江西省赣州市赣源中学2024年高三（最后冲刺）数学试题试卷

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．国务院发布《关于进一步调整优化结构、提高教育经费使用效益的意见》中提出，要优先落实教育投入．某研究机构统计了2010年至2018年国家财政性教育经费投入情况及其在GDP中的占比数据，并将其绘制成下表，由下表可知下列叙述错误的是（　　）

A．随着文化教育重视程度的不断提高，国在财政性教育经费的支出持续增长

B．2012年以来，国家财政性教育经费的支出占GDP比例持续7年保持在4%以上

C．从2010年至2018年，中国GDP的总值最少增加60万亿

D．从2010年到2018年，国家财政性教育经费的支出增长最多的年份是2012年

2．已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1), x>1\\ 3^{-x}, x\le 1\end{cases}$，则$f\left[f(-2)\right]=$（　　）

A．1　　　　**B**．2　　　　**C**．3　　　　**D**．4

3．已知函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{e^x}(x\in R)$，若关于$x$的方程$f(x)-m+1=0$恰好有**3**个不相等的实数根，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$(\dfrac{\sqrt{2e}}{2e},1)$　　　　**B**．$(0,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e})$　　　　**C**．$(1,\dfrac{1}{e}+1)$　　　　**D**．$(1,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$

4．已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 A 在抛物线上，且 $|AF|=5$，过点 F 的动直线 l 与抛物线 B,C 交于两点，O 为坐标原点，抛物线的准线与 x 轴的交点为 M .给出下列四个命题：

①在抛物线上满足条件的点 A 仅有一个；

②若 P 是抛物线准线上一动点，则 $|PA|+|PO|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$；

③无论过点 F 的直线 l 在什么位置，总有 $\angle OMB=\angle OMC$；

④若点 C 在抛物线准线上的射影为 D，则三点 B、O、D 在同一条直线上.

其中所有正确命题的个数为（　　）

A．1　　**B．2**　　**C．3**　　**D．4**

5．在 ΔABC 中，***D*** 为 AC 的中点，***E*** 为 AB 上靠近点 ***B*** 的三等分点，且 BD，CE 相交于点 ***P***，则 $\overrightarrow{AP}=$（　　）

A． $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　**B．** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

C． $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　**D．** $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

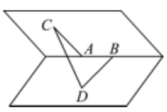
6．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，不等式 $f(ax+2)\le f(-1)$ 对于 $x\in[1,2]$ 恒成立，则 a 的取值范围是

A． $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$　　**B．** $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　　**C．** $\left[-\frac{1}{2},0\right]$　　**D．** $[0,1]$

7．已知定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，N 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的任意一点，点 F_1 关于点 N 的对称点为 M，线段 F_1M 的垂直平分线与直线 F_2M 相交于点 P，则点 P 的轨迹是（　　）

A．椭圆　　**B．双曲线**　　**C．抛物线**　　**D．圆**

8．如图在一个 60° 的二面角的棱有两个点 A,B，线段 AC,BD 分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于棱 AB，且 $AB=AC=2,BD=4$，则 CD 的长为（　　）



A．4　　**B．** $2\sqrt{5}$　　**C．2**　　**D．** $2\sqrt{3}$

9．已知集合 ***A***={***x***|–1<***x***<2}，***B***={***x***|***x***>1}，则 ***A***∪***B***=

A．（–1，1）　　**B．（1，2）**　　**C．（–1，+∞）**　　**D．（1，+∞）**

10．若 $0<a<b<1$，则 a^b，b^a，$\log_b a$，$\log_{\frac{1}{a}} b$ 的大小关系为（　　）

A. $a^b > b^a > \log_b a > \log_{\frac{1}{a}} b$ **B.** $b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b > \log_b a$

C. $\log_b a > a^b > b^a > \log_{\frac{1}{a}} b$ **D.** $\log_b a > b^a > a^b > \log_{\frac{1}{a}} b$

11．已知函数 $f(x) = ax + 1 + |2x^2 + ax - 1|$（$a \in R$）的最小值为 **0**，则 $a =$（　　）

A. $\frac{1}{2}$ **B.** -1 **C.** ± 1 **D.** $\pm\frac{1}{2}$

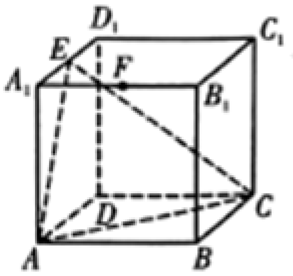
12．已知复数 z 满足 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 的虚部是（　　）

A. -1 **B.** **1** **C.** $-i$ **D.** i

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知圆柱的上下底面的中心分别为 O_1, O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 **36** 的正方形，则该圆柱的体积为____

14．如图，在棱长为 **2** 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是棱 A_1D_1，A_1B_1 的中点，P 是侧面正方形 BCC_1B_1 内一点（含边界），若 $FP //$ 平面 AEC，则线段 A_1P 长度的取值范围是______.



15．已知平行于 x 轴的直线 l 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于 P，Q 两点，O 为坐标原点，若 ΔOPQ 为等边三角形，则双曲线 C 的离心率为______.

16．$f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(x^2 - 1), & x \geq 2 \end{cases}$，则 f（f（2））的值为____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f(x) = \ln x + \lambda\left(\frac{1}{x} - x\right)(\lambda \in \mathbf{R})$.

（1）当 $x > 1$ 时，不等式 $f(x) < 0$ 恒成立，求 λ 的最小值；

（2）设数列 $a_n = \frac{1}{n}(n \in \mathrm{N}^*)$，其前 n 项和为 S_n，证明：$S_{2n} - S_n + \frac{a_n}{4} > \ln 2$.

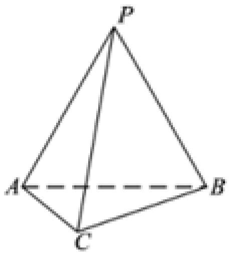
18．（12 分）若正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$，求 $\frac{1}{3a+2} + \frac{1}{3b+2} + \frac{1}{3c+2}$ 的最小值.

19．（12 分）已知函数 $f(x)=x^2+\ln x$．

（1）若函数 $g(x)=f(x)+(a-1)\ln x$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)-(2m-1)x<(1-m)x^2$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

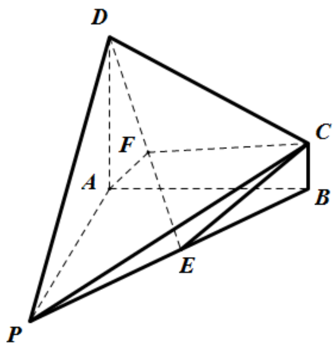
20．（12 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AC=BC=2$， $\angle ACB=90^\circ$，侧面 PAB 为等边三角形，侧棱 $PC=2\sqrt{2}$.



（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；

（2）求三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积.

21．（12 分）已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $PA=AB$，在四边形 $ABCD$ 中， $DA\perp AB$， $AD//BC$， $AB=AD=2BC=2$， E 为 PB 的中点，连接 DE， F 为 DE 的中点，连接 AF．



（1）求证： $AF\perp PB$.

（2）求二面角 $A-EC-D$ 的余弦值.

22．（10 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 $P\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+m$ 交椭圆 C 于 A,B 两点，线段 AB 的中点 M 在直线 $x=1$ 上，求证：线段 AB 的中垂线恒过定点.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

观察图表，判断四个选项是否正确．

【详解】

由表易知 A、B、D 项均正确，2010 年中国 GDP 为 $\dfrac{1.4670}{3.55\%} \approx 41$ 万亿元，2018 年中国 GDP 为 $\dfrac{3.6990}{4.11\%} = 90$ 万亿元，则从 2010 年至 2018 年，中国 GDP 的总值大约增加 49 万亿，故 **C** 项错误．

【点睛】

本题考查统计图表，正确认识图表是解题基础．

2、**C**

【解析】

结合分段函数的解析式,先求出 $f(-2)$,进而可求出 $f\left[f(-2)\right]$.

【详解】

由题意可得 $f(-2) = 3^2 = 9$，则 $f\left[f(-2)\right] = f(9) = \log_2(9-1) = 3$.

故选:**C.**

【点睛】

本题考查了求函数的值,考查了分段函数的性质,考查运算求解能力,属于基础题.

3、**D**

【解析】

讨论 $x > 0$，$x = 0$，$x < 0$ 三种情况，求导得到单调区间，画出函数图像，根据图像得到答案.

【详解】

当 $x > 0$ 时，$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$，故 $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$，函数在 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减，且

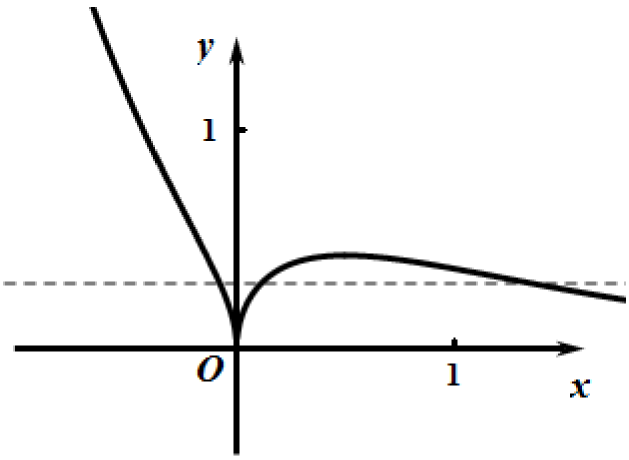
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2e}}{2e}$；

当 $x=0$ 时，$f\left(0\right)=0$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{e^x}$，$f'(x)=-\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}<0$，函数单调递减；

如图所示画出函数图像，则 $0<m-1<f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$，故 $m\in(1,\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1)$.

故选：D.



【点睛】

本题考查了利用导数求函数的零点问题，意在考查学生的计算能力和应用能力.

4、C

【解析】

①：由抛物线的定义可知 $\left|AF\right|=a+1=5$，从而可求 A 的坐标；②：做 A 关于准线 $x=-1$ 的对称点为 A'，通过分析可知当 A',P,O 三点共线时 $\left|PA\right|+\left|PO\right|$ 取最小值，由两点间的距离公式，可求此时最小值 $\left|A'O\right|$；③：设出直线 l 方程，联立直线与抛物线方程，结合韦达定理，可知焦点坐标的关系，进而可求 $k_{MB}+k_{MC}=0$，从而可判断出 $\angle OMB,\angle OMC$ 的关系；④：计算直线 OD,OB 的斜率之差，可得两直线斜率相等，进而可判断三点 B、O、D 在同一条直线上.

【详解】

解：对于①，设 $A\left(a,b\right)$，由抛物线的方程得 $F\left(1,0\right)$，则 $\left|AF\right|=a+1=5$， 故 $a=4$，

所以 $A\left(4,4\right)$ 或 $\left(4,-4\right)$，所以满足条件的点 A 有二个，故①不正确；

对于②，不妨设 $A\left(4,4\right)$，则 A 关于准线 $x=-1$ 的对称点为 $A'\left(-6,4\right)$，

故 $\left|PA\right|+\left|OP\right|=\left|PA'\right|+\left|OP\right|\geq\left|A'O\right|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$，

当且仅当 A',P,O 三点共线时等号成立，故②正确；

对于③，由题意知，$M\left(-1,0\right)$，且 l 的斜率不为 **0**，则设 l 方程为：$x=my+1\left(m\neq 0\right)$，

设 l 与抛物线的交点坐标为 $B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，联立直线与抛物线的方程为，

$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$，整理得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$，所以

$x_1+x_2=4m^2+2$，$x_1x_2=\left(my_1+1\right)\left(my_2+1\right)=-4m^2+4m^2+1=1$

则 $k_{MB}+k_{MC}=\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=\dfrac{y_1\left(x_2+1\right)+y_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)}=\dfrac{2y_1+2y_2+2my_1y_2}{x_1+x_2+x_1x_2+1}$

$=\dfrac{2\times 4m-2m\times 4}{4m^2+2+1+1}=0$.故 MB,MC 的倾斜角互补，所以 $\angle OMB=\angle OMC$，故③正确.

对于④，由题意知 $D\left(-1,y_2\right)$，由③知，$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$

则 $k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{4}{y_1},k_{OD}=-y_2$，由 $k_{OB}-k_{OD}=\dfrac{4}{y_1}+y_2=\dfrac{4+y_1y_2}{y_1}=0$，

知 $k_{OB}=k_{OD}$，即三点 B、O、D 在同一条直线上，故④正确.

故选:C.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义，考查了直线与抛物线的位置关系，考查了抛物线的性质，考查了直线方程，考查了两点的斜率公式.本题的难点在于第二个命题，结合初中的“饮马问题”分析出何时取最小值.

5、B

【解析】

设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3x}{2}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，

由 ***B***，***P***，***D*** 三点共线，***C***，***P***，***E*** 三点共线,可知 $x+2y=1$，$\dfrac{3x}{2}+y=1$,解得 x,y 即可得出结果.

【详解】

设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3x}{2}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，

因为 ***B***，***P***，***D*** 三点共线，***C***，***P***，***E*** 三点共线，

所以 $x+2y=1$，$\dfrac{3x}{2}+y=1$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$.

故选:B.

【点睛】

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用,属于基础题.

6、**A**

【解析】

根据奇偶性定义和性质可判断出函数为偶函数且在$\left(-\infty,0\right)$上是减函数，由此可将不等式化为$-1\le ax+2\le 1$；利用分离变量法可得$-\dfrac{3}{x}\le a\le -\dfrac{1}{x}$，求得$-\dfrac{3}{x}$的最大值和$-\dfrac{1}{x}$的最小值即可得到结果.

【详解】

Q $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$　　$\therefore f\left(x\right)$为定义在$R$上的偶函数，图象关于$y$轴对称

又$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上是增函数　　$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上是减函数

Q $f\left(ax+2\right)\le f\left(-1\right)$　　$\therefore\left|ax+2\right|\le 1$，即$-1\le ax+2\le 1$

Q $-1\le ax+2\le 1$对于$x\in\left[1,2\right]$恒成立　　$\therefore -\dfrac{3}{x}\le a\le -\dfrac{1}{x}$在$\left[1,2\right]$上恒成立

$\therefore -\dfrac{3}{2}\le a\le -1$，即$a$的取值范围为：$\left[-\dfrac{3}{2},-1\right]$

本题正确选项：A

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性和单调性求解函数不等式的问题，涉及到恒成立问题的求解；解题关键是能够利用函数单调性将函数值的大小关系转化为自变量的大小关系，从而利用分离变量法来处理恒成立问题.

7、**B**

【解析】

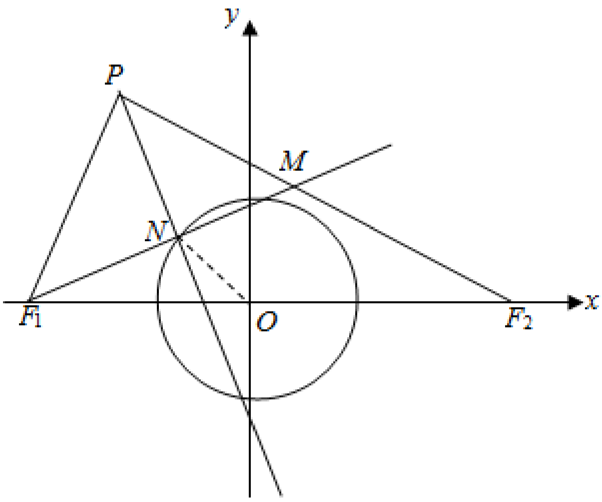
根据线段垂直平分线的性质，结合三角形中位线定理、圆锥曲线和圆的定义进行判断即可.

【详解】

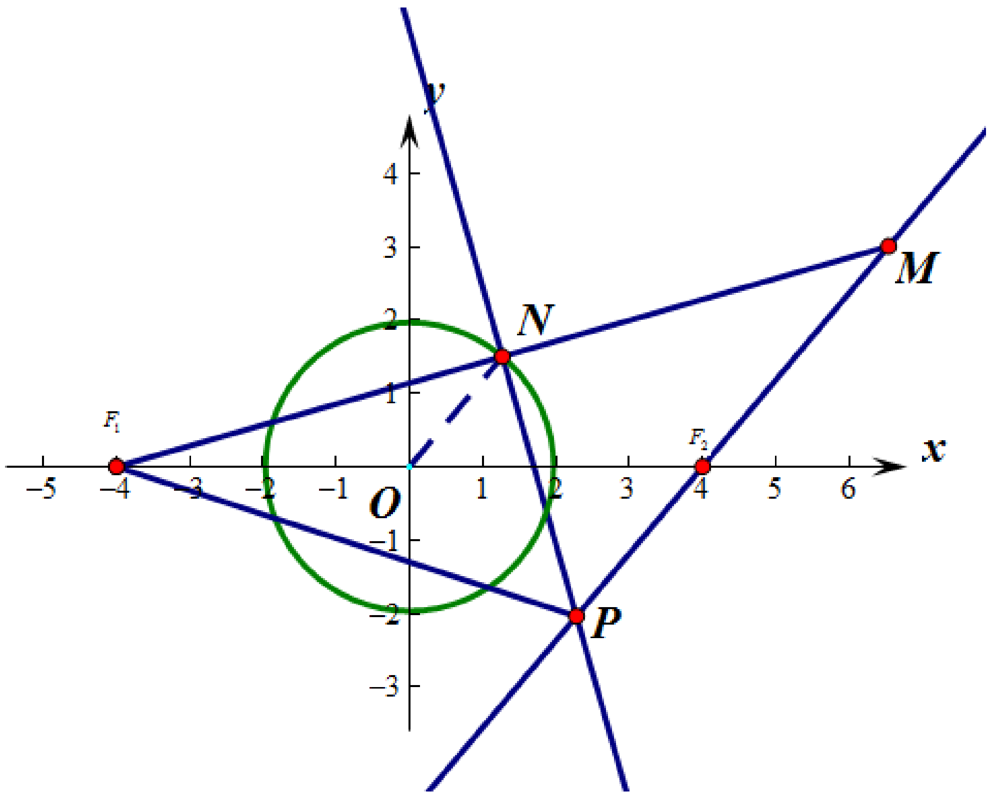
因为线段F_1M的垂直平分线与直线F_2M相交于点P，如下图所示：

所以有$PF_1=PM=PF_2-MF_2$，而O,N是中点，连接ON，故$MF_2=2ON=4$，

因此$PF_2-PF_1=4(4<F_2F_1)$



当 N 在如下图所示位置时有，所以有 $PF_1 = PM = PF_2 + MF_2$，而 O,N 是中点，连接 ON，



故 $MF_2 = 2ON = 4$，因此 $PF_1 - PF_2 = 4(4 < F_2F_1)$，

综上所述：有 $|PF_1 - PF_2| = 4(4 < F_2F_1)$，所以点 P 的轨迹是双曲线.

故选：**B**

【点睛】

本题考查了双曲线的定义，考查了数学运算能力和推理论证能力，考查了分类讨论思想.

8、**A**