

新疆石河子第一中学 2024 届数学高三第一学期期末学业质量监测模拟试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α , 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\pm\frac{4}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

2. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 12$, 则公比 $q =$ ()

- A. ± 4 B. 4 C. ± 2 D. 2

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + x$, 则 $a = f(-2^{\frac{3}{2}})$, $b = f(\log_2 9)$, $c = f(\sqrt{5})$ 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

4. 设 $a, b \in (1, +\infty)$, 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 $|PF_2| = 2$, 则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 ()

- A. 150° B. 135° C. 120° D. 90°

6. $(x^3 - 1)\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 ()

- A. -60 B. 240 C. -80 D. 180

7. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-3) \leq 0\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则 $C_U A =$ ()

- A. $\{-1, 3\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 3\}$ D. $\{-1, 0, 3\}$

8. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, -1)$, 则 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ C. $\vec{a} \parallel (\vec{a} - \vec{b})$ D. $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$

9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 S_n 为前 n 项和, $2a_9 = a_{11} + 12$, 则 S_{13} 的值是 ()

- A. 156 B. 124 C. 136 D. 180

10. 一个超级斐波那契数列是一列具有以下性质的正整数:从第三项起, 每一项都等于前面所有项之和(例如:1, 3, 4, 8, 16...), 则首项为 2, 某一项为 2020 的超级斐波那契数列的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

11. 已知函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$, 在

区间 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1) = 3$, 则 ω 的最大值为 ()

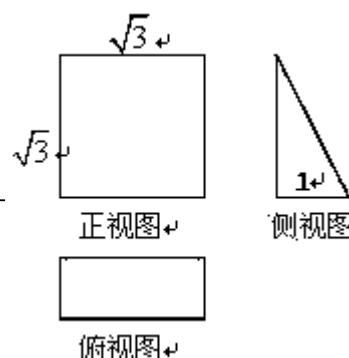
- A. $\frac{123}{4}$ B. $\frac{111}{4}$ C. $\frac{105}{4}$ D. $\frac{117}{4}$

12. 下列不等式成立的是 ()

- A. $\sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

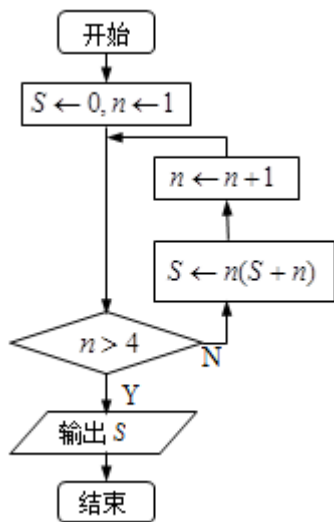
13. 一个空间几何体的三视图及部分数据如图所示, 则这个几何体的体积是_____



14. 函数 $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x \left(x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域为_____.

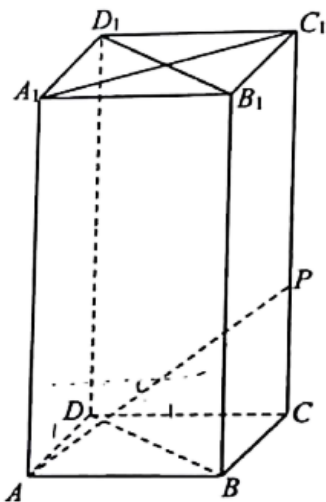
15. 若 $ax\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ 展开式中的常数项为 240, 则实数 a 的值为_____.

16. 执行如图所示的程序框图, 则输出的结果是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在底面边长为 1，侧棱长为 2 的正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是侧棱 CC_1 上的一点， $CP = m$.



(1) 若 $m = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角；

(2) 在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 Q ，使得对任意的实数 m ，都有 $D_1Q \perp AP$ ，并证明你的结论.

18. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求矩阵 M 的特征值及其相应的特征向量.

19. (12 分) 等差数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 中， a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且其中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	8	2

第二行	4	3	12
第三行	16	6	9

- (1) 请选择一个可能的 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 组合，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 记 (1) 中您选择的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，判断是否存在正整数 k ，使得 a_1, a_k, S_{k+2} 成等比数列，若有，请求出 k 的值；若没有，请说明理由.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都为正数， $a_1 = 2$ ，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a_n}{a_{n+1}} + 1$.

- (I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (II) 设 $b_n = \left[\lg(\log_2 a_n) \right]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9] = 0$ ， $[\lg 99] = 1$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 2020 项和.

21. (12 分) 对于很多人来说，提前消费的认识首先是源于信用卡，在那个工资不高的年代，信用卡绝对是神器，稍微大件的东西都是可以选择用信用卡来买，甚至于分期买，然后慢慢还！现在银行贷款也是很风靡的，从房贷到车贷到一般的现金贷．信用卡“忽如一夜春风来”，遍布了各大小城市的大街小巷．为了解信用卡在 A 市的使用情况，某调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中随机抽取了 100 人进行抽样分析，得到如下 2×2 列联表（单位：人）

	经常使用信用卡	偶尔或不用信用卡	合计
40 岁及以下	15	35	50
40 岁以上	20	30	50
合计	35	65	100

- (1) 根据以上数据，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为 A 市使用信用卡情况与年龄有关？
- (2) ①现从所抽取的 40 岁及以下的网民中，按“经常使用”与“偶尔或不用”这两种类型进行分层抽样抽取 10 人，然后，再从这 10 人中随机选出 4 人赠送积分，求选出的 4 人中至少有 3 人偶尔或不用信用卡的概率；
- ②将频率视为概率，从 A 市所有参与调查的 40 岁以上的网民中随机抽取 3 人赠送礼品，记其中经常使用信用卡的人数为 X ，求随机变量 X 的分布列、数学期望和方差.

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据：

$P(K^2 \dots k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

22. (10 分) 设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$. 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$, 其中 $e_1 < e_2 < \dots < e_l$, $l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$. 定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行, 若其中有 k 或 $-k$, 则将这一行中每个数都乘以 -1 ; 若其中没有 k 且没有 $-k$, 则这一行中所有数均保持不变” ($k = e_1, e_2, \dots, e_l$). $\varphi_S(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 , 再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 $A_2, \dots$, 以此类推, 最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”, 记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_S(A_0)$.

(1) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, 写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ;

(2) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \{1, 3\}$, 求 $T_S(A_0)$ 的值;

(3) 对任意确定的一个数阵 A_0 , 证明: $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据题意可得 $\tan \alpha = -2$, 所求式子利用二倍角的正弦函数公式化简, 再利用同角三角函数间的基本关系弦化切后, 将 $\tan \alpha = -2$ 代入计算即可求出值.

【详解】

由于直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α , 所以 $\tan \alpha = -2$,

$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{-2 \times 2}{(-2)^2 + 1} = -\frac{4}{5}$$

故答案选 B

【点睛】

本题考查二倍角的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及直线倾斜角与斜率之间的关系，熟练掌握公式是解本题的关键.

2、D

【解析】

由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，两式相除即可解出 q 。

【详解】

解：由 $S_2 = 3$ 得 $a_1 + a_2 = 3$ ，

又 $a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)q^2 = 12$ ，

$\therefore q^2 = 4$ ， $\therefore q = -2$ ，或 $q = 2$ ，

又正项等比数列 $\{a_n\}$ 得 $q > 0$ ，

$\therefore q = 2$ ，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查等比数列的性质的应用，属于基础题.

3、C

【解析】

根据函数的奇偶性得 $a = f(-2^{\frac{3}{2}}) = f(2^{\frac{3}{2}})$ ，再比较 $\sqrt{5}, 2^{\frac{3}{2}}, \log_2 9$ 的大小，根据函数的单调性可得选项.

【详解】

依题意得 $a = f(-2^{\frac{3}{2}}) = f(2^{\frac{3}{2}})$ ， $\because \sqrt{5} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} < 3 = \log_2 8 < \log_2 9$ ，

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x + x$ ，因为 $e > 1$ ，所以 $y = e^x$ 在 R 上单调递增，又 $y = x$ 在 R 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(\log_2 9) > f(2^{\frac{3}{2}}) > f(\sqrt{5})$ ，即 $b > a > c$ ，

故选：C.

【点睛】

本题考查函数的奇偶性的应用、幂、指、对的大小比较，以及根据函数的单调性比较大小，属于中档题.

4、C

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算进行判断即可.

【详解】

$$\because a, b \in (1, +\infty),$$

$$\therefore a > b \Rightarrow \log_a b < 1,$$

$$\log_a b < 1 \Rightarrow a > b,$$

$\therefore a > b$ 是 $\log_a b < 1$ 的充分必要条件,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 根据不等式的解法是解决本题的关键.

5、C

【解析】

根据椭圆的定义可得 $|PF_1| = 4$, $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$, 再利用余弦定理即可得到结论.

【详解】

由题意, $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$, $|PF_1| + |PF_2| = 6$, 又 $|PF_2| = 2$, 则 $|PF_1| = 4$,

$$\text{由余弦定理可得 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16 + 4 - 28}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{2}.$$

故 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$.

故选: C.

【点睛】

本题考查椭圆的定义, 考查余弦定理, 考查运算能力, 属于基础题.

6、D

【解析】

求 $(x^3 - 1)\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项, 可转化为求 $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项和 $\frac{1}{x^3}$ 项, 再求和即可得出答案.

【详解】

由题意, $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6$ 中常数项为 $C_6^2 (\sqrt{x})^4 \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 60$,

$$\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^6 \text{ 中 } \frac{1}{x^3} \text{ 项为 } C_6^4 (\sqrt{x})^2 \left(\frac{2}{x}\right)^4 = 240 \frac{1}{x^3},$$

所以 $(x^3-1)\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为:

$$x^3 \times 240 \frac{1}{x^3} - 1 \times 60 = 180.$$

故选: D

【点睛】

本题主要考查二项式定理的应用和二项式展开式的通项公式, 考查学生计算能力, 属于基础题.

7、A

【解析】

先求得全集包含的元素, 由此求得集合 A 的补集.

【详解】

由 $(x+1)(x-3) \leq 0$ 解得 $-1 \leq x \leq 3$, 故 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 所以 $C_U A = \{-1, 3\}$, 故选 A.

【点睛】

本小题主要考查补集的概念及运算, 考查一元二次不等式的解法, 属于基础题.

8、D

【解析】

由题意利用两个向量坐标形式的运算法则, 两个向量平行、垂直的性质, 得出结论.

【详解】

$\because$ 向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, -1)$, $\therefore \vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的坐标对应不成比例, 故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不平行, 故排除 A;

显然, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 \neq 0$, 故 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不垂直, 故排除 B;

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = (-2, -1)$, 显然, $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标对应不成比例, 故 $\vec{a}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 不平行, 故排除 C;

$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2 + 2 = 0$, 故 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 故 D 正确,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查两个向量坐标形式的运算, 两个向量平行、垂直的性质, 属于基础题.

9、A

【解析】

因为 $a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12$, 可得 $a_7 = 12$, 根据等差数列前 n 项和, 即可求得答案.

【详解】

$$\text{Q } a_7 + a_{11} = 2a_9 = a_{11} + 12,$$

$$\therefore a_7 = 12,$$

$$\therefore S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 13 \times 12 = 156.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前 n 项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前 n 项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

10、A

【解析】

根据定义，表示出数列的通项并等于 2020. 结合 n 的正整数性质即可确定解的个数.

【详解】

由题意可知首项为 2，设第二项为 t ，则第三项为 $2+t$ ，第四项为 $2(2+t)$ ，第五项为 $2^2(2+t) \cdots$ 第 n 项为

$$2^{n-3}(2+t), n, t \in N^*, \text{ 且 } n \geq 3,$$

$$\text{则 } 2^{n-3}(2+t) = 2020,$$

$$\text{因为 } 2020 = 2^2 \times 5 \times 101,$$

当 $n-3$ 的值可以为 0, 1, 2;

即有 3 个这种超级斐波那契数列，

故选：A.

【点睛】

本题考查了数列新定义的应用，注意自变量的取值范围，对题意理解要准确，属于中档题.

11、C

【解析】

根据 $f(x)$ 的零点和最值点列方程组，求得 ω, φ 的表达式 (用 k 表示)，根据 $f(x_1)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值，

求得 ω 的取值范围，求得对应 k 的取值范围，由 k 为整数对 k 的取值进行验证，由此求得 ω 的最大值.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/508072002007006051>