第三节　函数的奇偶性与周期性

1．函数的奇偶性

奇偶性	条件	图象特点
偶函数	对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，都有$f(-x)=f(x)$	关于y轴对称
奇函数	对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$	关于原点对称

2.周期性

(1)周期函数：对于函数$y=f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得当x取定义域内的任何值时，都有__$f(x+T)=f(x)$__，那么就称函数$y=f(x)$为周期函数，称T为这个函数的周期.

(2)最小正周期：如果在周期函数$f(x)$的所有周期中____________的正数，那么这个最小正数就叫做$f(x)$的最小正周期.

拓展总结

1．奇、偶函数的一个必要不充分条件：

奇、偶函数定义域的特点是关于原点对称．函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要不充分条件．

2．奇偶性的两个等价定义在定义域内恒有若 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 为偶函数．

3．奇偶性的六个重要结论：

(1)如果一个奇函数$f(x)$在原点处有定义，即$f(0)$有意义，那么一定有$f(0)=0$.

(2)如果函数$f(x)$是偶函数，那么$f(x)=f(-x)=f(|x|)$.

(3)既是奇函数又是偶函数的函数只有一种类型，即$f(x)=0$，$x\in D$，其中定义域D是关于原点对称的非空数集.

(4)奇函数在两个对称的区间上具有相同的单调性；偶函数在两个关于原点对称的区间上具有相反的单调性.

(5)偶函数在关于原点对称的区间上有相同的最大(小)值，取最值时的自变量互为相反数；奇函数在关于原点对称的区间上的最值互为相反数，取最值时的自变量也互为相反数.

(6)设$f(x)$，$g(x)$的定义域分别是D_1，D_2，那么在它们的公共定义域上：奇＋奇＝奇，奇×奇＝偶，偶＋偶＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇.

4．函数周期性常用的结论：

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x，

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$，则 $T=2a(a\neq 0)$.

(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a\neq 0)$.

(3)若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2a(a\neq 0)$.

5．函数对称性问题的结论：

(1)若函数$y=f(x+a)$是偶函数，即$f(a-x)=f(a+x)$，则函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称；

(2)若对于**R**上的任意x都有$f(2a-x)=f(x)$或$f(-x)=f(2a+x)$，则$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称；

(3)若函数$y=f(x+b)$是奇函数，即$f(-x+b)+f(x+b)=0$，则函数$y=f(x)$关于点$(b,0)$中心对称.

四基自测

1. (基础知识：函数奇偶性判断)下列函数中，既是奇函数又是增函数的为(D)

A. $y=x+1$ B. $y=-x^3$

C. $y=\frac{1}{x}$ D. $y=x|x|$

2．(基础知识：奇函数定义)设$f(x)$为奇函数，且当$x\geqslant 0$时，$f(x)=e^x-1$，则$f(-1)=$____$1-e$____．

3．(基本应用：奇偶性应用)设函数$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$为奇函数，则$a=$____1____．

4．(基本方法：利用周期性求函数值)设$f(x)$是定义在**R**上的周期为2的函数，当$x\in[-1,1)$时，$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$则$f\left(\frac{3}{2}\right)=$____1____．

5．(基本能力：研究函数对称性)函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x^{2}}$ 的对称中心为____(0,0)____.

考点分类 · 关键能力

专项突破　深度剖析

题型一　函数奇偶性的判断　▶自主练透

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$，则 $f(x)$ 为(　C　)

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数，又是偶函数

D. 非奇非偶函数

解析： 由$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $x=\pm 1$，$\therefore f(x)$的定义域为$\{-1,1\}$.

又 $f(1)+f(-1)=0$，$f(1)-f(-1)=0$，故 $f(x)$既是奇函数，又是偶函数.

2．已知函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)$(B)

A．是偶函数，且在 **R** 上是增函数

B．是奇函数，且在 **R** 上是增函数

C．是偶函数，且在 **R** 上是减函数

D．是奇函数，且在 **R** 上是减函数

解析：$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=3^{-x}-3^{x}=-f(x)$，$f(x)$为奇函数，又 $y_1=3^x$ 为增函数，$y_2=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为增函数，故 $y=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为增函数．

3. (2021·全国乙卷)设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是(　B　)

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

解析： 法一：$f(x)=-1+\frac{2}{x+1}$，其图象的对称中心为$(-1,-1)$，将$y=f(x)$的图象沿x轴向右平移1个单位长度，再沿y轴向上平移1个单位长度可得函数$f(x-1)+1$的图象，关于$(0,0)$对称，所以函数$f(x-1)+1$是奇函数.

法二：选项A，$f(x-1)-1=\frac{2}{x}-2$，此函数为非奇非偶函数；

选项B，$f(x-1)+1=\frac{2}{x}$，此函数为奇函数；选项C，$f(x+1)-1=\frac{-2x-2}{x+2}$，此函数为非奇非偶函数；选项D，$f(x+1)+1=\frac{2}{x+2}$，此函数为非奇非偶函数.

4．设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域都为 **R**，且 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则下列结论中正确的是(　C　)

A．$f(x)g(x)$是偶函数

B．$|f(x)|g(x)$是奇函数

C．$f(x)|g(x)|$是奇函数

D．$|f(x)g(x)|$是奇函数

解析： 由题意可知$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，对于选项A，$f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)$，所以$f(x)\cdot g(x)$是奇函数，故选项A错误；对于选项B，$|f(-x)|\cdot g(-x)=|-f(x)|g(x)=|f(x)|g(x)$，所以$|f(x)|\cdot g(x)$是偶函数，故选项B错误；对于选项C，$f(-x)|g(-x)|=-f(x)|g(x)|$，所以$f(x)\cdot|g(x)|$是奇函数，故选项C正确；对于选项D，$|f(-x)g(-x)|=|-f(x)g(x)|=|f(x)g(x)|$，所以$|f(x)\cdot g(x)|$是偶函数，故选项D错误.

藤**方法总结**藤

1．函数$y=f(x)$具有奇偶性，首先其定义域必须关于原点对称，这样$f(x)$与$f(-x)$才有意义．

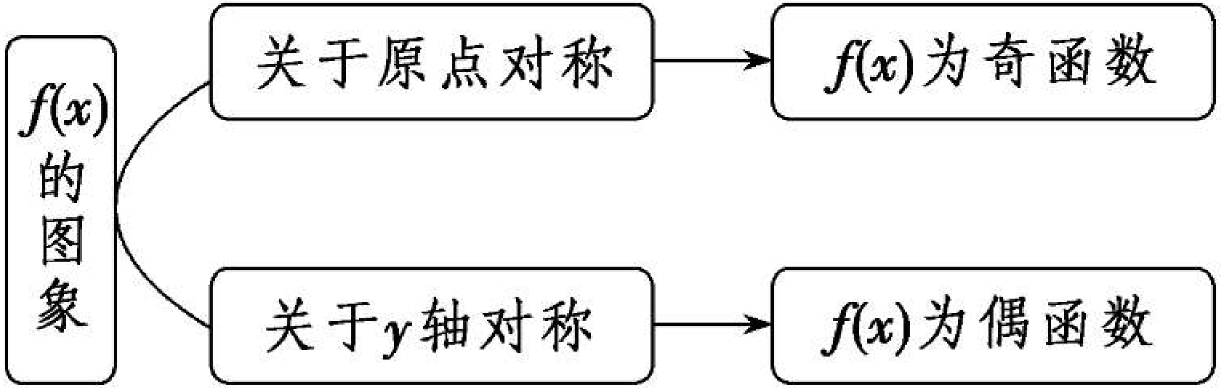
2．对一个函数而言，其奇偶性结果为：是偶函数，是奇函数，既是奇函数又是偶函数，是非奇非偶函数，必居其一．

3．判定奇偶性的方法：

(1)定义法：

确定函数的奇偶性时，必须先判定函数定义域是否关于原点对称．若对称，再化简解析式后验证$f(-x)=\pm f(x)$或其等价形式$f(-x)\pm f(x)=0$是否成立．

(2)图象法：



(3)性质法：利用奇偶性的运算关系判断．

题型二　函数的周期性及应用　▶互动探究

[典例剖析]

[典例]　(2022·**南充模拟**)设 $f(x)$是周期为 4 的奇函数，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1+x)$，则 $f\left(-\frac{9}{2}\right)=$(　A　)

A．$-\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{3}{4}$

[审题互动]　①能否直接把 $x=-\frac{9}{2}$代入 $f(x)=x(1+x)$？

②$-\frac{9}{2}\notin[0,1]$，如何利用周期将 $f\left(-\frac{9}{2}\right)$转化？

解析：$\because f(x)$是周期为 4 的奇函数，

$\therefore f\left(-\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right).$

又 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x(1+x)$，

故 $f\left(-\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}.$

藤**方法总结**藤

1．若函数的最小正周期为T，在图象上表现为每隔T个单位，图象相同，只是位置不同，在函数值上表现为$f(x+T)=f(x)$.

当x不属于所给定区间时，利用$f(x+T)=f(x)$将$f(x)$转化，故首先确定$f(x)$的周期T.

2．求函数周期的方法：

方法	解读	适合题型
定义法	具体步骤为：对于函数$y=f(x)$，如果能够找到一个非零常数T，使得当x取定义域内的任何值时，都有$f(x+T)=f(x)$，那么T就是函数$y=f(x)$的周期	非零常数T容易确定的函数

方法	解读	适合题型
递推法	采用递推的思路进行，再结合定义确定周期．如：若$f(x+a)=-f(x)$，则$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=-f(x+a)=f(x)$，所以$2a$为$f(x)$的一个周期	含有$f(x+a)$与$f(x)$的关系式
换元法	通过换元思路将解析式化简为定义式的结构，如：若$f(x+a)=f(x-a)$，令$x-a=t$，则$x=t+a$，则$f(t+2a)=f(t+a+a)=f(t+a-a)=f(t)$，所以$2a$为$f(x)$的一个周期	$f(bx\pm a)=f(bx\pm c)$型关系式

[对点训练]

1．设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$同时满足以下条件：

①$f(x)+f(-x)=0$；②$f(x)=f(x+2)$；③当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2^x-1$，

则 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)=$___$\sqrt{2}$___.

2．已知$f(x)$是$\mathbf{R}$上最小正周期为2的周期函数，且当$0\leqslant x<2$时，$f(x)=x^3-x$，则函数$y=f(x)$的图象在区间$[0, 6]$上与x轴的交点个数为________．7

解析：因为当$0\leqslant x<2$时，$f(x)=x^3-x$.又$f(x)$是$\mathbf{R}$上最小正周期为2的周期函数，且$f(0)=0$，

则$f(6)=f(4)=f(2)=f(0)=0$.

又$f(1)=0$，所以$f(3)=f(5)=f(1)=0$，

故函数$y=f(x)$的图象在区间$[0, 6]$上与x轴的交点有7个.

3．定义在**R**上的奇函数$f(x)$满足$f(x-4)=-f(x)$，且在$[0,2]$上为增函数，若方程$f(x)=m(m>0)$在区间$[-8,8]$上有四个不同的根x_1，x_2，x_3，x_4，则$x_1+x_2+x_3+x_4$的值为____-8____．

题型三　函数性质的综合应用　▶多维探究

[典例剖析]

类型 1　求函数解析式

[例 1]　设 $f(x)$是定义在 **R** 上以 2 为周期的偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则函数 $f(x)$在[1,2]上的解析式是$\underline{f(x)=\log_2(3-x)}$.

解析：令$x\in[-1,0]$，则$-x\in[0,1]$，结合题意可得$f(x)=f(-x)=\log_2(-x+1)$，

令$x\in[1,2]$，则$x-2\in[-1,0]$，

故$f(x)=\log_2[-(x-2)+1]=\log_2(3-x)$，

故函数$f(x)$在$[1,2]$上的解析式是$f(x)=\log_2(3-x)$.