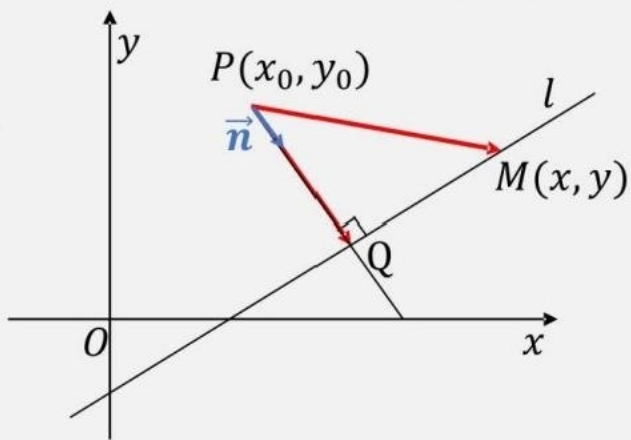
$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= \left(\frac{B^2 x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0 \right)^2 + \left(\frac{A^2 y_0 - AB x_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0 \right)^2 \\ &= \left(\frac{\cancel{B^2 x_0} - AB y_0 - AC - \cancel{B^2 x_0} - \cancel{A^2 x_0}}{A^2 + B^2} \right)^2 + \left(\frac{\cancel{A^2 y_0} - AB x_0 - BC - \cancel{B^2 y_0} - \cancel{A^2 y_0}}{A^2 + B^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{A^2 x_0 + AB y_0 + AC}{A^2 + B^2} \right)^2 + \left(\frac{B^2 y_0 + AB x_0 + BC}{A^2 + B^2} \right)^2 \\ &= \frac{A^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2 (By_0 + Ax_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} \\ &= \frac{\cancel{(A^2 + B^2)} (Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} \\ &= \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2} \\ \therefore |PQ| &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$



问题2: 通过刚才的运算，我们发现把点线距离转化为两点间的距离思路顺畅，但是计算繁琐。我们知道向量是解决距离和夹角问题的有力工具，怎样用向量投影的办法求点到直线的距离？

$$|PQ| = |\vec{PQ}| = | \quad |$$

$$= |\vec{PM} \cdot \vec{n}|$$





设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 是直线 $l: Ax + By + C = 0$ 上的任意两点, 则 $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 是直线 l 的方向向量.

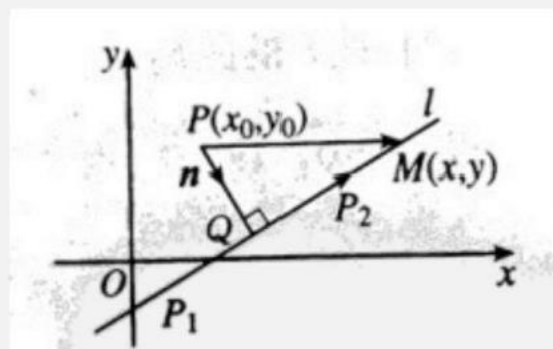
把 $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$ 两式相减,

$$\text{得 } A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$$

由平面向量的数量积运算可知, $\vec{u} = (A, B)$ 与

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

垂直.



$$\text{则 } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B)$$

就是与直线 l 的方向向量垂直的一个单位向量.



$$\text{从而 } \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (A, B)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} [A(x - x_0) + B(y - y_0)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By - Ax_0 - By_0)$$

因为点M(x, y) 在直线l上, 所以Ax+By +C=0

所以Ax+By=-C

$$\text{代入上式得 } \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (-Ax_0 - By_0 - C)$$

$$\text{因此 } |PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/508055060127006075>