第五章

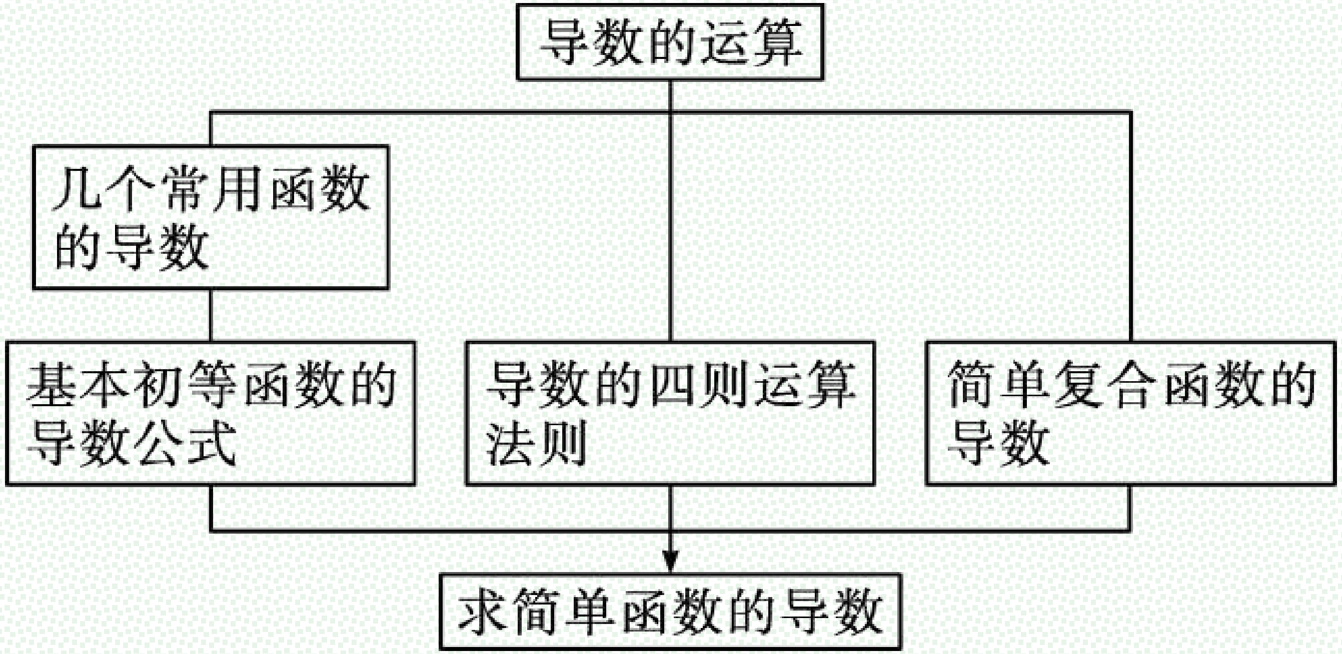
5.2.1、基本初等函数的导数、5.2.2、导数的四则运算法则

学习单元2　导数的运算

在必修第一册中我们学过基本初等函数,并且知道,很多复杂的函数都是通过对这些函数进行加、减、乘、除等运算得到的.由此自然想到,可以先求出基本初等函数的导数,然后研究导数的“运算法则”,这样就可以利用导数的运算法则和基本初等函数的导数求出复杂函数的导数.

由于求基本初等函数的导数以及推导导数的运算法则都涉及极限运算,而极限的具体知识在高中阶段是不作要求的,所以教材中对上述内容并没有进行严格的数学推导,而是先根据导数的定义求解几个常用函数的导数,在此基础上直接给出基本初等函数的导数公式表;然后采用从特殊到一般的方法,先以具体函数的求导使我们对导数的运算法则有直观的感觉,然后

给出导数的四则运算法则以及复合函数的求导法则.由于复合函数的求导涉及复合函数的自变量、中间变量、因变量的结构分析,需要两次求导的过程,所以复合函数的求导是本学习单元的难点.由此,我们提出本学习单元的研究内容:几个常用函数的导数—基本初等函数的导数公式—导数的四则运算法则—简单复合函数的求导法则—求简单函数的导数,这是学习本单元的知识明线,具体内容结构如下图所示:



本学习单元的最终目标是能求解几个常用函数的导数,在此基础上熟记基本初等函数的导数公式表并掌握导数的四则运算法则以及简单复合函数的求导法则.在这个过程中,我们进一步理解导数的概念,理解求函数的导数是一种借助极限的运算,从而进一步体会极限思想,从中培养我们数学运算的核心素养.

学习目标	1. 能根据导数的定义求几个常用函数的导数.(数学运算) 2. 掌握基本初等函数的导数公式,并会求简单函数的导数.(数学运算) 3. 掌握导数的四则运算法则,能进行导数的运算.(数学运算)

目录索引

基础落实·必备知识一遍过

知识点1　几个常用函数的导数

函数	导数
$f(x)=c$(c为常数)	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=$__$\frac{1}{2\sqrt{x}}$__

微思考

常数函数的导数为0说明什么?

提示 说明常数函数$f(x)=c$图象上每一点处的切线的斜率都为0,即每一点处的切线都平行(或重合)于x轴.

知识点2　基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x)=c$（c为常数）	$f'(x)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$
$f(x)=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$，且$\alpha\neq0$）	$f'(x)=$ $\underline{\quad \alpha x^{\alpha-1} \quad}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=$ $\underline{\quad \cos x \quad}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=$ $\underline{\quad -\sin x \quad}$
$f(x)=a^{x}$（$a>0$，且$a\neq1$）	$f'(x)=$ $\underline{\quad a^{x}\ln a \quad}$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=$ $\underline{\quad e^{x} \quad}$

函数	导数
$f(x)=\log_a x(a>0,且a\neq 1)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ 注意对数函数的求导公式中,自变量的取值要大于零才有意义
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{x}\quad}$

微点拨

由于根式函数可以转化为幂函数的形式,因此可以利用幂函数的导数公式解决根式函数的求导问题.一般地,对于函数 $f(x)=\sqrt[n]{x^m}(x>0)$,有 $f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$,从而 $f'(x)=(x^{\frac{m}{n}})'=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$.

微思考

从几何意义上思考,为什么$x'=1$?

提示 因为函数$y=x$为一次函数,其图象是一条直线,直线上任意点处的切线的斜率都相等,且都为1.

知识点3　导数的四则运算法则

和的导数	$[f(x)+g(x)]'=$ <u>$f'(x)+g'(x)$</u>
差的导数	$[f(x)-g(x)]'=$ <u>$f'(x)-g'(x)$</u>
积的导数	$[cf(x)]'=cf'(x)$(c为常数) $[f(x)g(x)]'=$ <u>$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$</u>
商的导数	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x)\neq0)$

对于不具备导数运算法则结构形式的函数要进行适当恒等变形,转化为较易求导的结构形式,再求导数

微点拨

两个函数和与差的导数运算法则可以推广到若干个函数和与差的情形:$[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x)$.

微思考

函数 $y=\frac{1}{g(x)}$怎样求导数?

提示 函数 $y=\frac{1}{g(x)}$的导数可以看作是商的导数,其结果为$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

重难探究·能力素养速提升

问题1根据导数的定义我们能求出一些常用函数的导数,基本初等函数的导数公式表也是由导数的定义得到的,你能否熟记并加以应用?

问题2给定两个函数,求它们的导数,再计算这两个函数的和、差、积、商的导数,观察它们与这两个函数的导数有什么关系.由此你能否得到导数的四则运算法则?

问题3根据导数的公式表及导数的四则运算法则,如何求函数的导数?

探究点一　导数公式与运算法则的简单应用

【例1】 求下列函数的导数:

(1)$y=x^{-2}+x^2$;

解 $y'=2x-2x^{-3}$.

(2)$y=\ln x-4^x$;

解 $y'=(\ln x-4^x)'=(\ln x)'-(4^x)'=\frac{1}{x}-4^x\ln 4$.

(3)$y=x^2\cos x$;

解 $y'=(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$.

(4)$y=\frac{\ln x}{x^2+1}$.

解 $y'=\frac{x^2+1-2x^2\cdot\ln x}{x(x^2+1)^2}$.