

湖南省永州市新田一中 2024 年高考数学考前最后一卷预测卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

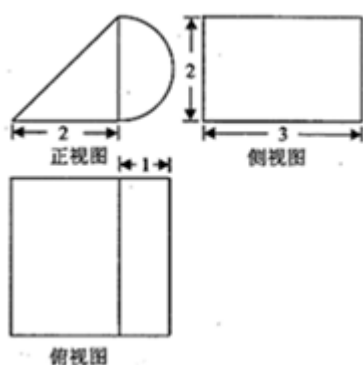
1. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦， O 是原点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ()

- A. -2 B. -4 C. 3 D. -3

2. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ，将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$ ，则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} =$ ()

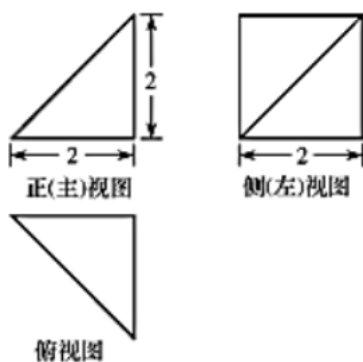
- A. 1194 B. 1695 C. 311 D. 1095

3. 某几何体的三视图如图所示(单位：cm)，则该几何体的体积等于 () cm^3



- A. $4 + \frac{2\pi}{3}$ B. $4 + \frac{3\pi}{2}$ C. $6 + \frac{2\pi}{3}$ D. $6 + \frac{3\pi}{2}$

4. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的表面积为 ()



- A. 8 B. $\frac{8}{3}$ C. $8 + 2\sqrt{2}$ D. $8 + 4\sqrt{2}$

5. 若函数 $f(x) = x^3 - mx^2 + 2x (m \in \mathbb{R})$ 在 $x = 1$ 处有极值，则 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 ()

A. $\frac{14}{27}$

B. 2

C. 1

D. 3

6. “学习强国”学习平台是由中宣部主管，以深入学习宣传新时代中国特色社会主义思想为主要内容，立足全体党员、面向全社会的优质平台，现日益成为老百姓了解国家动态、紧跟时代脉搏的热门 APP。该款软件主要设有“阅读文章”、“视听学习”两个学习模块和“每日答题”、“每周答题”、“专项答题”、“挑战答题”四个答题模块。某人在学习过程中，“阅读文章”不能放首位，四个答题板块中有且仅有三个答题板块相邻的学习方法有（ ）

A. 60

B. 192

C. 240

D. 432

7. 设 F 为抛物线 $x = 4y^2$ 的焦点， A, B, C 为抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ ，则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$ （ ）。

A. 9

B. 6

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{3}{16}$

8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论：

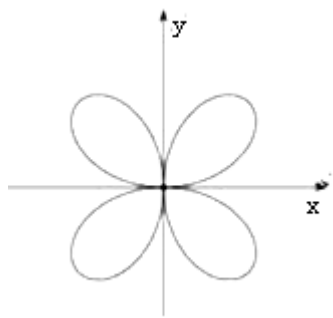
①曲线 C 有四条对称轴；

②曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$ ；

③曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$ ；

④四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是（ ）



A. ①②

B. ①③

C. ①③④

D. ①②④

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 7, a_{10} + a_7 = 0$ ，则 $a_3 + a_4 =$ （ ）

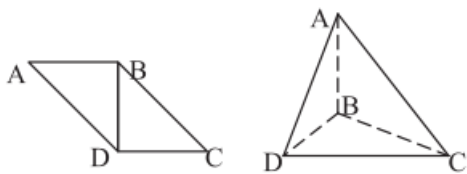
A. 20

B. 18

C. 16

D. 14

10. 如图，将两个全等等腰直角三角形拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，则直线 AC 与 BD 所成角余弦值为（ ）



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{3}$) 满足 $f(x + \pi) = f(x)$, $f(\frac{\pi}{12}) = 1$, 则 $f(-\frac{\pi}{12})$ 等于 ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

12. 已知 A, B, C, D 是球 O 的球面上四个不同的点, 若 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$, 且平面 $DBC \perp$ 平面 ABC , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{20\pi}{3}$ B. $\frac{15\pi}{2}$ C. 6π D. 5π

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$, $M(\sqrt{2}, 0)$, 若椭圆 C 上存在点 N 使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形 (O 为原点), 则椭圆 C 的离心率为_____.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n = \frac{S_n}{2} - 1$, 则 $S_7 =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-2) + f(\log_2 3) =$ _____.

16. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点和椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点重合, 直线过抛物线的焦点 F 与抛物线交于 P 、

Q 两点和椭圆交于 A 、 B 两点, M 为抛物线准线上一动点, 满足 $|PF| + |MF| = 8$, $\angle MFP = \frac{\pi}{3}$, 当 $\triangle MFP$ 面积最大时, 直线 AB 的方程为_____.

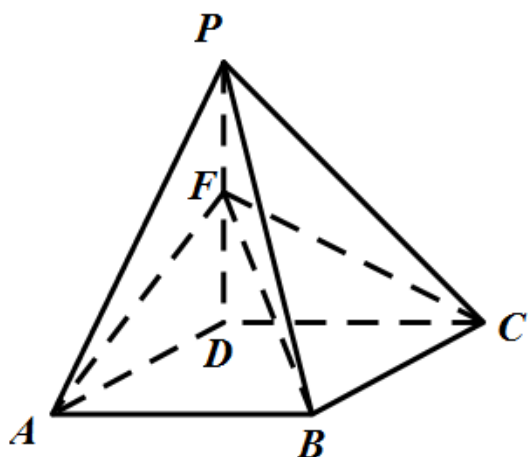
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 相交于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$, 若 P, Q 到 x 轴距离的乘积为 16.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设点 F 为抛物线 C 的焦点, 当 $\triangle PFQ$ 面积最小时, 求直线 l 的方程.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ADP = 90^\circ$, 平面 $ADP \perp$ 平面 $ABCD$, 点 F 为棱 PD 的中点.



(I) 在棱 AB 上是否存在一点 E ，使得 $AF \parallel$ 平面 PCE ，并说明理由；

(II) 当二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角。

19. (12 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + 2|x-a|$.

(1) 设 $a=1$ ，求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集；

(2) 已知 $a > -1$ ，且 $f(x)$ 的最小值等于 3，求实数 a 的值。

20. (12 分) 已知函数 $g(x) = e^x - (a-1)x^2 - bx - 1 (a, b \in \mathbb{R})$ ，其中 e 为自然对数的底数。

(1) 若函数 $f(x) = g'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是单调函数，试求 a 的取值范围；

(2) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个零点，且 $g(1) = 0$ ，求 a 的取值范围。

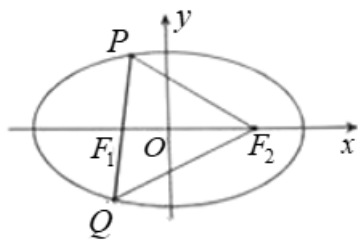
21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，焦距为 2，且经过点 $T\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ，

斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l_1 经过点 $M(0, 2)$ ，与椭圆 C 交于 G, H 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$ ，使得以 PG, PH 为邻边的平行四边形是菱形？如果存在，求出 m 的取值范围，如果不存在，请说明理由。

22. (10 分) 如图，已知椭圆 E 的右焦点为 $F_2(1, 0)$ ， P, Q 为椭圆上的两个动点， $\triangle PQF_2$ 周长的最大值为 8。



(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 直线 l 经过 F_2 , 交椭圆 E 于点 A, B , 直线 m 与直线 l 的倾斜角互补, 且交椭圆 E 于点 M, N ,

$|MN|^2 = 4|AB|$, 求证: 直线 m 与直线 l 的交点 T 在定直线上.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程得到 $y_1 y_2 = -4$, 计算

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 得到答案.

【详解】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$.

易知直线斜率不为 0, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$,

得到 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 故 $y_1 y_2 = -4$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = -3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了抛物线中的向量的数量积, 设直线为 $x = my + 1$ 可以简化运算, 是解题的关键.

2、D

【解析】

确定 $\{c_n\}$ 中前 35 项里两个数列中的项数，数列 $\{2n\}$ 中第 35 项为 70，这时可通过比较确定 $\{3^n\}$ 中有多少项可以插入这 35 项里面即可得，然后可求和。

【详解】

$n = 35$ 时， $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项和中， $\{3^n\}$ 有三项 3，9，27， $\{2n\}$ 有 32 项，所以

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095.$$

故选：D.

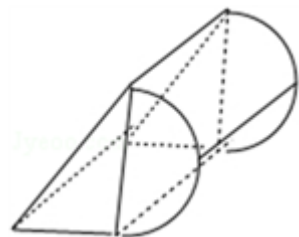
【点睛】

本题考查数列分组求和，掌握等差数列和等比数列前 n 项和公式是解题基础。解题关键是确定数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项中有多少项是 $\{2n\}$ 中的，又有多少项是 $\{3^n\}$ 中的。

3、D

【解析】

解：根据几何体的三视图知，该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，



结合图中数据，计算它的体积为：

$$V = V_{\text{三棱柱}} + V_{\text{半圆柱}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \times 1 = (6 + 1.5\pi) \text{ cm}^3.$$

故答案为 $6 + 1.5\pi$.

点睛：根据几何体的三视图知该几何体是三棱柱与半圆柱体的组合体，结合图中数据计算它的体积即可。

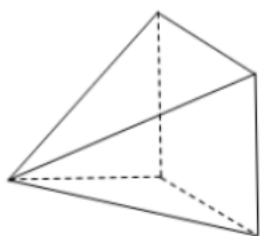
4、D

【解析】

根据三视图还原几何体为四棱锥，即可求出几何体的表面积。

【详解】

由三视图知几何体是四棱锥，如图，



且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，四棱锥的底面是正方形,边长为 2,棱锥的高为 2,

$$\text{所以 } S = 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2},$$

故选: D

【点睛】

本题主要考查了由三视图还原几何体,棱锥表面积的计算,考查了学生的运算能力,属于中档题.

5、B

【解析】

根据极值点处的导数为零先求出 m 的值,然后再按照求函数在连续的闭区间上最值的求法计算即可.

【详解】

解: 由已知得 $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 2$, $\therefore f'(1) = 3 - 2m + 2 = 0$, $\therefore m = \frac{5}{2}$, 经检验满足题意.

$$\therefore f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x, \quad f'(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$

由 $f'(x) < 0$ 得 $\frac{2}{3} < x < 1$; 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < \frac{2}{3}$ 或 $x > 1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上递增, 在 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上递减, 在 $[1, 2]$ 上递增.

$$\text{则 } f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{27}, \quad f(2) = 2,$$

由于 $f(2) > f(x)_{\text{极大值}}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 2.

故选: B.

【点睛】

本题考查了导数极值的性质以及利用导数求函数在连续的闭区间上的最值问题的基本思路, 属于中档题.

6、C

【解析】

四个答题板块中选三个捆绑在一起, 和另外一个答题板块用插入法. 注意按“阅读文章”分类.

【详解】

四个答题板块中选三个捆绑在一起，和另外一个答题板块用插入法，由于“阅读文章”不能放首位，因此不同的方法数为 $A_4^3 C_2^1 A_2^2 + A_4^3 A_3^2 = 240$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查排列组合的应用，考查捆绑法和插入法求解排列问题。对相邻问题用捆绑法，不相邻问题用插入法是解决这类问题的常用方法。

7、C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ 可得 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{16}$ ，利用定义将 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}|$ 用 x_1, x_2, x_3 表示即可。

【详解】

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ 及 $F(\frac{1}{16}, 0)$ ，
得 $(x_1 - \frac{1}{16}, y_1) + (x_2 - \frac{1}{16}, y_2) + (x_3 - \frac{1}{16}, y_3) = (0, 0)$ ，故 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{16}$ ，
所以 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = x_1 + \frac{1}{16} + x_2 + \frac{1}{16} + x_3 + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查利用抛物线定义求焦半径的问题，考查学生等价转化的能力，是一道容易题。

8、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数；②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值；③将面积转化为 x, y 的关系式，然后根据基本不等式求解出最大值；④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$ 。

【详解】

①：当 x 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 y 轴对称；

当 y 变为 $-y$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 x 轴对称；

当 y 变为 x 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称；

当 y 变为 $-x$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称;

综上所述: 有四条对称轴, 故正确;

②: 因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$,

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, 取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$,

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$, 故错误;

③: 设任意一点 $P(x, y)$, 所以围成的矩形面积为 xy ,

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$, 所以 $xy \leq \frac{1}{8}$,

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故正确;

④: 由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部,

因为圆的面积为: $S = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$, 所以四叶草的面积小于 $\frac{\pi}{4}$, 故正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用, 其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用, 难度较难. 分析方程所表示曲线的对称性, 可通过替换方程中 x, y 去分析证明.

9、A

【解析】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 再利用基本量法与题中给的条件列式求解首项与公差, 进而求得 $a_3 + a_4$ 即可.

【详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 由 $\begin{cases} a_5 = 7, \\ a_{10} + a_7 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + 4d = 7, \\ a_1 + 9d + a_1 + 6d = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 15, \\ d = -2 \end{cases}$. 所以

$$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 2 \times 15 + 5 \times (-2) = 20.$$

故选: A

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量求解, 属于基础题.

10、C

【解析】

利用建系, 假设 AB 长度, 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$, 利用向量的夹角公式, 可得结果.

【详解】

由平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AB \perp BD$

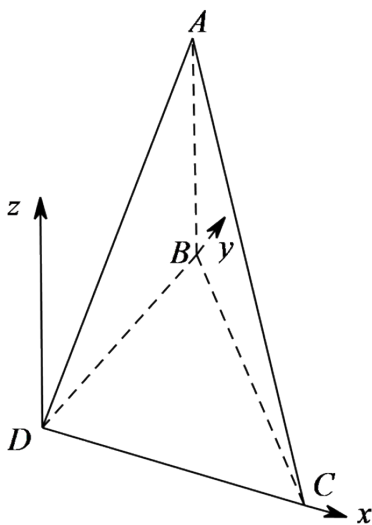
平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $AB \perp$ 平面 ABD

所以 $AB \perp$ 平面 BCD , 又 $DC \subset$ 平面 BCD

所以 $AB \perp DC$, 又 $DB \perp DC$

所以作 z 轴 $\parallel AB$, 建立空间直角坐标系 $B-xyz$

如图



设 $AB=1$, 所以 $BD=1, DC=1, BC=\sqrt{2}$

则 $A(0,1,1), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,0,0)$

所以 $\vec{AC}=(1,-1,-1), \vec{BD}=(0,-1,0)$

所以 $\cos \langle \vec{AC}, \vec{BD} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AC}| |\vec{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故选: C

【点睛】

本题考查异面直线所成角的余弦值, 一般采用这两种方法: (1) 将两条异面直线作辅助线放到同一个平面, 然后利用解三角形知识求解; (2) 建系, 利用空间向量, 属基础题.

11、C

【解析】

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 可得 $nT = \pi, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\omega = 2n, n \in \mathbf{N}^*$, 再根据 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$ 得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/516014202035010122>