

河南省淅川县第一高级中学 2024 年高三第一次模拟考试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知四棱锥 $E-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形， $ED=1$ ，平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$ ，当点 C 到平面 ABE 的距离最大时，该四棱锥的体积为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. 1

2. 函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 a 的值为（ ）

- A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

3. 下列选项中，说法正确的是（ ）

A. “ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 > 0$ ”

B. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角

C. 若 $am^2 \leq bm^2$ ，则 $a \leq b$

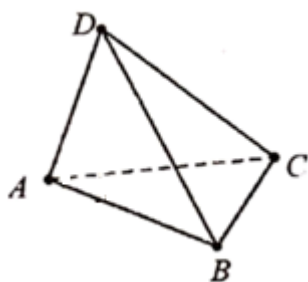
D. “ $x \in (A \cup B)$ ”是“ $x \in (A \cap B)$ ”的必要条件

4. 已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 为（ ）

A. $\exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ B. $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$

C. $\exists x_0 \leq 2, x_0^3 - 8 \leq 0$ D. $\forall x \leq 2, x^3 - 8 \leq 0$

5. 如图，已知三棱锥 $D-ABC$ 中，平面 $DAB \perp$ 平面 ABC ，记二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 α ，直线 DA 与平面 ABC 所成角为 β ，直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ ，则（ ）



- A. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ B. $\beta \geq \alpha \geq \gamma$ C. $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ D. $\gamma \geq \alpha \geq \beta$

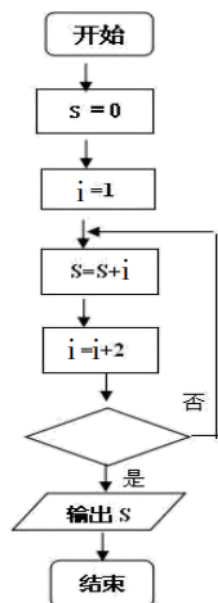
6. 设非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 满足 $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}|=1$, 且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 θ , 则“ $|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{3}$ ”是“ $\theta=\frac{\pi}{3}$ ”的 ().

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知向量 $\vec{OA}=(-3,4)$, $\vec{OA}+\vec{OB}=(-1,5)$, 则向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 阅读如图的程序框图, 若输出的值为 25, 那么在程序框图中的判断框内可填写的条件是 ()



- A. $i > 5$ B. $i > 8$ C. $i > 10$ D. $i > 12$

9. 设 $a, b \in (1, +\infty)$, 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 设 $a = \log_2 3$, $b = \log_4 6$, $c = 5^{-0.1}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

11. 在直角坐标平面上, 点 $P(x, y)$ 的坐标满足方程 $x^2 - 2x + y^2 = 0$, 点 $Q(a, b)$ 的坐标满足方程

$a^2 + b^2 + 6a - 8b + 24 = 0$ 则 $\frac{y-b}{x-a}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-2, 2]$ B. $\left[\frac{-4-\sqrt{7}}{3}, \frac{-4+\sqrt{7}}{3}\right]$ C. $\left[-3, -\frac{1}{3}\right]$ D. $\left[\frac{6-\sqrt{7}}{3}, \frac{6+\sqrt{7}}{3}\right]$

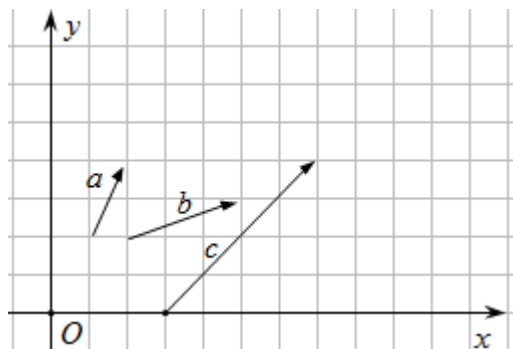
12. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = 2\sqrt{2}x$, F_1, F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点, 点 P

在双曲线 C 上, 且 $|PF_1| = 3$, 则 $|PF_2| = (\quad)$

- A. 9 B. 5 C. 2 或 9 D. 1 或 5

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图所示, 直角坐标系中网格小正方形的边长为 1, 若向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, 则实数 t 的值为_____.



14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos C = b \cos C + c \cos B$, 则 $C =$ _____.

15. 执行以下语句后, 打印纸上打印出的结果应是: _____.

```

i ← 1
x ← 4
While i < 10
  x ← x + 2i
  i ← i + 3
End While
Print "x = " x

```

16. 根据记载, 最早发现勾股定理的人应是我国西周时期的数学家商高, 商高曾经和周公讨论过“勾 3 股 4 弦 5”的问题. 现有 $\triangle ABC$ 满足“勾 3 股 4 弦 5”, 其中“股” $AB = 4$, D 为“弦” BC 上一点 (不含端点), 且 $\triangle ABD$ 满足勾股定理, 则 $(\vec{CB} - \vec{CA}) \cdot \vec{AD} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 (a > 0)$ (其中 $e = 2.718L$ 是自然对数的底数)

(1) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 求正数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)f(x)$ 在 $x = x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 处导数相等, 证明: $x_1 + x_2 < 2 \ln 2a$;

(3) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明: 对于任意 $k \leq \frac{1}{e} + 1$, 若 $b < \frac{1}{2}$, 则直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点 (注: 当 $k > 1$

时, 直线 $y = x + k$ 与曲线 $y = e^x$ 的交点在 y 轴两侧)。

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 在直线 $x + y - 1 = 0$

附：对于一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别

为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

20. (12 分) 已知 $a, b \in (0, +\infty)$ ， $a(1-b) = b(a-1)$ ， $f(x) = |2x+1| + |x-2|$ 。

- (1) 求 $a^2 + b^2$ 的最小值；
- (2) 若对任意 $a, b \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(x) \leq 4(a^2 + b^2)$ ，求实数 x 的取值范围。

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为

极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = -2\sin\theta$ 。

- (1) 求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的普通方程；
- (2) 若 P, Q 分别为曲线 C_1, C_2 上的动点，求 $|PQ|$ 的最大值。

22. (10 分) 在国家“大众创业，万众创新”战略下，某企业决定加大对某种产品的研发投入.为了对新研发的产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格试销，得到一组检测数据如表所示：

试销价格 x (元)	4	5	6	7	8	9
产品销量 y (件)	89	83	82	79	74	67

已知变量 x, y 且有线性负相关关系，现有甲、乙、丙三位同学通过计算求得回归直线方程分别为：甲 $\bar{y} = 4x + 53$ ； 乙 $\bar{y} = -4x + 105$ ； 丙 $\bar{y} = -4.6x + 104$ ，其中有且仅有一位同学的计算结果是正确的。

- (1) 试判断谁的计算结果正确？
- (2) 若由线性回归方程得到的估计数据与检测数据的误差不超过1，则称该检测数据是“理想数据”，现从检测数据中随机抽取3个，求“理想数据”的个数为2的概率。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

过点 E 作 $EH \perp CD$ ，垂足为 H ，过 H 作 $HF \perp AB$ ，垂足为 F ，连接 EF 。因为 $CD \parallel$ 平面 ABE ，所以点 C 到平面 ABE

的距离等于点 H 到平面 ABE 的距离 h 。设 $\angle CDE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，将 h 表示成关于 θ 的函数，再求函数的最值，即可

得答案。

【详解】

过点 E 作 $EH \perp CD$ ，垂足为 H ，过 H 作 $HF \perp AB$ ，垂足为 F ，连接 EF 。

因为平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EH \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $EH \perp HF$ 。

因为底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形， $HF \parallel AD$ ，所以 $HF = AD = 1$ 。

因为 $CD \parallel$ 平面 ABE ，所以点 C 到平面 ABE 的距离等于点 H 到平面 ABE 的距离。

易证平面 $EFH \perp$ 平面 ABE ，

所以点 H 到平面 ABE 的距离，即为 H 到 EF 的距离 h 。

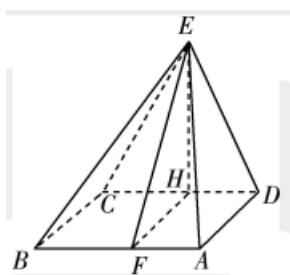
不妨设 $\angle CDE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，则 $EH = \sin \theta$ ， $EF = \sqrt{1 + \sin^2 \theta}$ 。

因为 $S_{\triangle EFH} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot FH$ ，所以 $h \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \theta} = \sin \theta$ ，

所以 $h = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} + 1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，等号成立。

此时 EH 与 ED 重合，所以 $EH = 1$ ， $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}$ 。

故选：B。



【点睛】

本题考查空间中点到面的距离的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查空间想象能力和运算求解能力，求解时注意辅助线及面面垂直的应用.

2、A

【解析】

求出 $f'(x) = 6x^2 - 2ax$ ，对 a 分类讨论，求出 $(0, +\infty)$ 单调区间和极值点，结合三次函数的图像特征，即可求解.

【详解】

$$f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{a}{3}),$$

若 $a \leq 0$ ， $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) > 0$ ，

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $f(0) = 1 > 0$ ，

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不存在零点；

若 $a > 0$ ， $x \in (0, \frac{a}{3})$, $f'(x) < 0$, $x \in (\frac{a}{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0$ ，

$f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点，

$$f(\frac{a}{3}) = -\frac{1}{27}a^3 + 1 = 0, \therefore a = 3.$$

故选:A.

【点睛】

本题考查函数的零点、导数的应用，考查分类讨论思想，熟练掌握函数图像和性质是解题的关键，属于中档题.

3、D

【解析】

对于 A 根据命题的否定可得：“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R, x^2 - x > 0$ ”，即可判断出；对于 B 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角或平角；对于 C 当 $m=0$ 时，满足 $am^2 \leq bm^2$ ，但是 $a \leq b$ 不一定成立；对于 D 根据元素与集合的关系即可做出判断.

【详解】

选项 A 根据命题的否定可得：“ $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R, x^2 - x > 0$ ”，因此 A 不正确；

选项 B 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角或平角，因此不正确.

选项 C 当 $m=0$ 时，满足 $am^2 \leq bm^2$ ，但是 $a \leq b$ 不一定成立，因此不正确；

选项 D 若“ $x \in (A \cap B)$ ”，则 $x \in A$ 且 $x \in B$ ，所以一定可以推出“ $x \in (A \cup B)$ ”，因此“ $x \in (A \cup B)$ ”

”是“ $x \in (A \mid B)$ ”的必要条件，故正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查命题的真假判断与应用，涉及知识点有含有量词的命题的否定、不等式性质、向量夹角与性质、集合性质等，属于简单题.

4、B

【解析】

利用特称命题的否定分析解答得解.

【详解】

已知命题 $p: \exists x_0 > 2, x_0^3 - 8 > 0$ ，那么 $\neg p$ 是 $\forall x > 2, x^3 - 8 \leq 0$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查特称命题的否定，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题.

5、A

【解析】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E , 分析可得 $\alpha = \angle DED'$, $\beta = \angle DAD'$, 再根据正弦的大小关系判断分析得 $\alpha \geq \beta$,

再根据线面角的最小性判定 $\beta \geq \gamma$ 即可.

【详解】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E .

因为平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , $DD' \perp$ 平面 ABC . 故 $AC \perp DE$, $AC \perp DD'$,

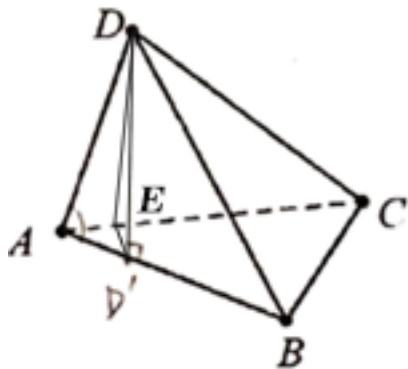
故 $AC \perp$ 平面 DED' . 故二面角 $D-AC-B$ 为 $\alpha = \angle DED'$.

又直线 DA 与平面 ABC 所成角为 $\beta = \angle DAD'$, 因为 $DA \geq DE$,

故 $\sin \angle DED' = \frac{DD'}{DE} \geq \frac{DD'}{DA} = \sin \angle DAD'$. 故 $\alpha \geq \beta$, 当且仅当 A, E 重合时取等号.

又直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 且 $\beta = \angle DAD'$ 为直线 AB 与平面 ADC 内的直线 AD 所成角, 故 $\beta \geq \gamma$, 当且仅当 $BD \perp$ 平面 ADC 时取等号.

故 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.



故选：A

【点睛】

本题主要考查了线面角与线线角的大小判断,需要根据题意确定角度的正弦的关系,同时运用线面角的最小性进行判定.属于中档题.

6、C

【解析】

利用数量积的定义可得 θ ，即可判断出结论.

【详解】

解： $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}$ ， $\therefore \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} = 3$ ， $\therefore 2^2 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \theta = 3$ ，

解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ， $\theta \in [0, \pi]$ ， 解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，

$\therefore$ “ $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}$ ”是“ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ”的充分必要条件.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用，考查推理能力与计算能力，属于基础题.

7、A

【解析】

先利用向量坐标运算求解 $\vec{OB}$ ，再利用向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影公式即得解

【详解】

由于向量 $\vec{OA} = (-3, 4)$ ， $\vec{OA} + \vec{OB} = (-1, 5)$

故 $\vec{OB} = (2, 1)$

向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \frac{-3 \times 2 + 4 \times 1}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/508102142124007032>