

四川省眉山市仁寿县文宫中学 2023 年重点高中联盟领军考试 4 月高三数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{|x|} + 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$ ，则不等式 $f(\lg x) > 3$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{10}, 10 \right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{10} \right) \cup (10, +\infty)$ C. $(1, 10)$ D. $\left(\frac{1}{10}, 1 \right) \cup (1, 10)$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 a_1 ， a_3 ， a_2 成等差数列，则公比 q 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. -1 或 $\frac{1}{2}$ D. 1 或 $-\frac{1}{2}$

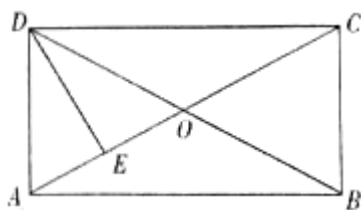
3. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ ，过抛物线 C 上两点 A, B 分别作抛物线的两条切线 PA, PB ， P 为两切线的交点 O 为坐标原点若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ ，则直线 OA 与 OB 的斜率之积为 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. -3 C. $-\frac{1}{8}$ D. -4

4. 已知向量 $\vec{a} = (m, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ，若 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 ()

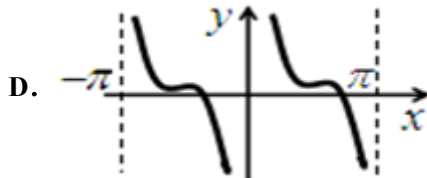
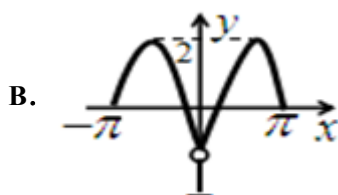
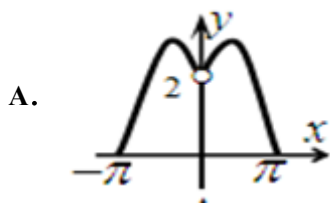
- A. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $-\frac{6\sqrt{13}}{65}$ D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

5. 如图所示，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， E 为 AO 的中点，若 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} (\lambda, \mu \in R)$ ，则 $\lambda + \mu$ 等于 ()。



- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

6. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x} \right) \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象是 ()



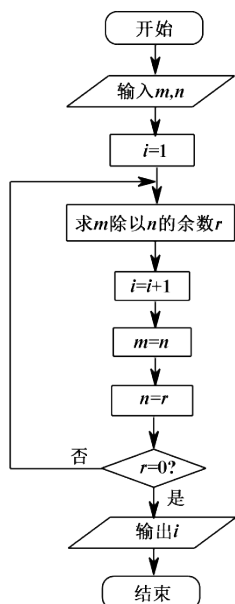
7. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右顶点为 A ，右焦点为 F ，过点 F 作平行 C 的一条渐近线的直线与 C 交于点 B ，则 $\triangle AFB$ 的面积为 ()

- A. $\frac{32}{15}$ B. $\frac{64}{15}$ C. 5 D. 6

8. 已知直线 $l: \sqrt{3}x + y + 2 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点，与 l 平行的直线 l_1 与圆 O 交于 M, N 两点，且 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OMN$ 的面积相等，给出下列直线 l_1 : ① $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$, ② $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$, ③ $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$, ④ $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$. 其中满足条件的所有直线 l_1 的编号有 ()

- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ①②④

9. 执行如图所示的程序框图，若输入 $m = 2020$, $n = 520$ ，则输出的 $i =$ ()

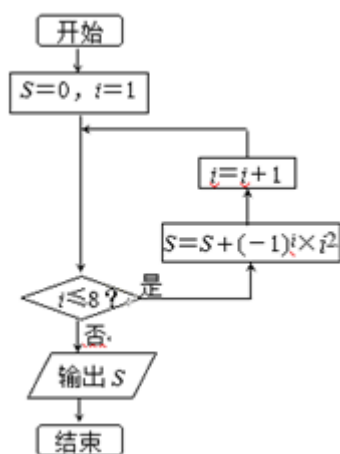


- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

10. 若函数 $f(x) = e^x$ 的图象上两点 M, N 关于直线 $y = x$ 的对称点在 $g(x) = ax - 2$ 的图象上，则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right)$ B. $(-\infty, e)$ C. $\left(0, \frac{e}{2}\right)$ D. $(0, e)$

11. 执行如下的程序框图，则输出的 S 是 ()



- A. 36 B. 45
C. -36 D. -45

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x > 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数，则 $g(f(-1))$ 的值为 ()

- A. -10 B. -9 C. -7 D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设变量 x, y, z 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x - y \geq -1 \\ 2x - y \leq 3 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = 2x + 3y$ 的最小值是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega \in \mathbb{N}$) 在 $[0, \pi]$ 上仅有 2 个零点，设 $g(x) = \sqrt{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ ，则 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的取值范围为_____.

15. 已知半径为 R 的圆周上有一定点 A ，在圆周上等可能地任意取一点与点 A 连接，则所得弦长介于 R 与 $\sqrt{3}R$ 之间的概率为_____.

16. 已知 α 是第二象限角，且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\tan(\alpha + \beta) = -2$ ，则 $\tan \beta =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 2020 年，山东省高考将全面实行“3+〔6 选 3〕”的模式（即：语文、数学、外语为必考科目，剩下的物理、化学、历史、地理、生物、政治六科任选三科进行考试）。为了了解学生对物理学科喜好程度，某高中从高一年级学生中随机抽取 200 人做调查。统计显示，男生喜欢物理的有 64 人，不喜欢物理的有 56 人；女生喜欢物理的有 36

人，不喜欢物理的有 44 人.

- (1) 据此资料判断是否有 75% 的把握认为“喜欢物理与性别有关”；
- (2) 为了了解学生对选科的认识，年级决定召开学生座谈会.现从 5 名男同学和 4 名女同学（其中 3 男 2 女喜欢物理）中，选取 3 名男同学和 2 名女同学参加座谈会，记参加座谈会的 5 人中喜欢物理的人数为 X ，求 X 的分布列及期望 $E(X)$.

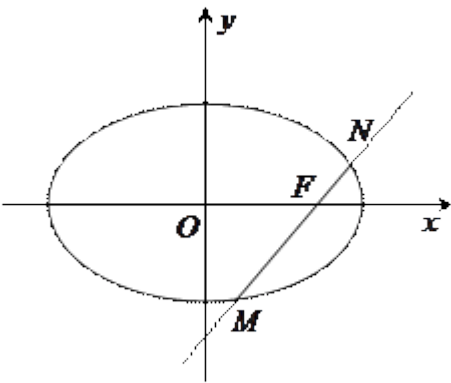
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.05
k	1.323	2.706	3.841

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(4m, 0)$

($m > 0, m$ 为常数)，离心率等于 0.8，过焦点 F 、倾斜角为 θ 的直线 l 交椭圆 C 于 $M、N$ 两点.

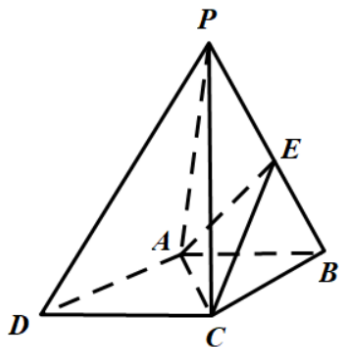
- (1) 求椭圆 C 的标准方程；
- (2) 若 $\theta = 90^\circ$ 时， $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = \frac{5\sqrt{2}}{9}$ ，求实数 m ；
- (3) 试问 $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ 的值是否与 θ 的大小无关，并证明你的结论.



19. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ， $a_1 = 25$ ，且 a_1, a_{11}, a_{13} 成等比数列.

- (1) 求使不等式 $a_n \geq 0$ 成立的最大自然数 n ；
- (2) 记数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $-\frac{13}{25} \leq T_n \leq \frac{12}{25}$.

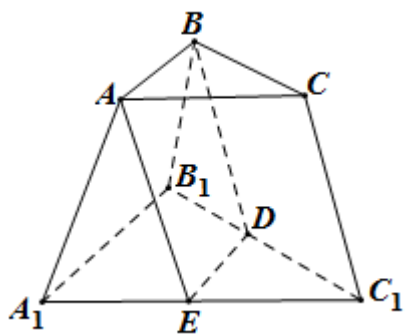
20. (12分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, $PA = 2$, $PB = PC = PD$, E 是 PB 的中点.



(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 设 F 是直线 BC 上的动点, 当点 E 到平面 PAF 距离最大时, 求面 PAF 与面 EAC 所成二面角的正弦值.

21. (12分) 如图, 已知在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = 2AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $A_1B_1 \perp BB_1$.



(1) 求证: $AB \perp CC_1$;

(2) 过 AB 的平面 $ABDE$ 分别交 B_1C_1 , A_1C_1 于点 D , E , 且分割三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 所得两部分几何体的体积比为 $V_{AA_1E-BB_1D} = V_{ABC-BDC_1} = 4:3$, 几何体 $ABC-EDC_1$ 为棱柱, 求 A_1B_1 的长.

提示: 台体的体积公式 $V = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$ (S' , S 分别为棱台的上、下底面面积, h 为棱台的高).

22. (10分) 已知函数 $f(x) = 2|x+1| - |x-m|$ ($m > 0$)

(1) 当 $m = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 1$ 的解集;

(2) $g(x) = f(x) - 2$, $g(x)$ 的图象与两坐标轴的交点分别为 A, B, C , 若三角形 ABC 的面积大于 12, 求参数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

先判断函数的奇偶性和单调性，得到 $-1 < \lg x < 1$ ，且 $\lg x \neq 0$ ，解不等式得解.

【详解】

由题得函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

因为 $f(-x) = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数，

因为函数 $y = \frac{1}{|x|} + 1$ ， $y = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$ 都是在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(1) = 3$ ， $f(\lg x) > 3 = f(1)$ ，

所以 $-1 < \lg x < 1$ ，且 $\lg x \neq 0$ ，

解得 $x \in \left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查函数的奇偶性和单调性的判断，考查函数的奇偶性和单调性的应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

2、D

【解析】

由 a_1 ， a_3 ， a_2 成等差数列得 $2a_3 = a_1 + a_2$ ，利用等比数列的通项公式展开即可得到公比 q 的方程.

【详解】

由题意 $2a_3 = a_1 + a_2$, $\therefore 2a_1 q^2 = a_1 q + a_1$, $\therefore 2q^2 = q + 1$, $\therefore q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$

故选: D.

【点睛】

本题考查等差等比数列的综合, 利用等差数列的性质建立方程求 q 是解题的关键, 对于等比数列的通项公式也要熟练.

3、A

【解析】

设出 A, B 的坐标, 利用导数求出过 A, B 的切线的斜率, 结合 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$, 可得 $x_1 x_2 = -1$. 再写出 OA, OB 所在直线的斜率, 作积得答案.

【详解】

解: 设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$,

由抛物线 $C: x^2 = 4y$, 得 $y = \frac{1}{4}x^2$, 则 $y' = \frac{1}{2}x$.

$\therefore k_{AP} = \frac{1}{2}x_1$, $k_{PB} = \frac{1}{2}x_2$,

由 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$, 可得 $\frac{1}{4}x_1 x_2 = -1$, 即 $x_1 x_2 = -4$.

又 $k_{OA} = \frac{x_1}{4}$, $k_{OB} = \frac{x_2}{4}$,

$\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{x_1 x_2}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$.

故选: A.

点睛: (1) 本题主要考查抛物线的简单几何性质, 考查直线和抛物线的位置关系, 意在考查学生对这些基础知识的掌握能力和分析推理能力.(2) 解答本题的关键是解题的思路, 由于与切线有关, 所以一般先设切点, 先设 $A(2a, a^2)$, B

$(2b, b^2)$, $a \neq b$, 再求切线 PA, PB 方程,

求点 P 坐标, 再根据 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$ 得到 $ab = -1$, 最后求直线 OA 与 OB 的斜率之积. 如果先设点 P 的坐标, 计算量就大一些.

4、B

【解析】

直接利用向量的坐标运算得到向量 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 的坐标, 利用 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ 求得参数 m , 再用 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 计算即可.

【详解】

依题意, $\vec{a} - 2\vec{b} = (m+2, -3)$, 而 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 即 $-m - 2 - 6 = 0$, 解得 $m = -8$, 则

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算、向量数量积的应用, 考查运算求解能力以及化归与转化思想.

5、A

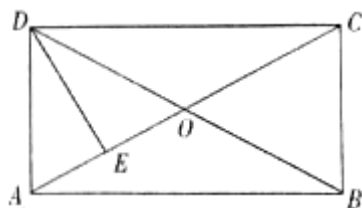
【解析】

由平面向量基本定理, 化简得 $\vec{DE} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AD}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = -\frac{3}{4}$, 即可求解, 得到答案.

【详解】

由平面向量基本定理, 化简 $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = \vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{AC} = -\vec{AD} + \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD})$
 $= \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AD}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = -\frac{3}{4}$, 即 $\lambda + \mu = -\frac{1}{2}$,

故选 A.



【点睛】

本题主要考查了平面向量基本定理的应用, 其中解答熟记平面向量的基本定理, 化简得到 $\vec{DE} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AD}$ 是解答的关键, 着重考查了运算与求解能力, 数基础题.

6、B

【解析】

先判断函数的奇偶性, 再取特殊值, 利用零点存在性定理判断函数零点分布情况, 即可得解.

【详解】

由题可知 $f(x)$ 定义域为 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$,

$$f(-x) = \left(-x - \frac{1}{-x}\right) \sin(-x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \sin x = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数, 关于 y 轴对称,

$\therefore$ 排除 C, D.

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2 - 36}{12\pi} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right) \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 必有零点, 排除 A.

故选: B.

【点睛】

本题考查了函数图象的判断, 考查了函数的性质, 属于中档题.

7、A

【解析】

根据双曲线的标准方程求出右顶点 A 、右焦点 F 的坐标, 再求出过点 F 与 C 的一条渐近线的平行的直线方程, 通过解方程组求出点 B 的坐标, 最后利用三角形的面积公式进行求解即可.

【详解】

由双曲线的标准方程可知中: $a=3, b=4 \therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, 因此右顶点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 右焦点 F 的坐标为 $(5, 0)$,

双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{4}{3}x$, 根据双曲线和渐近线的对称性不妨设点 F 作平行 C 的一条渐近线 $y = \frac{4}{3}x$ 的直线

与 C 交于点 B , 所以直线 FB 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 因此直线 FB 方程为: $y = \frac{4}{3}(x-5)$, 因此点 B 的坐标是方程组:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}(x-5) \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \text{ 的解, 解得方程组的解为: } \begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = -\frac{32}{15} \end{cases}, \text{ 即 } B\left(\frac{17}{5}, -\frac{32}{15}\right), \text{ 所以 } \triangle AFB \text{ 的面积为:}$$

$$\frac{1}{2} \times (5-3) \times \left| -\frac{32}{15} \right| = \frac{32}{15}.$$

故选: A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程的应用, 考查了两直线平行的性质, 考查了数学运算能力.

8、D

【解析】

求出圆心 O 到直线 l 的距离为: $d = 1 = \frac{1}{2}r$, 得出 $\angle AOB = 120^\circ$, 根据条件得出 O 到直线 l_1 的距离 $d' = 1$ 或 $\sqrt{3}$ 时满足

条件, 即可得出答案.

【详解】

解: 由已知可得: 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 2,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/515004121203011131>