

重庆市清华中学校高 2026 届高二上期 12 月检测

数学试题

(满分: 150 分时间: 120 分钟)

命题: 王悦 审题: 付伟 终审: 谭小刚

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $y = -x + m$ 的倾斜角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

答案: D

解析: 因为直线 $y = -x + m$ 的斜率为 $k = -1$,

设直线的倾斜角为 $\alpha, \alpha \in [0, \pi)$, 由 $k = \tan \alpha = -1$,

得到 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 所以直线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

故选: D.

2. 圆心为点 $(3, 4)$, 半径的平方为 5 的圆的一般方程为 ()

- A. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ B. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
C. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$ D. $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$

答案: B

解析: 圆心为点 $(3, 4)$, 半径的平方为 5 的圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$,

展开化为一般方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$.

故选: B.

3. 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 有相同离心率和相同渐近线的双曲线方程是 ()

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$

答案: C

解析: 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 中 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 2$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

对于 A: $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$, $e = 2$, 渐近线 $y = \pm \sqrt{3}x$, 故 A 错误;

对于 B: $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$, $e = 2$, 渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 故 B 错误;

对于 C: $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 故 C 正确;

对于 D: $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 渐近线 $y = \pm \sqrt{3}x$, 故 D 错误.

故选: C.

4. 椭圆 C 的左、右焦点分别记为 F_1 、 F_2 , 过左焦点 F_1 的直线交椭圆 C 于 A 、 B 两点. 若弦长 $|AB|$ 的最小值为 3, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8, 则椭圆 C 的焦距等于 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

答案: B

解析: 由题意可知 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$, $4a = 8$, $\therefore a = 2$, $b^2 = 3$, $\therefore c = 1$, 焦距等于 2

故选: B.

5. 下列说法错误的是 ()

A. 若空间中点 O, A, B, C 满足 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, 则 A, B, C 三点共线

B. 空间中的三个向量, 若有两个向量共线, 则这三个向量一定共面

C. $\vec{a} = (1, 1, x)$, $\vec{b} = (3, x, 9)$, 若 $x > -\frac{3}{10}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角

D. 对空间任意一点 O 和不共线三点 A, B, C , 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$, 则 P, A, B, C 共面

答案: C

解析: 对于选项 A: 因为 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$, 且 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$,

所以 A, B, C 三点共线, 故 A 正确;

对于选项 B: 由空间向量共面定理得, 对于空间中的三个向量,

若有两个向量共线, 则这三个向量一定共面, 故 B 正确;

对于选项 C: 例如 $x = 3 > -\frac{3}{10}$, 则 $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (3, 3, 9)$,

可知 $\vec{b} = 3\vec{a}$, 即 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向, 所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 0 , 故 C 错误;

对于选项 D: 由 $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$, 且 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$,

根据空间向量共面的推论知 P, A, B, C 四点共面, 故 D 正确;

故选: C

6. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 过点 $P(-4, 0)$ 的直线与双曲线 C 交于 A, B 两点, 若线段 AB 的中点是 $M(2, 6)$, 则双曲线 E 的离心率为 ()

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. 3

答案: A

解析: 由已知直线 AB 的方程为 $y = \frac{6}{2 - (-4)}(x + 4)$, 即 $y = x + 4$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \text{得} \quad (b^2 - a^2)x^2 + 8b^2x + 16b^2 - a^2b^2 = 0,$$

则 $\Delta = 64b^4 - 4(b^2 - a^2)(16b^2 - a^2b^2) = 4a^2b^2(b^2 - a^2 + 16) > 0$ 即 $a^2 < b^2 + 16$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{8b^2}{a^2 - b^2}$, $x_1x_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2}$,

线段 AB 的中点是 $M(2, 6)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{8b^2}{a^2 - b^2} = 2 \times 2$ ， $a^2 = 3b^2 = 3(c^2 - a^2)$ ，

整理得 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，即 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

故选：A.

7. 已知直线 $l: 4x + 3y + 5 = 0$ 与圆 $C: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ，点 P, Q 在直线 l 上，过点 P 作圆 C 的切线，

切点分别为 A, B ，当 $|PA|$ 取最小值时，则 $|QA| + |QB|$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{31}$ B. $2\sqrt{31}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{33}$

答案：C

解析：由 $C: (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 可知圆心为 $(4, 3)$ ，半径 $r = 2$ ，

由题意 $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{|PC|^2 - 4}$ ，

所以当 $PC \perp l$ 时， $|PA|$ 取最小值，

由点到直线的距离公式可得 $|PC|_{\min} = \frac{|4 \times 4 + 3 \times 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 6$ ，

此时 $|PA| = |PB| = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ ，

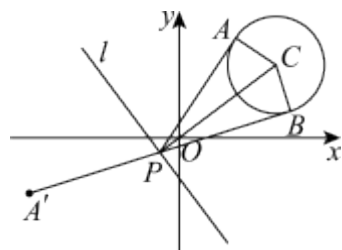
过 A 作直线 l 的对称点 A' ，连接 QA' ， $A'B$ ， $A'B$ 与直线 l 的交点即为所求的点 Q ，

由于 PA 与 PB 关于直线 PC 对称， $PC \perp l$ ， PA 与 PA' 关于直线 l 对称，

因此 PA' 与 $A'B$ 就是同一条直线，即点 P 即为所求的点 Q ，

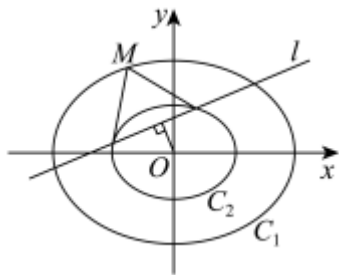
所以 $|QA| + |QB|$ 的最小值为 $2|PB| = 8\sqrt{2}$ 。

故选：C



8. 从椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 向椭圆引两条切线，切点分别为 A, B ，则直线 AB 称

作点 P 关于椭圆 C 的极线，其方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ ，现有如图所示的两个椭圆 C_1, C_2 ，离心率分别为 e_1, e_2 ， C_2 内含于 C_1 ，椭圆 C_1 上的任意一点 M 关于 C_2 的极线为 l ，若原点 O 到直线 l 的距离为 1，则 $2e_1^2 - e_2^2$ 的最大值为 ()



- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{9}{8}$

答案：D

解析：设 $M(x_0, y_0)$ ，椭圆 C_1 方程： $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ ，椭圆 C_2 方程： $\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ ，

则有 $\frac{x_0^2}{a_1^2} + \frac{y_0^2}{b_1^2} = 1$ ①，

由极线的定义得直线 l 的方程为 $\frac{x_0 x}{a_2^2} + \frac{y_0 y}{b_2^2} = 1$ ，即 $\frac{x_0 x}{a_2^2} + \frac{y_0 y}{b_2^2} - 1 = 0$ ，

原点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a_2^4} + \frac{y_0^2}{b_2^4}}} = 1$ ，化简得 $\frac{x_0^2}{a_2^4} + \frac{y_0^2}{b_2^4} = 1$ ②，

对比①②式得出 $a_1^2 = a_2^4$ ， $b_1^2 = b_2^4$ ，

则有 $e_1^2 = 1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} = 1 - \frac{b_2^4}{a_2^4} = \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2}\right) \left(1 + \frac{b_2^2}{a_2^2}\right) = e_2^2 (2 - e_2^2)$ ，

因为椭圆的离心率在 $(0, 1)$ 内，所以 $3 - 2e_2^2 > 0$ ，

所以 $2e_1^2 - e_2^2 = e_2^2 (3 - 2e_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 2e_2^2 (3 - 2e_2^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2e_2^2 + 3 - 2e_2^2}{2} \right)^2 = \frac{9}{8}$ ，

当且仅当 $2e_2^2 = 3 - 2e_1^2$, 即 $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等, 此时 $e_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $2e_1^2 - e_2^2$ 的最大值为 $\frac{9}{8}$.

故选: D

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$, 则椭圆 C 的 ()

- A. 焦点在 y 轴上 B. 长轴长为 10 C. 短轴长为 4 D. 离心率为 $\frac{3}{5}$

答案: ABD

解析: 由 $C: \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ 知, $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, 椭圆的焦点在 y 轴上, 故 A 正确;

$a = 5$, 长轴长为 $2a = 10$, 故 B 正确;

$b = 4$, 短轴长为 $2b = 8$, 故 C 错误;

离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{3}{5}$, 故 D 正确.

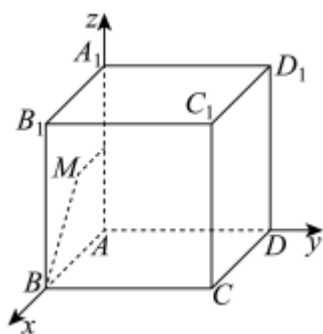
故选: ABD.

10. 在正方体 AC_1 中, 点 M 为平面 ABB_1A_1 内的一动点, d_1 是点 M 到平面 ADD_1A_1 的距离, d_2 是点 M 到直线 BC 的距离, 且 $d_1 = \lambda d_2 (\lambda > 0)$ (λ 为常数), 则点 M 的轨迹可能是 ()

- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

答案: BCD

解析: 由题意, 建立如图空间直角坐标系 $A-xyz$,



设正方体的棱长为 $a(a > 0)$, $M(x, 0, z)$,

则 $d_1 = |x|$, $d_2 = \sqrt{(a-x)^2 + z^2}$, 由 $d_1 = \lambda d_2 (\lambda > 0)$,

得 $|x|^2 = \lambda^2[(a-x)^2 + z^2]$, 即 $\lambda^2 z^2 + (\lambda^2 - 1)x^2 - 2\lambda^2 ax = -\lambda^2 a^2 (\lambda > 0)$ ①,

当 $\lambda = 1$ 时, ①式化得: $z^2 = 2ax - a^2$,

此时点 M 的轨迹为抛物线;

当 $\lambda \neq 1$ 时, ①式化得: $\lambda^2 z^2 + (\lambda^2 - 1)(x^2 - \frac{2\lambda^2 ax}{\lambda^2 - 1}) = -\lambda^2 a^2$,

即 $\lambda^2 z^2 + (\lambda^2 - 1)(x - \frac{\lambda^2 a}{\lambda^2 - 1})^2 = -\lambda^2 a^2 + \frac{\lambda^4 a^2}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 - 1}$,

等式两边同时除以 $\lambda^2(\lambda^2 - 1)$, 得 $\frac{z^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{(x - \frac{\lambda^2 a}{\lambda^2 - 1})^2}{\lambda^2} = \frac{a^2}{(\lambda^2 - 1)^2} > 0$ ②,

当 $0 < \lambda < 1$ 时, $\lambda^2 - 1 < 0$, 则②式为双曲线方程, 即点 M 的轨迹为双曲线;

当 $\lambda > 1$ 时, $\lambda^2 - 1 > 0$, 则②式为椭圆方程, 即点 M 的轨迹为椭圆.

故选: BCD

11. 已知点 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点, 过原点 O 的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 点

M 是椭圆上异于 P, Q 的一点, 直线 MP, MQ 分别为 k_1, k_2 , 椭圆的离心率为 e , 若 $|PF| = 3|QF|$,

$\angle PFQ = \frac{2\pi}{3}$, 则 ()

A. $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

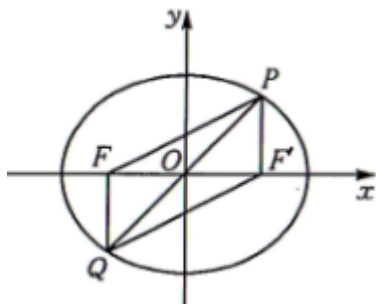
B. $e = \frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $k_1 k_2 = -\frac{9}{16}$

D. $k_1 k_2 = \frac{9}{16}$

答案: AC

解析: 设椭圆的右焦点 F' ,



连接 PF' , QF' , 根据椭圆对称性可知四边形 $PFQF'$ 为平行四边形,

则 $|QF| = |PF'|$, 且由 $\angle PFQ = 120^\circ$, 可得 $\angle FPF' = 60^\circ$,

所以 $|PF| + |PF'| = 4|PF'| = 2a$, 则 $|PF'| = \frac{1}{2}a$, $|PF| = \frac{3}{2}a$.

由余弦定理可得 $(2c)^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 - 2|PF| \cdot |PF'| \cos 60^\circ = \frac{9}{4}a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \times \frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}$,

所以 $c^2 = \frac{7}{16}a^2$, 所以椭圆的离心率 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

设 $M(x_0, y_0)$, $P(x_1, y_1)$, 则 $Q(-x_1, -y_1)$, $k_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$, $k_2 = \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1}$,

所以 $k_1 k_2 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}$, 又 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 相减可得 $\frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2}$.

因为 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{7}{16}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{16}$, 所以 $k_1 k_2 = -\frac{9}{16}$.

故选: AC.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若抛物线 $y^2 = 16x$ 上的点 M 到焦点的距离为 9, 则它到 y 轴的距离是_____.

答案: 5

解析: 根据抛物线 $y^2 = 2px$ 的形式可得, $y^2 = 16x$ 中 $2p = 16$, 则 $p = 8$,

所以准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -4$ ，焦点坐标为 $F(4, 0)$ ，

根据抛物线上的点到焦点的距离等于其到准线的距离，

因为点 M 到焦点的距离为 9，所以点 M 到准线 $x = -4$ 的距离为 9，

设点 M 的横坐标为 x_M ，则 $x_M - (-4) = 9$ ，解得 $x_M = 5$ ，

所以点 M 到 y 轴的距离是 5，

故答案为：5.

13. 画法几何学的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是

以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的蒙日

圆方程为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. 若圆 $(x-4)^2 + (y-\lambda)^2 = 9$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的蒙日圆有且仅有一个公共点，
则 λ 的值为_____.

答案： ± 3

解析：对于椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ，其中 $a^2 = 3$ ， $b^2 = 1$ ，根据蒙日圆方程 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，

可得蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 3 + 1 = 4$ ，其圆心坐标为 $(0, 0)$ ，半径 $r_1 = 2$.

圆 $(x-4)^2 + (y-\lambda)^2 = 9$ ，其圆心坐标为 $(4, \lambda)$ ，半径 $r_2 = 3$.

因为两圆有且仅有一个公共点，所以两圆内切或外切.

当两圆外切时，两圆的圆心距等于两圆半径之和.

两圆的圆心距 $d = \sqrt{(4-0)^2 + (\lambda-0)^2} = \sqrt{16 + \lambda^2}$ ，由 $d = r_1 + r_2$ ，即 $\sqrt{16 + \lambda^2} = 5$ ，

两边平方得 $16 + \lambda^2 = 25$ ，解得 $\lambda^2 = 9$ ，所以 $\lambda = \pm 3$.

当两圆内切时，两圆的圆心距等于两圆半径之差的绝对值.

由 $d = |r_1 - r_2|$ ，即 $\sqrt{16 + \lambda^2} = |2 - 3| = 1$ ，两边平方得 $16 + \lambda^2 = 1$ ， $\lambda^2 = -15$ （无解）.

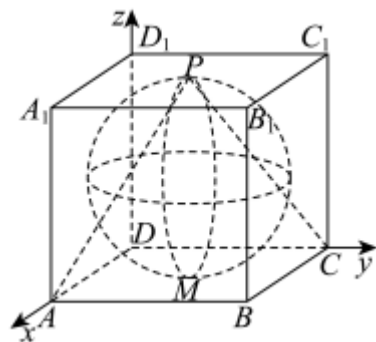
所以 λ 的值为 ± 3 .

故答案为: ± 3 .

14. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一内切球 O , 点 P 在球 O 的表面上运动, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的取值范围为_____.

答案: $[-2, 2]$

解析: 以点 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(0, 2, 0)$,



设点 $P(x, y, z)$, 所以 $\overrightarrow{PA} = (2-x, -y, -z)$, $\overrightarrow{PC} = (-x, 2-y, -z)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = -x(2-x) - y(2-y) + z^2$

$$= x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 2,$$

因为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$ 表示点 $P(x, y, z)$ 与点 $M(1, 1, 0)$ 之间距离的平方,

所以当点 P 的坐标为 $P(1, 1, 2)$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最大值为 $2^2 - 2 = 2$,

当 P 与点 $M(1, 1, 0)$ 重合时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取得最小值 -2 , 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的取值范围为 $[-2, 2]$.

故答案为: $[-2, 2]$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 已知 a 为实数, 设直线 $l_1: (a+3)x + 2y + 2 = 0, l_2: 2x + ay + (3a-2) = 0$.

(1) 若 $l_1 \perp l_2$, 求 a 的值;

(2) 若 $l_1 \parallel l_2$, 求 l_1 与 l_2 的距离.

答案: (1) $-\frac{3}{2}$

(2) $\sqrt{5}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/508061060077007010>