

专题 30 直线、平面平行的判定及其性质



(1) 以立体几何的定义、公理和定理为出发点，认识和理解空间中线面平行的有关性质与判定定理.

理解以下判定定理：

- 如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行.
- 如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面都平行，那么这两个平面平行.

理解以下性质定理，并能够证明：

- 如果一条直线与一个平面平行，那么经过该直线的任一个平面与此平面的交线和该直线平行.
- 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线相互平行.
- 垂直于同一个平面的两条直线平行.

(2) 能运用公理、定理和已获得的结论证明一些空间图形的位置关系的简单命题.



一、直线与平面平行的判定与性质

1. 直线与平面平行的判定定理

文字语言	平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行. 简记为：线线平行 \Rightarrow 线面平行
图形语言	

符号语言	$a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, \text{ 且 } a // b \Rightarrow a // \alpha$
作用	证明直线与平面平行

2. 直线与平面平行的性质定理

文字语言	<p>一条直线与一个平面平行,则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.</p> <p>简记为: 线面平行\Rightarrow线线平行</p>
图形语言	
符号语言	$a // \alpha, a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b \Rightarrow a // b$
作用	<p>①作为证明线线平行的依据.</p> <p>②作为画一条直线与已知直线平行的依据.</p>

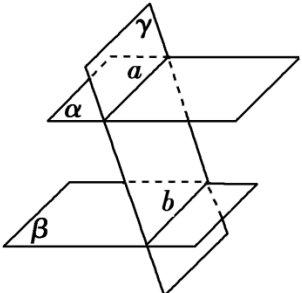
二、平面与平面平行的判定与性质

1. 平面与平面平行的判定定理

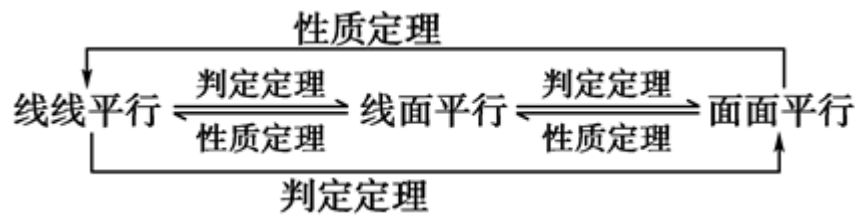
文字语言	<p>一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行, 则这两个平面平行.</p> <p>简记为: 线面平行\Rightarrow面面平行</p>
图形语言	

符号语言	$a \subset \beta, b \subset \beta, a \parallel b = P, a \parallel \alpha, b \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$
作用	证明两个平面平行

2. 平面与平面平行的性质定理

文字语言	如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行. 简记为: 面面平行 \Rightarrow 线线平行
图形语言	
符号语言	$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b \Rightarrow a \parallel b$
作用	证明线线平行

3. 平行问题的转化关系



三、常用结论 (熟记)

1. 如果两个平面平行, 其中一个平面内的任意一条直线平行于另一个平面.
2. 如果两个平行平面中有一个平面垂直于一条直线, 那么另一个平面也垂直于这条直线.
3. 夹在两个平行平面间的平行线段长度相等.
4. 经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行.

5. 两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.
6. 如果两个平面分别和第三个平面平行，那么这两个平面互相平行.
7. 如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，那么这两个平面平行.
8. 如果两个平面垂直于同一条直线，那么这两个平面平行.



考向一 线面平行的判定与性质

线面平行问题的常见类型及解题策略：

(1) 线面平行的基本问题

- ① 判定定理与性质定理中易忽视的条件.
- ② 结合题意构造图形作出判断.
- ③ 举反例否定结论或反证法证明.

(2) 线面平行的证明问题

判断或证明线面平行的常用方法有：

- ① 利用线面平行的定义(无公共点)；
- ② 利用线面平行的判定定理($a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$)；
- ③ 利用面面平行的性质($\alpha \parallel \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$)；
- ④ 利用面面平行的性质($\alpha \parallel \beta, a \not\subset \alpha, a \not\subset \beta, a \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel \beta$).

(3) 线面平行的探索性问题

① 对命题条件的探索常采用以下三种方法：

a. 先猜后证，即先观察与尝试，给出条件再证明；

b. 先通过命题成立的必要条件探索出命题成立的条件，再证明其充分性；

c.把几何问题转化为代数问题，探索命题成立的条件.

②对命题结论的探索常采用以下方法:

首先假设结论存在，然后在这个假设下进行推理论证，如果通过推理得到了合乎情理的结论就肯定假设，如果得到了矛盾的结果就否定假设.

典例引领

典例 1 能保证直线 a 与平面 α 平行的条件是

- A. $a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b$
- B. $b \subset \alpha, a \parallel b$
- C. $b \subset \alpha, c \parallel \alpha, a \parallel b, a \parallel c$
- D. $b \subset \alpha, A \in a, B \in a, C \in b, D \in b$ 且 $AC=BD$

【答案】 A

【解析】 根据线面平行的判定定理可知 A 正确，注意线面平行的判定定理的条件缺一不可.

B. $b \subset \alpha, a \parallel b, a$ 可能在 α 内，错误；

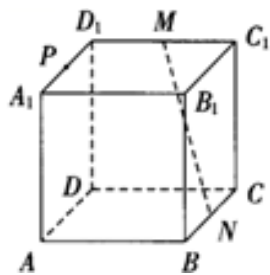
C. $b \subset \alpha, c \parallel \alpha, a \parallel b, a \parallel c, a$ 可能在 α 内，错误；

D. $b \subset \alpha, A \in a, B \in a, C \in b, D \in b$ 且 $AC=BD, a$ 可能与 α 相交，错误.

故选 A.

变式拓展

1. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N, P 分别是 C_1D_1, BC, A_1D_1 的中点，则下列命题正确的是



A. $MN \parallel AP$

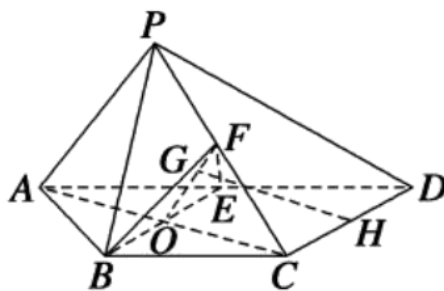
B. $MN \parallel BD_1$

C. $MN \parallel$ 平面 BB_1D_1D

D. $MN \parallel$ 平面 BDP

典例引领

典例 2 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, E, F, H 分别为线段 AD, PC, CD 的中点, AC 与 BE 交于 O 点, G 是线段 OF 上一点.



(1) 求证: $AP \parallel$ 平面 BEF ;

(2) 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD .

【解析】 (1) 如图, 连接 EC ,

$$\because AD \parallel BC, BC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore BC = AE, BC \parallel AE,$$

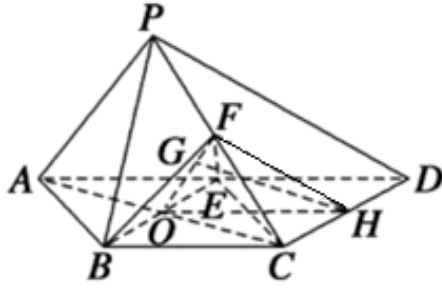
\therefore 四边形 $ABCE$ 是平行四边形,

$\therefore O$ 为 AC 的中点.

又 $\because F$ 是 PC 的中点, $\therefore FO \parallel AP$,

又 $\because FO \subset$ 平面 $BEF, AP \not\subset$ 平面 BEF ,

$\therefore AP \parallel$ 平面 BEF .



(2) 如图, 连接 FH , OH ,

$\because F, H$ 分别是 PC, CD 的中点, $\therefore FH \parallel PD$,

又 $\because PD \subset$ 平面 PAD , $FH \not\subset$ 平面 PAD ,

$\therefore FH \parallel$ 平面 PAD .

又 $\because O$ 是 AC 的中点, H 是 CD 的中点,

$\therefore OH \parallel AD$,

$\because AD \subset$ 平面 PAD , $OH \not\subset$ 平面 PAD ,

$\therefore OH \parallel$ 平面 PAD .

又 $\because FH \cap OH = H$,

\therefore 平面 $OHF \parallel$ 平面 PAD ,

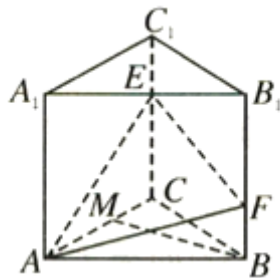
又 $\because GH \subset$ 平面 OHF ,

$\therefore GH \parallel$ 平面 PAD .

变式拓展

2. 如图所示, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 E, F 分别是棱 CC_1, BB_1 上的点, 点 M 是棱 AC 上的动点,

$EC = 2FB = 2$, 若 $MB \parallel$ 平面 AEF , 试判断点 M 在何位置.



考向二 面面平行的判定与性质

判定面面平行的常见策略：

(1)利用定义：即证两个平面没有公共点(不常用).

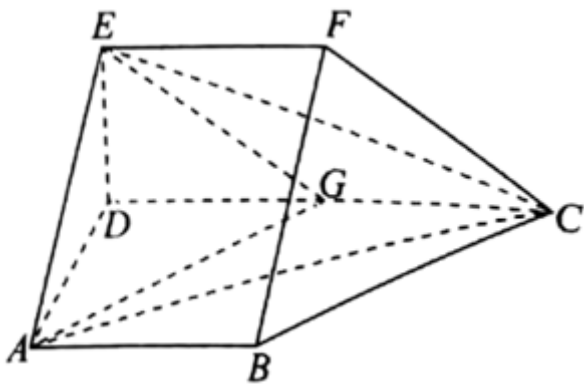
(2)利用面面平行的判定定理(主要方法).

(3)利用垂直于同一条直线的两平面平行(客观题可用).

(4)利用平面平行的传递性，即两个平面同时平行于第三个平面，则这两个平面平行(客观题可用).

典例引领

典例 3 如图，直角梯形 $ABCD$ 与梯形 $EFCD$ 全等，其中 $AB//CD//EF$ ， $AD = AB = \frac{1}{2}CD = 1$ ，且 $ED \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 G 是 CD 的中点.



(1) 求证：平面 $BCF//$ 平面 AGE ；

(2) 求平面 BCF 与平面 AGE 的距离.

【解析】(1) $\because AB//CD$ ， $AB = \frac{1}{2}CD$ ， G 是 CD 的中点，

\therefore 四边形 $ABCG$ 为平行四边形， $\therefore BC//AG$ ，

又 $\because AG \subset$ 平面 AEG ， $BC \not\subset$ 平面 AEG ，

$\therefore BC//$ 平面 AEG ，

\because 直角梯形 $ABCD$ 与梯形 $EFCD$ 全等， $EF//CD//AB$ ，

$\therefore EF = AB$ ，

∴ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形,

∴ $BF \parallel AE$,

又 ∵ $AE \subset$ 平面 AEG , $BF \not\subset$ 平面 AEG ,

∴ $BF \parallel$ 平面 AEG ,

∵ $BF \cap BC = B$,

∴ 平面 $BCF \parallel$ 平面 AGE .

(2) 设点 C 到平面 AGE 的距离为 d ,

易知 $AE = EG = AG = \sqrt{2}$,

由 $V_{C-AGE} = V_{E-ACG}$,

$$\text{得 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AE^2 \times \sin 60^\circ \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times CG \times AD \times DE,$$

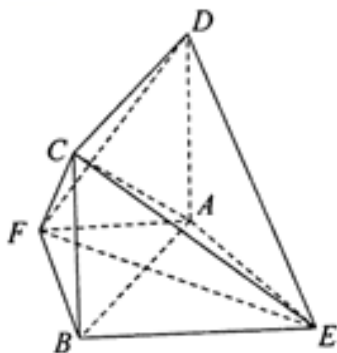
$$\text{即 } d = \frac{CG \times AD \times DE}{AE^2 \times \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

∴ 平面 $BCF \parallel$ 平面 AGE ,

∴ 平面 BCF 与平面 AGE 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

变式拓展

3. 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, A, E, B, F 四点共面, 且 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ABF$ 均为等腰直角三角形, $\angle BAE = \angle AFB = 90^\circ$.



(1) 求证：平面 $BCE \parallel$ 平面 ADF ；

(2) 若平面 $ABCD \perp$ 平面 $AEBF$ ， $AF = 1$ ， $BC = 2$ ，求三棱锥 $A-CEF$ 的体积.



1. 已知 m, n 为两条不重合直线， α, β 为两个不重合平面，下列条件中， $\alpha \parallel \beta$ 的充分条件是

A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$	B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$	D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

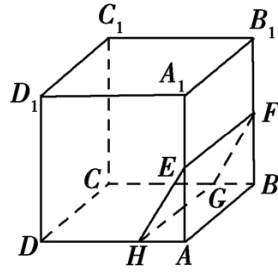
2. 平面 α 与平面 β 平行的条件可以是

A. α 内的一条直线与 β 平行	B. α 内的两条直线与 β 平行
C. α 内的无数条直线与 β 平行	D. α 内的两条相交直线分别与 β 平行

3. 下列命题中，错误的是

A. 平面内一个三角形各边所在的直线都与另一个平面平行，则这两个平面平行	
B. 平行于同一个平面的两个平面平行	
C. 若两个平面平行，则位于这两个平面内的直线也互相平行	
D. 若两个平面平行，则其中一个平面内的直线平行于另一个平面	

4. 如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别是棱 AA_1 和 BB_1 的中点，过 EF 的平面 $EFGH$ 分别交 BC 和 AD 于点 G, H ，则 HG 与 AB 的位置关系是



- A. 平行
B. 相交
C. 异面
D. 平行和异面

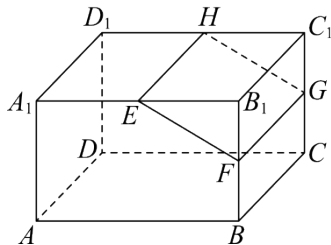
5. 设 α , β 表示两个不同的平面, m 表示一条直线, 则下列命题正确的是

- A. 若 $m \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$
 B. 若 $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 C. 若 $m \subset \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$
 D. 若 $m \subset \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$

6. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 若经过 D_1B 的平面分别交 AA_1 和 CC_1 于点 E, F , 则四边形 D_1EBF 的形状是

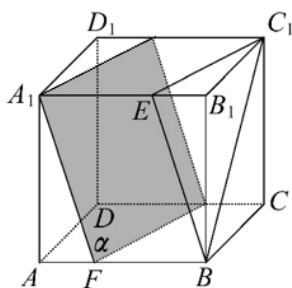
- A. 矩形
B. 菱形
C. 平行四边形
D. 正方形

7. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 若 E, F, G, H 分别是棱 $A_1B_1, BB_1, CC_1, C_1D_1$ 的中点, 则必有

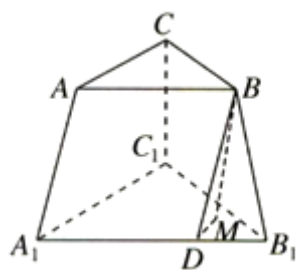


- A. $BD_1 \parallel GH$
B. $BD \parallel EF$
C. 平面 $EFGH \parallel$ 平面 $ABCD$
D. 平面 $EFGH \parallel$ 平面 A_1BCD_1

8. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3, 点 E 在 A_1B_1 上, 且 $B_1E = 1$, 平面 $\alpha //$ 平面 BC_1E (平面 α 是图中的阴影平面), 若平面 $\alpha \perp$ 平面 $AA_1B_1B = A_1F$, 则 AF 的长为



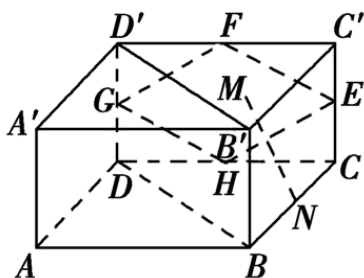
- A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 3
9. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 A_1B_1, B_1C_1 的中点, O 是 AC 与 BD 的交点, 平面 OEF 与平面 BCC_1B_1 相交于 m , 平面 OD_1E 与平面 BCC_1B_1 相交于 n , 则直线 m, n 的夹角为
- A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$
D. 0
10. 如图所示, 在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 D 在 A_1B_1 上, 且 $AA_1 // BD$, 点 M 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内 (含边界) 的一个动点, 且有平面 $BDM //$ 平面 A_1C , 则动点 M 的轨迹是



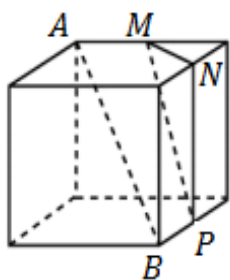
- A. 平面
B. 直线
C. 线段, 但只含 1 个端点
D. 圆
11. 下列三个命题在“_____”处都缺少同一个条件, 补上这个条件使其构成真命题 (其中 l, m 为直线, α, β 为平面), 则此条件是_____.

$$\left. \begin{array}{l} l // m \\ \textcircled{1} m // \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha; \left. \begin{array}{l} m \subset \alpha \\ \textcircled{2} l // m \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha; \left. \begin{array}{l} l \perp m \\ \textcircled{3} m \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha.$$

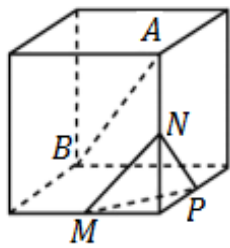
12. 如图,在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E, F, G, H 分别为 $CC', C'D', D'D, CD$ 的中点, N 是 BC 的中点, 点 M 在四边形 $EFGH$ 内运动, 则 M 满足_____时, 有 $MN //$ 平面 $B'BDD'$.



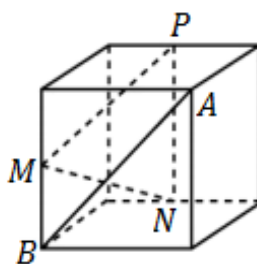
13. 下列四个正方体图形中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, P 分别为其所在的棱的中点, 能得出 $AB //$ 平面 MNP 的图形的序号是_____.



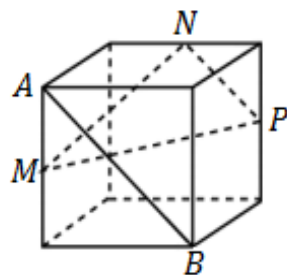
①



②

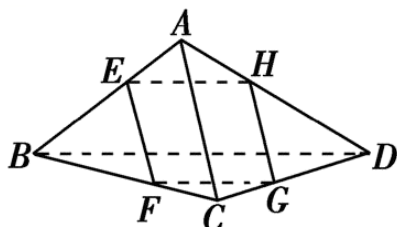


③

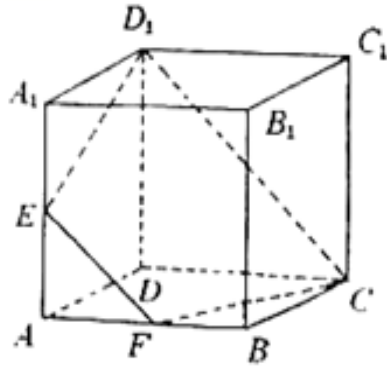


④

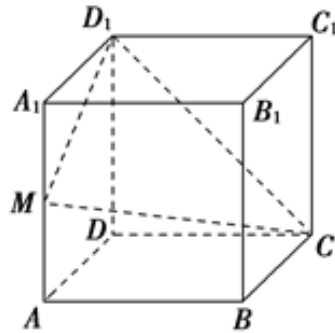
14. 如图, 已知空间四边形 $ABCD$, E, F, G, H 分别是其四边上的点且共面, $AC //$ 平面 $EFGH$, $AC = m, BD = n$, 当 $EFGH$ 是菱形时, $\frac{AE}{EB} =$ _____.



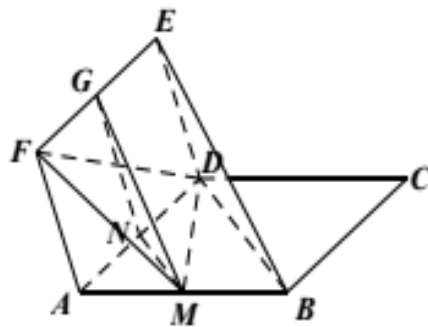
15. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别为 AA_1, AB 的中点, M 点是正方形 ABB_1A_1 内的动点, 若 $C_1M //$ 平面 CD_1E , 则 M 点的轨迹长度为_____.



16. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是棱 AA_1 的中点，过 C, M, D_1 作正方体的截面，则截面的面积是_____.



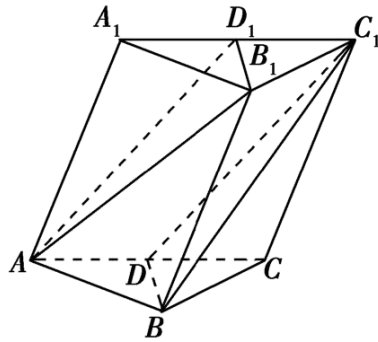
17. 如图,四边形 $ABCD$ 与 $ADEF$ 均为平行四边形, M, N, G 分别是 AB, AD, EF 的中点.



(1)求证: $BE \parallel$ 平面 DMF ;

(2)求证:平面 $BDE \parallel$ 平面 MNG .

18. 如图所示,斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,点 D, D_1 分别为 AC, A_1C_1 上的点.



(1) 当 $\frac{A_1D_1}{D_1C_1}$ 等于何值时, $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D_1 ?

(2) 若平面 $BC_1D \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 求 $\frac{AD}{DC}$ 的值.

19. 如图 1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 3$, $CD = 6$, 过 A , B 分别作 CD 的垂线, 垂足分别为 E , F , 已知 $DE = 1$, $AE = 3$, 将梯形 $ABCD$ 沿 AE , BF 同侧折起, 使得平面 $ADE \perp$ 平面 $ABFE$, 平面 $ADE \parallel$ 平面 BCF , 得到图 2.

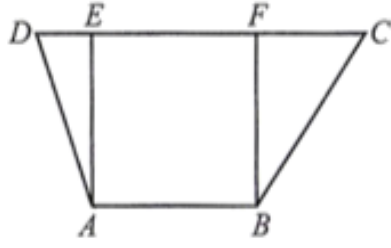


图1

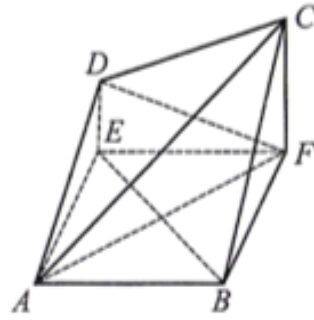
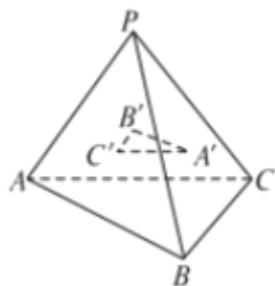


图2

- (1) 证明: $BE \parallel$ 平面 ACD ;
- (2) 求三棱锥 $C-AED$ 的体积.

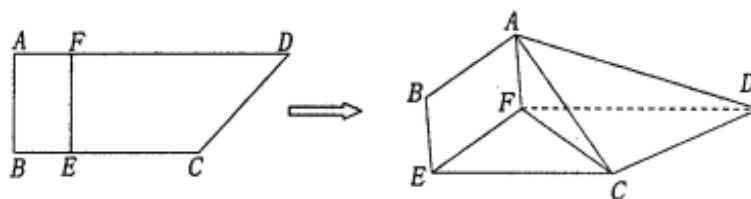
20. 如图, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, A', B', C' 分别是 $\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ 的重心.



(1) 求证: 平面 $A'B'C' \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比.

21. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD, AD \parallel BC, AD=6, BC=2AB=4, E, F$ 分别在 BC, AD 上, $EF \parallel AB$, 现将四边形 $ABCD$ 沿 EF 折起, 使 $BE \perp EC$.



(1) 若 $BE = 1$, 在折叠后的线段 AD 上是否存在一点 P , 使得 $CP \parallel$ 平面 $ABEF$? 若存在, 求出 $\frac{AP}{PD}$ 的值; 若不存在, 说明理由;

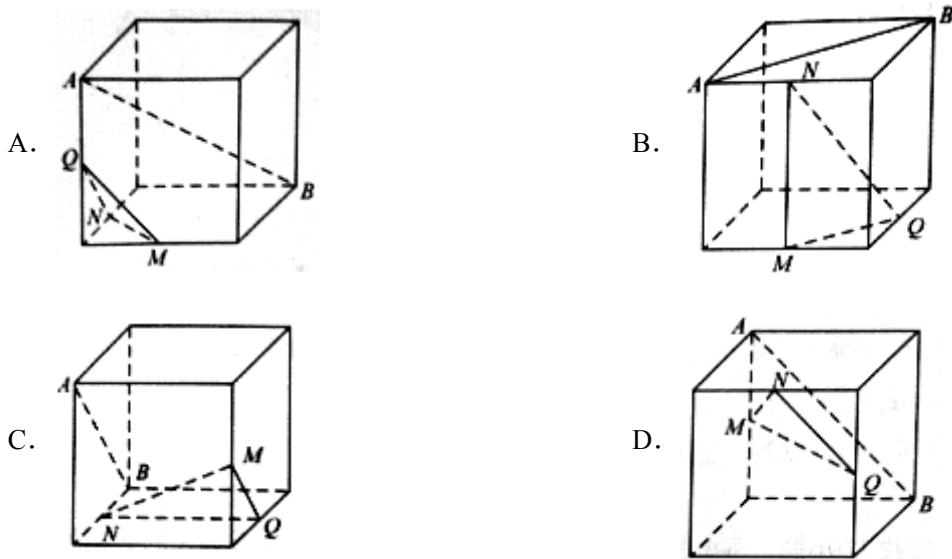
(2) 求三棱锥 $A - CDF$ 的体积的最大值, 并求出此时点 F 到平面 ACD 的距离.



1. (2019年高考全国II卷文数) 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
 B. α 内有两条相交直线与 β 平行
 C. α, β 平行于同一条直线
 D. α, β 垂直于同一平面

2. (2017新课标全国I文科) 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是



3. (2019年高考北京卷文数) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$; ② $m // \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.

4. (2019年高考天津卷文数节选) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD, CD = 2, AD = 3$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/508061024024007020>