3.1.4 牛顿—莱布尼兹公式

如果物体以速度 $v = v(t)$ $(v(t)$ 作直线运动，

到时刻 t 所经过的路程为

另一方面，如果物体经过的路程 $S = S(t)$ 那么物体

到时刻 t 所经过的路程为

即：$\int_a^b v(t)dt = S(b) - S(a)$ 其中 $S'(t) = v(t)$

定理：设$f(x)$

上一个可微函数$F(x)$

则 $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

简记为 $\int_a^b f(x)dx$

公式（※）称为牛顿—莱布尼兹公式。

证明：任取$[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则 $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

由Lagrange 中值定理可知，存在$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$，使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$从而F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$令\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i,$$

$\because f(x)$

$$\therefore \square_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \leftrightarrow o} \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

注：定理的条件可减弱为$f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积且存在$[a, b]$ 上的函数$F(x)$，使得

①$F(x)$ [ ]

②$F(x)$在(a, b) 内可导且$F'(x) = f(x)$ 。

定义 设$f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若$\forall x \in I$，存在函数$F(x)$，使得

$$F'(x) = f(x) \quad （或dF(x) = f(x)dx ），$$

则称$F(x)$为$f(x)$ 在I 上的一个**原函数**。

牛顿—莱布尼兹公式揭示了定积分与原函数之间的内在联系，它把定积分的计算问题转化为求原函数的问题，从而给定积分的计算提供了一个简便而有效的方法。

例 1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\left[x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

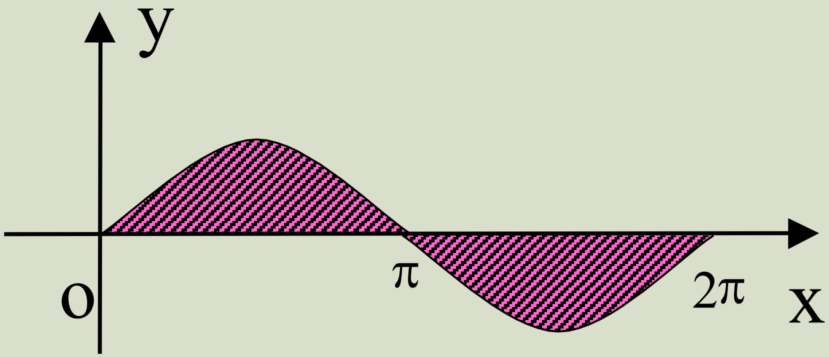
$= \frac{1}{2}[(\frac{\pi}{2}-1)-(0-0)] = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$。

例 2. 已知自由落体的运动速度为$v = gt$，

试求在时间区间[0，T] 上物体下落的距离 S。

解：$S=\int_0^T gtdt=\frac{1}{2}gt^2\Big|_0^T=\frac{1}{2}gT^2$。

例 3. 求由曲线$y=\sin x$ 和直线$x=0$, $x=2\pi$, $y=0$ 所围成的面积 A。



解：$A=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$

$$=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=-(-1-1)+(1+1)=4.$$

例 4. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ e^x, & 1 < x \le 3 \end{cases}$，求$\int_0^3 f(x)dx$ 。

解: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

$$= \int_0^1 xdx + \int_1^3 e^x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + e^x\Big|_1^3 = \frac{1}{2} + e^3 - e \text{ 。}$$

例 5. 利用定积分求极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+L+\frac{n}{n^2+n^2}]$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\frac{1}{n}}{n[1+(\frac{1}{n})^2]}+\frac{\frac{2}{n}}{n[1+(\frac{2}{n})^2]}+L+\frac{\frac{n}{n}}{n[1+(\frac{n}{n})^2]}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{[1+(\frac{i}{n})^2]}\cdot\frac{1}{n}$$

上式右端和式的极限可以看作函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的定积分。将区间 $[0,1]$ 等分为 n 个小区间

$[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$（$i=1, 2, \cdots, n$），$\Delta x_i = \frac{1}{n}$ 并取 $\xi_i = \frac{i}{n}$。

$\because f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上连续，从而在 $[0, 1]$ 上可积。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{[1+(\frac{i}{n})^2]}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+L+\sin\frac{n\pi}{n}]$

（教材P148第2题第（2）小题）

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+L+\sin\frac{n\pi}{n}]$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

§ 3.2 不定积分

3.2.1 不定积分的定义

1. 不定积分定义

若f(x) 在区间I 上存在原函数，则f(x) 在 I 上的全体原函数构成的集合称为f(x) 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$ 。

若F(x) 的一个原函数，则对任意常数C,

也是f(x) 的原函数。

另一方面，若F(x) 和G(x) 都是f(x) 的原函数，则

$$[G(x)-F(x)]' = f(x)-f(x) = 0,$$

即$G(x)=F(x)+C$，其中C是一个常数。由此可知，

$f(x)$的全体原函数可表示为$F(x)+C$（C为任意常数），即

$$\int f(x)dx=\{F(x)+C \mid C\in R\},$$

简记为$\int f(x)dx=F(x)+C$（C为任意常数），

其中$F'(x)=f(x)$（或$dF(x)=f(x)dx$）。

2. 不定积分的基本公式

求不定积分与求导数（或求微分）是两种互逆的运算，故从导数（或微分）的基本公式，即可得相应的积分基本公式：

$(1)\, d(C)=0,$	$(1)\int 0\,dx=C,$
$(2)\, d\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)=x^{\alpha}dx,$	$(2)\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1),$
$(3)\, d(\ln\lvert x\rvert)=\dfrac{1}{x}dx,$	$(3)\int \dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C,$
$(4)\, d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}dx,$	$(4)\int \dfrac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+C,$
$(5)\, d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx,$	$(5)\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C,$
$(6)\, d\left(\dfrac{a^{x}}{\ln a}\right)=a^{x}dx,$	$(6)\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,$

(7) $d(e^x) = e^x dx$,	(7) $\int e^x dx = e^x + C$,
(8) $d(\sin x) = \cos x dx$,	(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$,
(9) $d(-\cos x) = \sin x dx$	(9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
(10) $d(\tan x) = \sec^2 x dx$,	(10) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$,
(11) $d(-Cot x) = \csc^2 x dx$,	(11) $\int \csc^2 x dx = -Cot x + C$,
(12) $d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x dx$,	(12) $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$,
(13) $d(-\csc x) = \csc x \cdot Cot x dx$,	(13) $\int \csc x \cdot Cot x dx = -\csc x + C$,

$(14)\, d(shx) = chx dx,$	$(14) \int chx dx = shx + C,$
$(15)\, d(chx) = shx dx,$	$(15) \int shx dx = chx + C,$
$(16)\, d(thx) = \frac{1}{ch^2 x} dx,$	$(16) \int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + C,$
$(17)\, d(-chx) = \frac{1}{sh^2 x} dx,$	$(17) \int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + C,$

3．不定积分的基本性质

性质 1

（1）$[\,[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或 $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$ ；

（2）$\int f'(x)dx = f(x) + C$ 或 $\int df(x) = f(x) + C$ 。

（1）式表明，若先求积分，后求导数（或求微分），则两者作用相互抵消。

（2）式表明，若先求导数（或求微分）后求积分，则两者作用抵消后还留有积分常数 C。

性质 2 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （K为常数， $k \neq 0$）。

性质 3 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 。

性质 3 可推广到任意有限多个函数的代数和的情形：

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm L \pm f_n(x)]dx$$

$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm L \pm \int f_n(x)dx.$$

利用基本积分公式和基本性质求不定积分的方法叫做**直接积分法**。

例 1. 求下列不定积分

（1） $\int(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{1+x^2}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+10)\,dx$

解： $\int(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{1+x^2}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+10)\,dx$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-5\int\frac{1}{1+x^2}dx+3\int\frac{1}{x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+10\int dx$$

$$=4\sqrt{x}-5\arctan x-\frac{3}{x}-2\arcsin x+10x+C$$ 。

（2）$\int \frac{(2x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2} dx$

解: $\int \frac{(2x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{2x^2 - x^{\frac{3}{2}} + 3x}{x^2} dx$

$= \int (2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}) dx = 2x - 2\sqrt{x} + 3\ln|x| + C.$

（3）$\int (2^x - 3^x)^2 dx$

解: $\int (2^x - 3^x)^2 dx = \int (4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x) dx$

$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$