

素养拓展 20 累加、累乘、构造法求数列通项公式（精讲+精练）

一、知识点梳理

一、累加法

形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2) \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相加，可得： $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(2) + f(1) + a_1, (n \geq 2)$

- ①若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；
- ②若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；
- ③若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和；
- ④若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和。

二、累乘法

形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) \\ \dots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相乘，可得： $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \dots \cdot f(2) f(1) a_1, (n \geq 2)$

三、构造法

1. 第一种形式：形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ （其中 p, q 均为常数且 $p \neq 0$ ）型的递推式

- (1) 若 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；
- (2) 若 $q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；
- (3) 若 $p \neq 1$ 且 $q \neq 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求。方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$ ，与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$

素养拓展 20 累加、累乘、构造法求数列通项公式（精讲+精练）

一、知识点梳理

一、累加法

形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2) \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相加，可得： $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(2) + f(1) + a_1, (n \geq 2)$

- ① 若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；
- ② 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；
- ③ 若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和；
- ④ 若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和。

二、累乘法

形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$ 型的递推数列（其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数）可构造：

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) \\ \dots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1) \end{cases}$$

将上述 m_2 个式子两边分别相乘，可得： $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \dots \cdot f(2) f(1) a_1, (n \geq 2)$

三、构造法

1. 第一种形式：形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ （其中 p, q 均为常数且 $p \neq 0$ ）型的递推式

- (1) 若 $p=1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；
- (2) 若 $q=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；
- (3) 若 $p \neq 1$ 且 $q \neq 0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求。方法有如下两种：

法一：设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$ ，与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$

比较系数（待定系数法）得 $\lambda = \frac{q}{p-1}, (p \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} = p(a_n + \frac{q}{p-1}) \Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} = p(a_{n-1} + \frac{q}{p-1})$ ，即

$\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$ 构成以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首项，以 p 为公比的等比数列。再利用等比数列的通项公式求出 $\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$

的通项整理可得 a_n 。

法二：由 $a_{n+1} = pa_n + q$ 得 $a_n = pa_{n-1} + q (n \geq 2)$ 两式相减并整理得 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = p$ ，即 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 构成以 $a_2 - a_1$ 为首

项，以 p 为公比的等比数列。求出 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 的通项再转化为累加法便可求出 a_n 。

2. 第二种形式：形如 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ($p \neq 1$) 型的递推式

(1) 当 $f(n)$ 为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设 $a_n + An + B = p[a_{n-1} + A(n-1) + B]$ ，通过待定系数法确定 A 、 B 的值，转化成以 $a_1 + A + B$ 为首项，

以 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n + An + B\}$ ，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + An + B\}$ 的通项整理

可得 a_n 。

法二：当 $f(n)$ 的公差为 d 时，由递推式得： $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ， $a_n = pa_{n-1} + f(n-1)$ 两式相减得：

$a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1}) + d$ ，令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 得： $b_n = pb_{n-1} + d$ 转化为第一种形式，求出 b_n ，再用累加法便可

求出 a_n 。

(2) 当 $f(n)$ 为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设 $a_n + \lambda f(n) = p[a_{n-1} + \lambda f(n-1)]$ ，通过待定系数法确定 λ 的值，转化成以 $a_1 + \lambda f(1)$ 为首项，以

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 为公比的等比数列 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ ，再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ 的通项整理可

得 a_n 。

法二：当 $f(n)$ 的公比为 q 时，由递推式得： $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ——①， $a_n = pa_{n-1} + f(n-1)$ ，两边同时乘以 q

得 $a_n q = pqa_{n-1} + qf(n-1)$ ——②，由①②两式相减得 $a_{n+1} - a_n q = p(a_n - qa_{n-1})$ ，即 $\frac{a_{n+1} - qa_n}{a_n - qa_{n-1}} = p$ ，在转化为

第一种形式便可求出 a_n 。

法三：递推公式为 $a_{n+1} = pa_n + q^n$ （其中 p, q 均为常数）或 $a_{n+1} = pa_n + rq^n$ （其中 p, q, r

均为常数)时,要先在原递推公式两边同时除以 q^{n+1} , 得: $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$, 引入辅助数列 $\{b_n\}$ (其中

$b_n = \frac{a_n}{q^n}$), 得: $b_{n+1} = \frac{p}{q} b_n + \frac{1}{q}$ 再应用类型第一种形式的方法解决.

(3) 当 $f(n)$ 为任意数列时, 可用通法:

在 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 两边同时除以 p^{n+1} 可得到 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$, 令 $\frac{a_n}{p^n} = b_n$, 则 $b_{n+1} = b_n + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$, 在转化为累

加法, 求出 b_n 之后得 $a_n = p^n b_n$.

二、题型精讲精练

【典例 1】 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, $a_n - a_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【分析】 利用累加法以及等差数列的求和公式可求出结果.

【详解】 因为 $a_n - a_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + a_1$

$$= 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 + 0 = \frac{(n-1)(3+2n-1)}{2} = n^2 - 1,$$

又 $a_1 = 0$ 适合上式, 所以 $a_n = n^2 - 1$.

【典例 2】 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = na_n$, 求通项公式 a_n .

【答案】 $a_n = \frac{1}{n}$

【分析】 由题得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$, 再利用累乘法求解.

【详解】 $\because (n+1)a_{n+1} = na_n$, $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$.

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{4}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n} \quad (n \geq 2).$$

以上各式相乘, 得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$. $\therefore a_n = \frac{a_1}{n} = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$

又 $a_1 = 1$ 满足上式, $\therefore a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$.

【典例 3】 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{n+1} = 2a_n - 1$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

【分析】(1)构造等比数列求通项；

【详解】(1) 由 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 得 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

又 $a_1 - 1 = 1$ ，所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ ，所以

$$a_n = 2^{n-1} + 1.$$

【题型训练 1-刷真题】

一、单选题

1. (2022·浙江·统考高考真题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}a_n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则 ()

A. $2 < 100a_{100} < \frac{5}{2}$ B. $\frac{5}{2} < 100a_{100} < 3$ C. $3 < 100a_{100} < \frac{7}{2}$ D. $\frac{7}{2} < 100a_{100} < 4$

【答案】B

【分析】先通过递推关系式确定 $\{a_n\}$ 除去 a_1 ，其他项都在 $(0,1)$ 范围内，再利用递推公式变形得到

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3-a_n} > \frac{1}{3}, \text{ 累加可求出 } \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3}(n+2), \text{ 得出 } 100a_{100} < 3, \text{ 再利用}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3-a_n} < \frac{1}{3-\frac{3}{n+2}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \text{ 累加可求出 } \frac{1}{a_n} - 1 < \frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right), \text{ 再次放缩可得出}$$

$$100a_{100} > \frac{5}{2}.$$

【详解】 $\because a_1 = 1$ ，易得 $a_2 = \frac{2}{3} \in (0,1)$ ，依次类推可得 $a_n \in (0,1)$

$$\text{由题意， } a_{n+1} = a_n \left(1 - \frac{1}{3}a_n\right), \text{ 即 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{a_n(3-a_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3-a_n},$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3-a_n} > \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} > \frac{1}{3}, \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} > \frac{1}{3}, \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} > \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} > \frac{1}{3}, (n \geq 2),$$

$$\text{累加可得 } \frac{1}{a_n} - 1 > \frac{1}{3}(n-1), \text{ 即 } \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3}(n+2), (n \geq 2),$$

$$\therefore a_n < \frac{3}{n+2}, (n \geq 2), \text{ 即 } a_{100} < \frac{1}{34}, 100a_{100} < \frac{100}{34} < 3,$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3-a_n} < \frac{1}{3-\frac{3}{n+2}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), (n \geq 2),$$

$$\therefore \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right), \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right), \dots, \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right), (n \geq 3),$$

累加可得 $\frac{1}{a_n} - 1 < \frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right), (n \geq 3)$,

$$\therefore \frac{1}{a_{100}} - 1 < 33 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) < 33 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{6} \times 96\right) < 39,$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_{100}} < 40, \therefore a_{100} > \frac{1}{40}, \text{ 即 } 100a_{100} > \frac{5}{2};$$

$$\text{综上: } \frac{5}{2} < 100a_{100} < 3.$$

故选: B.

【点睛】关键点点睛: 解决本题的关键是利用递推关系进行合理变形放缩.

2. (2021·浙江·统考高考真题) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} (n \in \mathbb{N}^*)$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

则 ()

A. $\frac{3}{2} < S_{100} < 3$ B. $3 < S_{100} < 4$ C. $4 < S_{100} < \frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{2} < S_{100} < 5$

【答案】A

【分析】显然可知, $S_{100} > \frac{3}{2}$, 利用倒数法得到 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 再放缩可得

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}, \text{ 由累加法可得 } a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2}, \text{ 进而由 } a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} \text{ 局部放缩可得 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n+3}, \text{ 然后利用累}$$

乘法求得 $a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$, 最后根据裂项相消法即可得到 $S_{100} < 3$, 从而得解.

【详解】因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} (n \in \mathbb{N}^*)$, 所以 $a_n > 0, S_{100} > \frac{3}{2}$.

$$\text{由 } a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} < \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} < \frac{1}{2}$$

根据累加法可得, $\frac{1}{\sqrt{a_n}} \leq 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$, 当且仅当 $n=1$ 时取等号,

$$\therefore a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} \leq \frac{a_n}{1 + \frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+3} a_n$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n+3},$$

由累乘法可得 $a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$, 当且仅当 $n=1$ 时取等号,

由裂项求和法得:

$$\text{所以 } S_{100} \leq 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} \right) = 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102} \right) < 3, \text{ 即 } \frac{3}{2} < S_{100} < 3.$$

故选: A.

【点睛】本题解题关键是通过倒数法先找到 $\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}$ 的不等关系, 再由累加法可求得 $a_n \geq \frac{4}{(n+1)^2}$, 由题目条件可知要证 S_{100} 小于某数, 从而通过局部放缩得到 a_n, a_{n+1} 的不等关系, 改变不等式的方向得到

$$a_n \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}, \text{ 最后由裂项相消法求得 } S_{100} < 3.$$

二、解答题

3. (2022·全国·统考高考真题) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, \left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

$$\text{【答案】(1) } a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 见解析

【分析】(1) 利用等差数列的通项公式求得 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}$, 得到 $S_n = \frac{(n+2)a_n}{3}$, 利用和与项的关系得到当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$, 进而得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$, 利用累乘法求得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 检验对于 $n=1$ 也成立, 得到 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(2) 由 (1) 的结论, 利用裂项求和法得到 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$, 进而证得.

$$\text{【详解】(1) } \because a_1 = 1, \therefore S_1 = a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{a_1} = 1,$$

又 $\because \left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

整理得： $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$ ，

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \dots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &= 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

显然对于 $n=1$ 也成立，

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$(2) \quad \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2$$

【题型训练 2-刷模拟】

1. 累加法

一、单选题

1. (2023·全国·高三专题练习) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = n+1 (n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

()

A. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

B. $a_n = \frac{n^2+1}{2}$

C. $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$

D. $a_n = n^2 + n$

【答案】A

【分析】根据 $a_{n+1} - a_n = n+1$ ，利用累加法结合等差数列前 n 项和的公式即可得出答案.

【详解】解：因为 $a_{n+1} - a_n = n+1$ ，

$$\text{则 } a_n - a_{n-1} = n,$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = n-1,$$

∴

$$a_3 - a_2 = 3,$$

$$a_2 - a_1 = 2,$$

累加得 $a_n - a_1 = 2 + 3 + \dots + n$,

所以 $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

当 $n=1$ 时也成立

故选: A.

2. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n = a_{n-1} + 3n - 2 (n \geq 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 3n^2$ B. $a_n = 3n^2 + n$ C. $a_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ D. $a_n = \frac{3n^2 + n}{2}$

【答案】C

【详解】由 $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$ 得 $a_n - a_{n-1} = 3n - 2$, $\therefore a_n - a_1 = 4 + 7 + \dots + 3n - 2$
 $= \frac{(n-1)(4+3n-2)}{2} = \frac{3n^2 - n - 2}{2}$, $\therefore a_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, 当 $n=1$ 时也符合, $\therefore$ 数列的通项公式为 $a_n = \frac{3n^2 - n}{2}$. 故选 C.

3. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, $a_1 = 1$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 30 B. 31 C. 22 D. 23

【答案】B

【分析】根据题意利用累加法求解即可

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, $a_1 = 1$,

所以 $a_2 - a_1 = 2^1$, $a_3 - a_2 = 2^2$, $a_4 - a_3 = 2^3$, $a_5 - a_4 = 2^4$,

所以 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,

所以 $a_5 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$,

故选: B

4. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + n}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项为 ()

- A. $-\frac{1}{n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$ B. $\frac{3}{2} + \frac{1}{n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$
C. $-\frac{3}{2} - \frac{1}{n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$ D. $\frac{3}{2} - \frac{1}{n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$

【答案】D

【分析】先把 $\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 利用累加法和裂项相消法可求答案.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} \\ a_3 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{array} \right. ,$$

所以 $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$.

【分析】运用累加法求得 $\{a_n\}$ 的通项公式，再运用裂项相消法求和即可.

【详解】解：当 $n \geq 2$ 时，由累加法可得：

$$\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) = 2n + 2(n-1) + \cdots + (2 \times 1 + 2),$$

所以 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = n^2 + n - 2 \quad (n \geq 2),$

又因为 $a_1 = \frac{1}{2},$

所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 2),$

当 $n=1$ 时， $a_1 = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2},$ 符合，

所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^*),$

所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$

所以 $S_{2023} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}.$

故选：A.

7. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n + 2, (n \in \mathbb{N}^*)$ ，且 $a_1 = 1$ ，则 $a_{2022} =$ ()

A. 6065

B. 6064

C. 4044

D. 4043

【答案】B

【分析】先由 $n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n + 2$ 得到 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ，再利用裂项抵消法进行求解.

【详解】因为 $n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n + 2,$

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)},$

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$

所以 $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right), \quad \frac{a_3}{3} - \frac{a_2}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right),$

$\cdots, \quad \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$

累加，得 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) (n \geq 2),$

即 $\frac{a_n}{n} - 1 = 2 - \frac{2}{n},$ 即 $a_n = 3n - 2, n=1$ 成立

则 $a_{2022} = 6064.$

故选：B.

8. (2023·全国·高三专题练习) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$, 则 $a_n=$

- A. $2+\ln n$ B. $2+(n-1)\ln n$ C. $2+n\ln n$ D. $1+n+\ln n$

【答案】A

【详解】试题分析：在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1}-a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\frac{2}{1}+2$$

$$=\ln\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\right)+2$$

$$=\ln n+2$$

故选 A.

9. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=33$, $a_{n+1}-a_n=2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 10.5 B. 10.6 C. 10.4 D. 10.7

【答案】A

【分析】由所给表达式 $a_{n+1}-a_n=2n$, 结合累加法可求得 a_n 的通项公式;

进而求得 $\frac{a_n}{n}$ 的表达式, 因为 n 取正整数, 利用最低点附近的 n 求 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值.

【详解】因为 $a_{n+1}-a_n=2n$, 所以由递推公式可得

$$a_{n+1}-a_n=2n$$

$$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$$

$$a_{n-1}-a_{n-2}=2(n-2)$$

$$a_{n-2}-a_{n-3}=2(n-3)$$

.....

$$a_3-a_2=2\times 2$$

$$a_2-a_1=2\times 1$$

当 $n\geq 2$ 时, 等式两边分别相加, 得

$$a_n-a_1=2\times 1+2\times 2+\cdots+2(n-2)+2(n-1)$$

$$= 2(1+2+3+\cdots+n-2+n-1)$$

$$= n^2 - n,$$

因为 $a_1=33$ ，则 $a_n = n^2 - n + 33$ ，而 a_1 满足上式，

所以 $a_n = n^2 - n + 33$ ，

$$\text{即 } \frac{a_n}{n} = \frac{n^2 - n + 33}{n} = n + \frac{33}{n} - 1, n \in \mathbb{N}^*,$$

函数 $g(x) = x + \frac{33}{x} - 1$ 在 $(0, \sqrt{33})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{33}, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $n \in \mathbb{N}^*$, $5 < \sqrt{33} < 6$,

$$\text{当 } n=5 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = 5 + \frac{33}{5} - 1 = \frac{53}{5},$$

$$\text{当 } n=6 \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = 6 + \frac{33}{6} - 1 = \frac{21}{2},$$

$$\text{因为 } \frac{21}{2} < \frac{53}{5},$$

所以 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为 $\frac{21}{2}$ ，

故选：A．

二、填空题

10. (2023·全国·高三专题练习) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=7-2n$, 则数列 $\{a_n\}$ 中最大项的数值为__.

【答案】10

【分析】 利用累加法, 求出 $\{a_n\}$ 是一个二次函数类型的数列, 通过二次函数的最值求解即可

【详解】 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (9-2n) + (11-2n) + \cdots + 5 + 1 = \frac{(n-1)(9-2n+5)}{2} + 1 \\ &= -n^2 + 8n - 6 = -(n-4)^2 + 10, \end{aligned}$$

所以当 $n=4$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中最大项的数值为 10.

故答案为：10.

11. (2023·全国·高三专题练习) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}-a_n=3 \cdot 2^{2n-1}$, 则 $a_n=$ _____.

【答案】 2^{2n-1}

【分析】利用累加法和等比数列的前 n 项和公式直接求通项即可。

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$ ，

所以当 $n \geq 1$ 时， $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= 3(2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \cdots + 2) + 2 = 3 \times \frac{2(1-4^n)}{1-4} + 2 = 2^{2n+1}.$$

所以 $a_n = 2^{2n-1}$ ， $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ，

因为 $a_1 = 2$ ，也满足上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{2n-1}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$

故答案为： 2^{2n-1}

12. (2023·全国·高三专题练习) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 100 项的和为_____.

【答案】 $\frac{200}{101}$

【分析】先根据累加法求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后利用裂项求和进行求解。

【详解】由 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ，则 $a_n - a_{n-1} = n$ ， $a_{n-1} - a_{n-2} = n-1$ $a_2 - a_1 = 2$ ，于是

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 则 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 100 项的和为： $2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = 2 \cdot \frac{100}{101} = \frac{200}{101}.$

故答案为： $\frac{200}{101}$

13. (2023·全国·高三专题练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为零，且满足 $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + na_{n-1}}$ ($n \geq 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$)，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{n(n+1)}$

【分析】变换得到 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + n$ ，设 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ，得到 $b_n - b_{n-1} = n$ ，利用累加法计算得到答案。

【详解】 $a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + na_{n-1}}$ ，则 $\frac{1}{a_n} = \frac{1 + na_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} + n$ ，

设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$, 则 $b_n - b_{n-1} = n$,

$$b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1 = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

而 $b_1 = 1$ 也符合该式, 故 $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 故 $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{n(n+1)}$.

故答案为: $\frac{2}{n(n+1)}$

14. (2023·全国·高三专题练习) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ 且 $a_n = 9$, 则 $n =$ _____.

【答案】100

【分析】先裂项, 然后由累加法可得.

【详解】 $\because a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\therefore$

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_1 = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} + \dots + \sqrt{2} - \sqrt{1} + 0 = \sqrt{n} - 1$$

$\because a_n = 9$, 即 $\sqrt{n} - 1 = 9$, 解得 $n = 100$

故答案为: 100

三、解答题

15. (2023·全国·高三专题练习) 已知等差数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的首项为 -1, 公差为 2. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = b_n$

(1) 求 a_n 取得最小值时 n 的值;

(2) 若 $a_1 = \frac{3}{4}$, 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{4}{3}$.

【答案】(1) 2;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 利用累加法结合等差数列的求和公式即得;

(2) 利用裂项求和法结合条件即得.

【详解】(1) 由 $a_{n+1} - a_n = b_n$, 得 $a_2 - a_1 = b_1, a_3 - a_2 = b_2, \dots, a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$,

累加可得: $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$,

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)(-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times 2 = n^2 - 4n + 3 + a_1 = (n-2)^2 + a_1 - 1,$$

显然 a_n 取最小值时, n 的值为 2.

(2) 若 $a_1 = \frac{3}{4}$, 则 $a_n = n^2 - 4n + \frac{15}{4}$, 即 $a_n = \left(n - \frac{5}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \text{L} + \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} + \text{L} + \frac{1}{\left(n-\frac{5}{2}\right) \times \left(n-\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \left(\frac{\frac{1}{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}}}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}\right) + \text{L} + \left(\frac{\frac{1}{n-\frac{5}{2}} - \frac{1}{n-\frac{3}{2}}}{n-\frac{5}{2} - n + \frac{3}{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{n-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

显然 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \text{L} + \frac{1}{a_n} < 0$,

可得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \text{L} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$.

16. (2023·陕西西安·西安市大明宫中学校考模拟预测) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2^n + 1$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) S_n = 2 + n - \frac{n+2}{2^n}$$

【分析】(1) 由 $a_{n+1} = a_n + 2^n + 1$ 得 $a_{n+1} - (n+1) - (a_n - n) = 2^n$, 然后利用累加法求出 $a_n - n$ 即可得证;

(2) $\frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^n} + 1$, 利用分组求和法和错位相减法可得答案.

【详解】(1) 由 $a_{n+1} = a_n + 2^n + 1$ 得 $a_{n+1} - (n+1) - (a_n - n) = 2^n$,

$$\therefore a_n - n - [a_{n-1} - (n-1)] = 2^{n-1},$$

$$a_{n-1} - (n-1) - [a_{n-2} - (n-2)] = 2^{n-2},$$

.....,

$$a_2 - 2 - (a_1 - 1) = 2,$$

$$\therefore a_n - n - (a_1 - 1) = 2 + 2^2 + \text{L} + 2^{n-1},$$

$$\therefore a_n - n = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} + (a_1 - 1) = 2^n, \quad \frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = 2, \quad a_1 - 1 = 2,$$

∴数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列；

(2) 由 (1) 可得 $a_n = n + 2^n$ ，

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^n} + 1, S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + n,$$

$$\text{令 } T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}, \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore 2T_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \textcircled{2}$$

错位相减， $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ ，得：

$$T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\therefore S_n = 2 + n - \frac{n+2}{2^n}.$$

17. (2023·河南郑州·模拟预测) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 3$ ， $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = a_n - 1 + (-1)^n \log_2(a_n - 1)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】(1) $a_n = 2^n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

$$(2) T_n = \begin{cases} 2^{n+1} - 2 - \frac{n+1}{2}, & n = 2k-1 \\ 2^{n+1} - 2 + \frac{n}{2}, & n = 2k \end{cases} \quad \text{且 } k \in \mathbb{N}^*$$

【分析】(1) 由 $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} (n \geq 2)$ ，利用累加法求数列通项公式，注意验证 $n=1$ ；

(2) 由题设得 $b_n = 2^n + (-1)^n n$ ，讨论 n 的奇偶性分别求出对应前 n 项和即可。

【详解】(1) $\because a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} (n \geq 2)$ ，

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时 } a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 3 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2 + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n + 1, \text{ 检验知：当 } n=1 \text{ 时上式也成立，}$$

$$\text{故 } a_n = 2^n + 1 (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$(2) \because b_n = 2^n + (-1)^n n.$$

当 n 为偶数时, $T_n = 2 + 2^2 + \dots + 2^n + (-1) + 2 + (-3) + 4 + \dots + (-1)^n n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n}{2} = 2^{n+1} - 2 + \frac{n}{2}$;

当 n 为奇数时, $T_n = T_{n-1} + 2^n + (-1)^n n = 2^n - 2 + \frac{n-1}{2} + 2^n - n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n+1}{2}$ 且 $n \geq 3$,

又 $n=1$ 时 $T_1 = b_1 = 2 - 1 = 1$ 满足上式, 此时 $T_n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n+1}{2}$;

$$T_n = \begin{cases} 2^{n+1} - 2 - \frac{n+1}{2}, n = 2k-1 \\ 2^{n+1} - 2 + \frac{n}{2}, n = 2k \end{cases} \quad \text{且 } k \in \mathbb{N}^*.$$

18. (2023·全国·高三专题练习) 某少数民族的刺绣有着悠久的历史, 下图①、②、③、④为她们刺绣最简单的四个图案, 这些图案都由小正方形构成, 小正方形数越多刺绣越漂亮, 现按同样的规律刺绣(小正方形的摆放规律相同), 设第 n 个图形包含 $f(n)$ 个小正方形.



(1) 求出 $f(5)$;

(2) 归纳出 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系式, 并根据你得到的关系式求 $f(n)$ 的表达式;

(3) 求证: $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)-1} + \frac{1}{f(3)-1} + \dots + \frac{1}{f(n)-1} < \frac{3}{2}$.

【答案】(1)41

(2) $f(n+1) - f(n) = 4n$, $f(n) = 2n^2 - 2n + 1$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 直接根据图形中小正方形排列规律可得;

(2) 先对已知的前几个图形中小正方形个数作差 (后一个减去前一个), 从而找出规律, 进而归纳出 $f(n+1) - f(n)$, 然后利用累加法求出 $f(n)$;

(3) 根据 $f(n)-1$ 的特点, 利用裂项相消法求和, 进而证出不等式.

【详解】(1) $\because f(1)=1, f(2)=5, f(3)=13, f(4)=25$,

$\therefore f(5) = 25 + 4 \times 4 = 41$.

(2) $\because f(2) - f(1) = 4 = 4 \times 1, f(3) - f(2) = 8 = 4 \times 2, f(4) - f(3) = 12 = 4 \times 3, f(5) - f(4) = 16 = 4 \times 4$,

$$\therefore f(n+1) - f(n) = 4n,$$

$$\therefore f(n) - f(n-1) = 4(n-1), \quad f(n-1) - f(n-2) = 4(n-2),$$

$$f(n-2) - f(n-3) = 4(n-3), \quad \text{L} \quad , \quad f(2) - f(1) = 4 \times 1,$$

$$\text{以上各式相加得 } f(n) - f(1) = 4 \times [(n-1) + (n-2) + \text{L} + 2 + 1] = 2(n-1) \cdot n,$$

$$\therefore f(n) = 2n^2 - 2n + 1 (n \geq 2),$$

$$\text{又 } n=1 \text{ 时, } f(1) \text{ 也适合 } f(n),$$

$$\therefore f(n) = 2n^2 - 2n + 1.$$

$$(3) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{f(n)-1} = \frac{1}{2n^2-2n+1-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right),$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)-1} + \frac{1}{f(3)-1} + \text{L} + \frac{1}{f(n)-1} = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \text{L} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)-1} + \frac{1}{f(3)-1} + \text{L} + \frac{1}{f(n)-1} < \frac{3}{2}.$$

19. (2023·内蒙古赤峰·校联考三模) 设各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1$,

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{4n^2 - 1}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设函数 $f(x) = x \cdot 2^{x-1}$, 且 $b_n = f(a_n)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$;

$$(2) T_n = \frac{(6n-5) \cdot 4^n + 5}{9}.$$

【分析】(1) 由递推关系, 根据累加法求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 由条件可得 $b_n = (2n-1) \cdot 4^{n-1}$, 利用错位相减法求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

$$\text{【详解】(1) 由 } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{4n^2 - 1}, \text{ 可得 } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3}, \dots, \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = 1 - \frac{1}{3}$$

以上各式分别相加得 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{2n-1}$ ，又 $a_1 = 1$ ，

所以当 $n \geq 2$ 时， $a_n = 2n - 1$ ，

经检验 $a_1 = 1$ 符合 $a_n = 2n - 1$ ，

所以 $a_n = 2n - 1$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ；

$$(2) \quad b_n = f(a_n) = f(2n-1) = (2n-1) \cdot 4^{n-1},$$

$$T_n = 1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 5 \times 4^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 4^{n-2} + (2n-1) \cdot 4^{n-1},$$

$$4T_n = 1 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 4^{n-1} + (2n-1) \cdot 4^n,$$

两式相减得：

$$-3T_n = 1 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + \cdots + 2 \times 4^{n-1} - (2n-1) \cdot 4^n,$$

$$\text{所以 } -3T_n = 1 + \frac{2 \times 4^1 (1 - 4^{n-1})}{1 - 4} - (2n-1) \cdot 4^n,$$

$$\text{故 } -3T_n = 1 + \frac{2}{3} \times 4^n - \frac{8}{3} - (2n-1) \cdot 4^n = -\frac{5}{3} - \left(2n - \frac{5}{3}\right) \cdot 4^n,$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(6n-5) \cdot 4^n + 5}{9}.$$

20. (2023·全国·学军中学校联考二模) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$, $a_1 = 1, a_2 = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 的任意 a_k 与 a_{k+1} 项之间，都插入 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 个相同的数 $(-1)^k k$ ，组成数列 $\{b_n\}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n ，求 T_{27} 的值.

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $T_{27} = 84$

【分析】(1) 由条件证明数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列，利用累加法求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{b_n\}$ 中在 a_{k+1} 之前共有 $k + (1 + 2 + 3 + \cdots + k) = \frac{k^2 + 3k}{2}$ 项，由此确定前 27 项的值，再分组，结合等比求和公式可求得答案.

【详解】(1) 因为 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$ ，

所以 $a_{n+1} - a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$ ，又 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/515032120113011310>