辽宁省重点高中沈阳市郊联体

2023-2024学年度下学期考试高二年级4月试题

数学

命题人：康平县高级中学　　何庆超　　　　评审题人：沈阳市第八十三中学　于洋

注意事项：

1．答题前填写好自己的姓名、班级、考号

2．请将答案正确填写在答题卡

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 数列 $-1,\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{8}{7},-\frac{16}{9},\cdots$ 的一个通项公式为（　　）

A. $(-1)^n\frac{2^n}{2n-1}$　　B. $(-1)^n\frac{2^{n-1}}{2n-1}$　　C. $(-1)^{n+1}\frac{2^n}{2n+1}$　　D. $(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}$

2. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$且满足$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则$a_{12}=$（　　）

A. 2　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{12}$

3. 为了研究高中学生对乡村音乐的态度(喜欢和不喜欢两种态度)与性别的关系，运用2×2列联表进行独立性检验，计算得$K^2=8.01$，则认为“喜欢乡村音乐与性别有关系”的把握约为(　　)

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

A. 0.1%　　B. 1%　　C. 99.5%　　D. 99.9%

4. “一尺之锤，日取其半，万世不竭”语出《庄子·天下》，意思是一尺长的棍棒，每日截取它的一半，永远截不完（一尺约等于 33.33 厘米）．这形象地说明了事物具有无限可分性．问：当剩余的棍棒长度小于 1 厘米时需要截取的最少次数为（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

5. 已知数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列，其前 n 项和为S_n，$a_1=-19$，$a_7-a_4=6$，若对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$，总有$S_n\geq S_m$恒成立，则$m=$（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 9　　D. 10

6. 在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{15}{8},a_3a_4=-\frac{9}{8}$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=$（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

7. 在等比数列$\left\{a_n\right\}$中，公比$q=2$，前 87 项和$S_{87}=140$，则$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{87}=$（　　）

A. $\frac{140}{3}$　　B. 60　　C. 80　　D. 160

8. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_{n+1}=\frac{a_n+a}{a_n+1}\left(a\in R,n\in N^*\right)$，且$a_1=\frac{1}{2}$，则下列说法错误的是（　　）

A. 存在$a\in R$，使得$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列

B. 当$a=-1$时，$a_{2020}=3$

C. 当$a=2$时，$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n<\sqrt{2}$

D. 当$a=4$时，$\left\{\frac{a_n+2}{a_n-2}\right\}$是等比数列

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对的得 6

分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列有关回归分析的结论中，正确的是（　　）

A. 若回归方程为 $\hat{y}=6-2.5x$，则变量 y 与 x 负相关

B. 运用最小二乘法求得的经验回归直线一定经过样本点的中心 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$

C. 若线性相关系数 $|r|$ 越小，说明两个变量之间的线性相关性越强

D. 若散点图中所有点都在直线 $y=0.92x-4.21$，则相关系数 $r=0.92$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，则下列命题正确的是（　　）

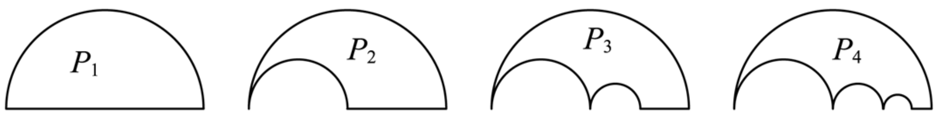
A. 若 $a_3+a_7=4$，则 $S_9=18$

B. 若 $S_{15}>0$，$S_{16}<0$，则 $a_8^2>a_9^2$

C. 若 $a_1+a_2=5$，$a_3+a_4=9$，则 $a_7+a_8=17$

D. 若 $a_8=S_{10}$，则 $S_9>0$，$S_{10}<0$

11. 如图，P_1 是一块半径为 1 的圆形纸板，在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2，然后依次剪去一个更小半圆（其直径为前一个剪掉半圆的半径）得图形 P_3，P_4，$\cdots$，P_n，$\cdots$，记纸板 P_n 的周长为 L_n，面积为 S_n，则下列说法正确的是（　　）



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

A. $L_3=\dfrac{7}{4}\pi+\dfrac{1}{2}$　　B. $S_3=\dfrac{11}{32}\pi$

C. $L_n=\pi\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　D. $S_{n+1}=S_n-\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$

三、填空题：（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=2$，且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=$__________.

13. 设等差数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{n+3}$，则$\frac{a_8}{b_5+b_{11}}=$______.

14. 德国大数学家高斯年少成名，被誉为数学界的王子．在其年幼时，对$1+2+3+\cdots+100$的求和运算中，提出了倒序相加法的原理，该原理基于所给数据前后对应项的和呈现一定的规律生成．因此，此方法也称为高斯算法．现有函数$f\left(x\right)=\frac{4^x}{4^x+2}$，则$f(\frac{1}{2019})+f(\frac{2}{2019})+f(\frac{3}{2019})+\cdots+f(\frac{2017}{2019})+f(\frac{2018}{2019})$的值为_______.

四、解答题：（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 若数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n满足$2S_n=3a_n+1$，$n\in N^*$.

（1）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_3\left(-a_{2n}\right)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

16. 张先生 2018 年年底购买了一辆$1.6L$排量的小轿车，为积极响应政府发展森林碳汇（指森林植物吸收大气中的二氧化碳并将其固定在植被或土壤中）的号召，买车的同时出资 1 万元向中国绿色碳汇基金会购买了 2 亩荒山用于植树造林.科学研究表明：轿车每行驶 3000 公里就要排放 1 吨二氧化碳，林木每生长 1 立方米，平均可吸收 1.8 吨二氧化碳.

（1）若张先生第一年（即 2019 年）会用车 1.2 万公里，以后逐年增加 1000 公里，则该轿车使用 10 年共要排放二氧化碳多少吨？

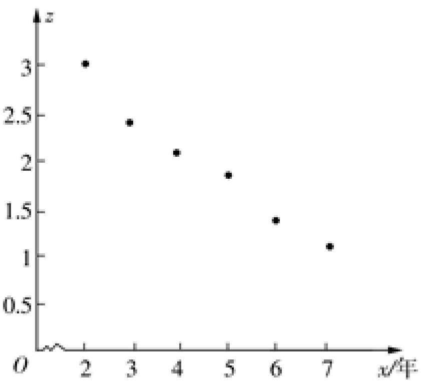
（2）若种植的林木第一年（即 2019 年）生长了 1 立方米，以后每年以 10%的生长速度递增，问林木至少生长多少年，吸收的二氧化碳的量超过轿车使用 10 年排出的二氧化碳的量（参考数据：$1.1^{14}\approx3.7975$，$1.1^{15}\approx4.1772$，$1.1^{16}\approx4.5950$）？

17. 二手车经销商小王对其所经营的 A 型号二手汽车的使用年数x与销售价格y

（单位：万元/辆）进行整理，得到如下数据：

使用年数 x	2	3	4	5	6	7
售价 y	20	12	8	6.4	4.4	3
$z=\ln y$	3.00	2.48	2.08	1.86	1.48	1.10

下面是 z 关于 x 的散点图：



（1）由散点图看出，可以用线性回归模型拟合 z 和 x 的关系，请用相关系数加以说明；

（2）求 y 关于 x 的回归方程，并预测某辆 A 型号二手汽车当使用年数为 9 年时，售价大约为多少？（$\hat{b}$、$\hat{a}$的值精确到 0.01）

（3）基于成本的考虑，该型号二手汽车的售价不得低于 7118 元，请根据（2）求出的回归方程预测在收购该型号二手汽车时，车辆的使用年数不得超过多少年？

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$ 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=187.4$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\approx 4.18$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}\approx 13.96$，

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(z_i-\overline{z}\right)^2}\approx 1.53$，$\ln 1.46\approx 0.38$，$\ln 0.7118\approx -0.34$.

18. 下图（1）是一个边长为 1

的正三角形，将每边三等分，以中间一段为边向外作正三角形，并擦去中间一段，得到图（2），如此继续下去，得到图（3）….由图可知，围成第一个图形的线段条数为3，围成第（2）个图形的线段条数为$12,\cdots$，设围成第(n)个图形的边长条数为a_n.

(1)　　(2)　　(3)

（1）求a_3,a_4，并直接写出a_n（不用证明）；

（2）数列$\{b_n\}$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\log_4\dfrac{a_{i+1}}{3}}{b_i}=2^n-1$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

19. (a,b)表示正整数a，b的最大公约数，若$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}\left(k,m\in\mathrm{N}^*\right)$，且$\forall x\in\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，$(x,m)=1$，则将$k$的最大值记为$\varphi(m)$，例如：$\varphi(1)=1$，$\varphi(5)=4$.

（1）求$\varphi(2)$，$\varphi(3)$，$\varphi(6)$；

（2）已知$(m,n)=1$时，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

（i）求$\varphi(6^n)$；

（ii）设$b_n=\dfrac{1}{3\varphi(6^n)-1}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\dfrac{6}{25}$.

辽宁省重点高中沈阳市郊联体

2023-2024 学年度下学期考试高二年级 4 月试题

数学

命题人：康平县高级中学　何庆超　　评审题人：沈阳市第八十三中学　于洋

注意事项：

1．答题前填写好自己的姓名、班级、考号

2．请将答案正确填写在答题卡

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 数列 $-1,\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{8}{7},-\frac{16}{9},\cdots$ 的一个通项公式为（　　）

A. $(-1)^n\frac{2^n}{2n-1}$　　B. $(-1)^n\frac{2^{n-1}}{2n-1}$　　C. $(-1)^{n+1}\frac{2^n}{2n+1}$　　D. $(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，化简数列为 $-\frac{2^0}{2\times0+1},\frac{2^2}{2\times1+1},-\frac{2^2}{2\times2+1},\frac{2^3}{2\times3+1},-\frac{2^4}{2\times4+1},\cdots$，根据运算规律，即可求解.

【详解】由数列 $-1,\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{8}{7},-\frac{16}{9},\cdots$，可得化为

$-\frac{2^0}{2\times0+1},\frac{2^2}{2\times1+1},-\frac{2^2}{2\times2+1},\frac{2^3}{2\times3+1},-\frac{2^4}{2\times4+1},\cdots$，

可得数列 $-1,\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{8}{7},-\frac{16}{9},\cdots$ 的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\frac{2^{n-1}}{2n-1}$.

故选：C.

2. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$且满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\left(n\in N^*\right)$，则$a_{12}=$（　　）

A. 2　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】先写出数列$\{a_n\}$的前几项，发现其周期，进而求得a_{12}的值.

【详解】由$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}\left(n\in N^*\right)$，

可得$a_2=-1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_4=2$，$a_5=-1$，$a_6=\dfrac{1}{2}$，

则数列的值以 3 为周期重复，则$a_{12}=a_3=\dfrac{1}{2}$

故选：C

3. 为了研究高中学生对乡村音乐的态度(喜欢和不喜欢两种态度)与性别的关系，运用 2×2 列联表进行独立性检验，计算得K^2=8.01，则认为“喜欢乡村音乐与性别有关系”的把握约为(　　)

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

A. 0.1%　　B. 1%　　C. 99.5%　　D. 99.9%

【答案】C

【解析】

【分析】根据观测值与临界值的比较可得结论.

【详解】∵K^2＝8.01＞7.879，观测值同临界值进行比较可知，有 99.5%的把握认为“

喜欢乡村音乐与性别有关系”．故选 C.

【点睛】本题主要考查独立性检验，掌握观测值与临界值进行比较的方法是求解的关键，题目较为简单，侧重考查对概念的理解.

4. “一尺之锤，日取其半，万世不竭”语出《庄子·天下》，意思是一尺长的棍棒，每日截取它的一半，永远截不完（一尺约等于 33.33 厘米）．这形象地说明了事物具有无限可分性．问：当剩余的棍棒长度小于 1 厘米时需要截取的最少次数为（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【答案】A

【解析】

【分析】由题可知截取第 n 次后，剩余的棍棒长为 $\frac{1}{2^n}$ 尺，然后列不等式可求出 n 的值

【详解】解：由题意可知第一次剩余的棍棒长度为 $\frac{1}{2}$ 尺，则第 n 次剩余的棍棒长为 $\frac{1}{2^n}$ 尺，

由 $\frac{1}{2^n}\times 33.33<1$ 得，$n\geq 6$

所以当剩余的棍棒长度小于 1 厘米时需要截取的最少次数为 6，

故选：A

【点睛】此题考查等比数列的应用，属于基础题.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=-19$，$a_7-a_4=6$，若对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，总有 $S_n\geq S_m$ 恒成立，则 $m=$（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 9　　D. 10

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，求得等差数列的通项公式，从而得到数列 $\{a_n\}$ 前 10 项都是负数，从而得到结果.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由性质知$a_7-a_4=3d=6$，则$d=2$，且$a_1=-19$，

则$a_n=a_1+(n-1)d=-19+(n-1)\times 2=2n-21$，

令$a_n>0$，得$n>\frac{21}{2}$，即前10项都是负数，

所以S_{10}最小，所以$m=10$.

故选:D

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{15}{8},a_3a_4=-\frac{9}{8}$，则

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=$（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】

利用等比数列下标和相等的性质有$a_1a_6=a_2a_5=a_3a_4$，而目标式可化为

$\frac{a_1+a_6}{a_1a_6}+\frac{a_2+a_5}{a_2a_5}+\frac{a_3+a_4}{a_3a_4}$结合已知条件即可求值.

【详解】$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=\frac{a_1+a_6}{a_1a_6}+\frac{a_2+a_5}{a_2a_5}+\frac{a_3+a_4}{a_3a_4}$，

$\because$等比数列$\{a_n\}$中$a_3a_4=-\frac{9}{8}$，而$a_1a_6=a_2a_5=a_3a_4$，

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}=-\frac{8}{9}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=-\frac{5}{3}$.

故选：D

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=2$，前87项和$S_{87}=140$，则$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{87}=$

（　　）

A. $\dfrac{140}{3}$　　B. 60　　C. 80　　D. 160

【答案】C

【解析】

【分析】利用等比数列的性质，$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{85}$，$a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{86}$，$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{87}$也构成等比数列，列方程可解.

【详解】$\because\{a_n\}$为公比$q=2$的等比数列，

$\therefore$可设$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{85}=x$，

$a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{86}=2x$，

$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{87}=4x$，

$\therefore S_{87}=x+2x+4x=140$，

解得：$x=20$，

$\therefore a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{87}=4x=4\times20=80$.

故选：C

【点睛】等差（比）数列问题解决的基本方法：基本量代换和灵活运用性质.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a}{a_n+1}\left(a\in R,n\in N^*\right)$，且$a_1=\dfrac{1}{2}$，则下列说法错误的是（　　）

A. 存在$a\in R$，使得$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列

B. 当$a=-1$时，$a_{2020}=3$

C. 当$a=2$时，$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n<\sqrt{2}$

D. 当$a=4$时，$\left\{\dfrac{a_n+2}{a_n-2}\right\}$是等比数列

【答案】C

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/515143304000011304