



第一部分

四大数学思想

高考命题中，以知识为载体，以能力立意、思想方法为灵魂，以核心素养为统领，兼顾试题的基础性、综合性、应用性和创新性，展现数学的科学价值和人文价值。高考试题一是着眼于知识点新颖巧妙的组合，二是着眼于对数学思想方法、数学能力的考查。如果说数学知识是数学的内容，可用文字和符号来记录和描述，那么数学思想方法则是数学的意识，重在领会、运用，属于思维的范畴，用于对数学问题的认识、处理和解决。高考中常用到的数学思想主要有函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化与化归思想等。

一、函数与方程思想

函数思想，是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。方程思想，是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程、不等式或方程与不等式的混合组)，然后通过解方程(组或不等式组)来使问题获解。方程是从算术方法到代数方法的一种质的飞跃，有时，还可以将函数与方程互相转化、接轨，达到解决问题的目的。

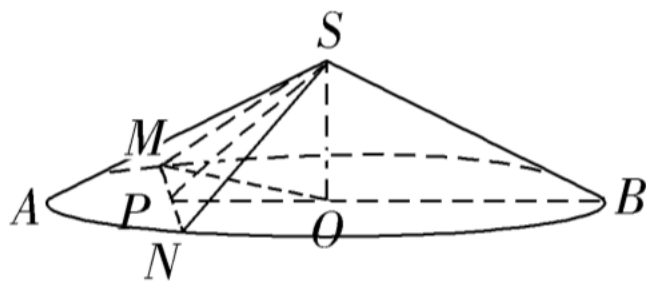
函数与方程的思想在解题中的应用主要表现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解决有关求值、解(证明)不等式、解方程以及讨论参数的取值问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易、化繁为简的目的。

应用一 建立函数关系解决最值问题

[例1] 某圆锥母线长为2，底面半径为 $\sqrt{3}$ ，则过该圆锥顶点的平面截此圆锥所得截面面积的最大值为()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

[解析] 如图所示, 作出截面 $\triangle SMN$, 其中 S 为圆锥顶点, O 为底面圆圆心, P 为 MN 的中点, 连接 PO 并延长, 交圆锥底面圆于点 B , 连接 SO , SP .



由题意知 $SB=2$, $OB=\sqrt{3}$, 设 $OP=x(0\leq x<\sqrt{3})$.

在 $\text{Rt}\triangle SOB$ 中, $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=1$.

在 $\text{Rt}\triangle SOP$ 中, $SP=\sqrt{SO^2+OP^2}=\sqrt{1^2+x^2}$.

连接 OM , 则 $MN=2\sqrt{OM^2-OP^2}=2\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}$,

故 $\triangle SMN$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot SP=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\cdot 2\sqrt{3-x^2}=\sqrt{-(x^2-1)^2+4}$.

所以当 $x=1$ 时, $\triangle SMN$ 的面积最大, 为2. 故选A.

[答案] A

方法点睛

本题求面积的最值时，设 $OP=x$ ，从而构造关于 x 的函数求解，利用二次函数求最值的思想解决问题。此题有意识地凸现其函数关系，进而用函数思想或函数方法研究、解决问题，不仅能获得简便的解法，而且能促进科学思维的培养，提高发散思维的水平。

[变式训练]

1. 甲、乙两人进行象棋比赛(没有平局), 采用“五局三胜”制. 已知在每局比赛中, 甲获胜的概率为 $p, 0 < p < 1$. 则甲以3:1获胜概率的最大值为_____.

[解析] 甲以3:1获胜, 则前三局中甲要胜两局败一局, 第四局甲再获胜, 若所求概率用 $f(p)$ 表示,

$$\text{则 } f(p) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot p = 3p^3 - 3p^4, 0 < p < 1,$$

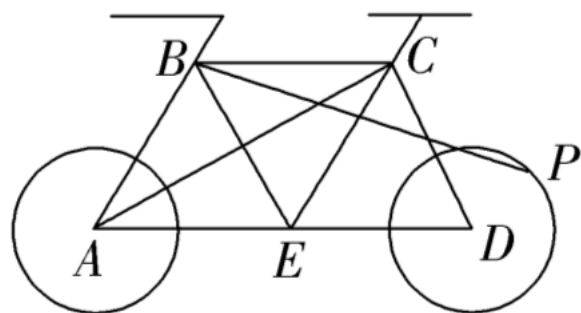
$$\text{则 } f'(p) = 9p^2 - 12p^3 = 3p^2(3-4p). \text{ 令 } f'(p) > 0, \text{ 得 } 0 < p < \frac{3}{4};$$

令 $f'(p) < 0$, 得 $\frac{3}{4} < p < 1$. 所以 $f(p)$ 在 $(0, \frac{3}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{3}{4}, 1)$ 上单调递

减, 所以当 $p = \frac{3}{4}$ 时, $f(p)$ 取得最大值为 $\frac{81}{256}$.

[答案] $\frac{81}{256}$

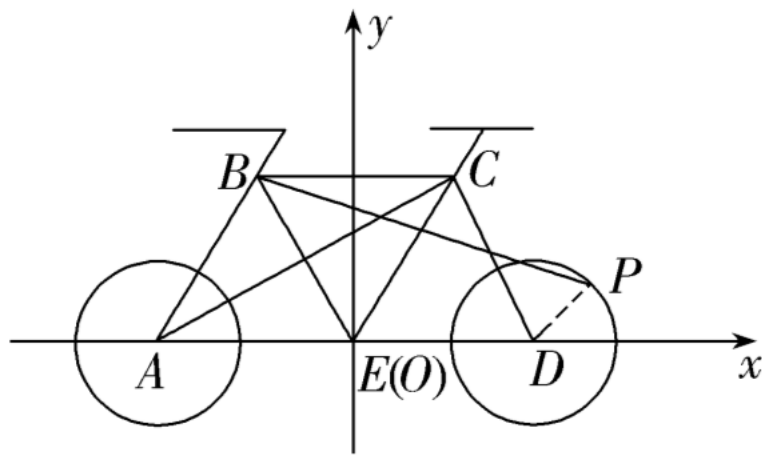
2. 自行车运动是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱. 如图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆 A (前轮)，圆 D (后轮)的半径为 $\sqrt{3}$ ， $\triangle ABE$ ， $\triangle BEC$ ， $\triangle ECD$ 均是边长为4的



等边三角形. 设点 P 为后轮上的一点，则在骑行过程中， $\vec{AC} \cdot \vec{BP}$ 的最大值为

_____.

[解析] 在骑行过程中, A, B, C, D, E 五点相对不动, 只有点 P 绕点 D 做圆周运动, 如图, 以 E 为坐标原点, AD 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 由题意得 $A(-4,0)$, $B(-2, 2\sqrt{3})$, $C(2, 2\sqrt{3})$, $D(4,0)$, 圆 D 的方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 3$. 连接 DP , 设以 Dx 为始边, 沿逆时针方向旋转, 以 DP 为终边的角为 α , 则 $P(4$



$+ \sqrt{3}\cos \alpha, \sqrt{3}\sin \alpha)$, 则 $\vec{AC} = (6, 2\sqrt{3})$, $\vec{BP} = (6 + \sqrt{3}\cos \alpha, \sqrt{3}\sin \alpha - 2\sqrt{3})$,
 $\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 6(6 + \sqrt{3}\cos \alpha) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin \alpha - 2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\cos \alpha + 6\sin \alpha + 24 =$
 $12\left(\frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha\right) + 24 = 12\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 24$, 易知当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 时, $\vec{AC} \cdot \vec{BP}$
 取得最大值 36.

[答案] 36

应用二 转换函数关系解决最值问题

[例 2] 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1+2^x+4^x \cdot a}{a^2-a+1}$, 其中 a 为常数, 若当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x)$ 有意义, 求实数 a 的取值范围.

[解] 由 $\frac{1+2^x+4^x \cdot a}{a^2-a+1} > 0$ 且 $a^2-a+1 = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 得 $1+2^x+4^x \cdot a > 0$, 故 $a > -\left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}\right)$.

当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $y = \frac{1}{4^x}$ 与 $y = \frac{1}{2^x}$ 都是减函数, 因此, 函数 $y = -\left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}\right)$

在 $(-\infty, 1]$ 上是增函数, 当 $x=1$ 时, 取得最大值, 所以 $-\left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}\right)_{\max} = -\frac{3}{4}$,

$a > -\frac{3}{4}$, 故 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

方法点睛

挖掘、提炼多元问题中变元间的相互依存、相互制约的关系，反客为主，主客换位，创设新的函数，并利用新函数的性质创造性地使原问题获解，是解题人思维品质高的表现。本题主客换位后，利用新建函数 $y = -\left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}\right)$ 的单调性转换为函数最值巧妙地求出实数 a 的取值范围。此法也叫变换主元法。

[变式训练]

1. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上有解, 则

()

- A. $a \leq 2$ B. $a \geq 2$ C. $a \geq \frac{5}{2}$ **D. $a \leq \frac{5}{2}$**

D [\because 关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上有解, $\therefore a \leq x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in$

$[1, 2]$ 上有解 $\Leftrightarrow a \leq \left(x + \frac{1}{x}\right)_{\max}, x \in [1, 2], \because$ 函数 $y = f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递

增, $\therefore f(x)_{\max} = \frac{5}{2}, \therefore a \leq \frac{5}{2}.]$

2. 对任意 $m \in [-1, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$ 的值恒大于零, 则 x 的取值范围为_____.

[解析] $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m = (x-2)m + x^2 - 4x + 4,$

令 $g(m) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4.$

由题意知, 在 $[-1, 1]$ 上, $g(m)$ 的值恒大于零,

所以 $\begin{cases} g(-1) = (x-2) \times (-1) + x^2 - 4x + 4 > 0, \\ g(1) = x - 2 + x^2 - 4x + 4 > 0, \end{cases}$

解得 $x < 1$ 或 $x > 3.$

[答案] $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

应用三 同构函数关系比较大小

[例3] (1) 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $e^{2x} - e^y > \sin 2x - \sin y$, 则()

A. $2x < y$ B. $2x > y$

C. $x > y$ D. $x < y$

(2) 设 $x > 0$, $y > 0$, 若 $e^x + \ln y > x + y$, 则下列选项正确的是()

A. $x > y$ B. $x > \ln y$

C. $x < y$ D. $x < \ln y$

[解析] (1) 设 $f(t) = e^t - \sin t$, $t > 0$, 则 $f'(t) = e^t - \cos t$, 当 $t > 0$ 时, $f'(t) > 0$ 恒成立, 所以 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 原不等式可变形为 $e^{2x} - \sin 2x > e^y - \sin y$, 即 $f(2x) > f(y)$, 所以 $2x > y$. 故选 B.

(2) 法一: 不等式 $e^x + \ln y > x + y$, 等价于 $e^x - x > y - \ln y$, 等价于 $e^x - x > e^{\ln y} - \ln y$.

令 $f(x) = e^x - x$, 则不等式 $e^x - x > e^{\ln y} - \ln y$, 等价于 $f(x) > f(\ln y)$,

因为 $f'(x) = e^x - 1$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 若 $y \in (1, +\infty)$, 则 $\ln y \in (0, +\infty)$, 由 $f(x) > f(\ln y)$, 得 $x > \ln y$; 若 $y \in (0, 1]$, 则 $\ln y \leq 0$, 由 $x > 0$, 得 $x > \ln y$.

综上所述, 设 $x > 0$, $y > 0$, 若 $e^x + \ln y > x + y$, 则有 $x > \ln y$. 故选 B.

法二：不等式 $e^x + \ln y > x + y$ ，等价于 $e^x - x > y - \ln y$ ，等价于 $e^x - \ln e^x > y - \ln y$.

令 $f(x) = x - \ln x$ ，则不等式 $e^x - \ln e^x > y - \ln y$ ，等价于 $f(e^x) > f(y)$ ，因为 $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ ，所以当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) = \frac{x-1}{x} > 0$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，因为 $x > 0$ ，所以 $e^x > 1$.

若 $y \in (1, +\infty)$ ，由 $f(e^x) > f(y)$ ，有 $e^x > y$ ；

若 $y \in (0, 1]$ ，恒有 $e^x > y$.

综上所述，设 $x > 0$ ， $y > 0$ ，若 $e^x + \ln y > x + y$ ，则有 $e^x > y$ ，即 $x > \ln y$ 。故选B.

[答案] (1)B (2)B

方法点睛

解答本题的关键点：

- (1) 对于结构相同(相似)的不等式，通常考虑变形，构造函数；
- (2) 利用指数函数与对数函数的单调性得到大小关系.

[变式训练]

1. 若 $p: 0 < a < b$; $q: 4^a - 4^b < 5^{-a} - 5^{-b}$. 则 p 是 q 的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

A [设 $f(x) = 4^x - 5^{-x}$, 则函数 $f(x)$ 为增函数,

则由 $4^a - 4^b < 5^{-a} - 5^{-b}$, 即 $4^a - 5^{-a} < 4^b - 5^{-b}$ 可得 $a < b$, 所以 $0 < a < b$ 是 $4^a - 4^b < 5^{-a} - 5^{-b}$ 的充分不必要条件, 故选A.]

2. 已知 $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$, $x < y$, 则方程 $x^y = y^x$ 的解的组数为_____.

[解析] 由 $x^y = y^x$ 两边取对数, 得 $y \ln x = x \ln y$, 即 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$

时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) \leq 0$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, $f(2)$

$= \frac{\ln 2}{2}$, $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, 所以满足 $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$, $x < y$, 则方程 $x^y = y^x$ 的解的

组数为 1.

[答案] 1

应用四 建立方程(组)形式解决问题

[例4] 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线与 C 交于 P, Q 两点, F_1Q 与 y 轴的交点为 R , $F_1Q \perp PR$, 则 C 的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

[解析] 法一：由题意 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 不妨设 $P \left(c, \frac{b^2}{a} \right)$,

$Q \left(c, -\frac{b^2}{a} \right)$, $R(0, y_0)$, 因为 $0 = \frac{c+(-c)}{2}$, 所以 R 为 F_1Q 的中点,

所以 $y_0 = -\frac{b^2}{2a}$, 即 $R \left(0, -\frac{b^2}{2a} \right)$. 又 $F_1Q \perp PR$, 所以 $k_{F_1Q} \cdot k_{PR} = -1$, 即

$\frac{b^2}{-2ac} \cdot \frac{3b^2}{2ac} = -1$, 即 $\sqrt{3}b^2 = 2ac$. 因为 $b^2 = c^2 - a^2$, 所以 $\sqrt{3}c^2 - 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0$,

方程两边同时除以 a^2 得, $\sqrt{3}e^2 - 2e - \sqrt{3} = 0$, 解得 $e = \sqrt{3}$ 或 $e = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍), 所

以 $e = \sqrt{3}$, 故选B.

法二：由题意 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 不妨设 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $Q\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $R(0, y_0)$, 因为 $0 = \frac{c+(-c)}{2}$, 所以 R 为 F_1Q 的中点, 连接 PF_1 , 又 $F_1Q \perp PR$, 所以 $|PF_1| = |PQ|$. 由对称性得 $|PF_1| = |QF_1|$, 所以 $|PF_1| = |PQ| = |F_1Q|$, 即 $\triangle PF_1Q$ 为等边三角形,

所以 $\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|} = \tan \angle PF_1F_2$, 即 $\frac{b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\sqrt{3}b^2 = 2ac$. 又 $b^2 = c^2 - a^2$, 所以 $\sqrt{3}c^2 - 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0$, 方程两边同时除以 a^2 得, $\sqrt{3}e^2 - 2e - \sqrt{3} = 0$, 解得 $e = \sqrt{3}$ 或 $e = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍), 所以 $e = \sqrt{3}$. 故选B.

[答案] B

方法点睛

此题是一道典型的求离心率的题目，一般需要通过 a , b , c 之间的关系，得出关于 a , c 的方程，经过恒等变形就可以求出离心率.

[变式训练]

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2=3$, $S_3=13$, 则 $a_3=$ _____.

[解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 易知 $q \neq 1$, 则由题意, 得

$$\begin{cases} a_1q=3 \\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=13 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1=9 \\ q=\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} a_1=1 \\ q=3 \end{cases}, \text{ 所以 } a_3 = a_1q^2 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \text{ 或 } a_3 = a_1q^2 = 1 \times 3^2$$

$=9$.

[答案] 9或1

二、数形结合思想

数形结合思想，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想。数形结合思想的应用包括以下两个方面：

(1) “以形助数”，把某些抽象的数学问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，揭示数学问题的本质；(2) “以数定形”，把直观图形数量化，使形更加精确。

应用一 巧借函数图象解决问题

[例1] (1)记实数 x_1, x_2, \dots, x_n 中最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)=\min\{x^2+1, x+3, 13-x\}$ 的最大值为
()

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 10

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$.若 $g(x)$ 存在2个零点,

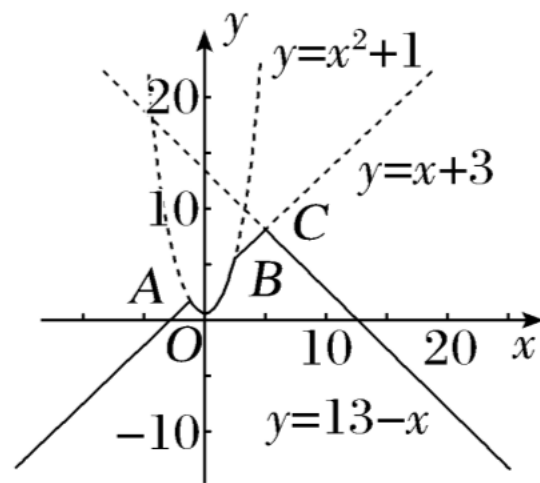
则 a 的取值范围是()

- A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$
C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

[解析] (1)在同一坐标系中作出三个函数 $y=x^2+1$, $y=x+3$, $y=13-x$ 的图象如图:

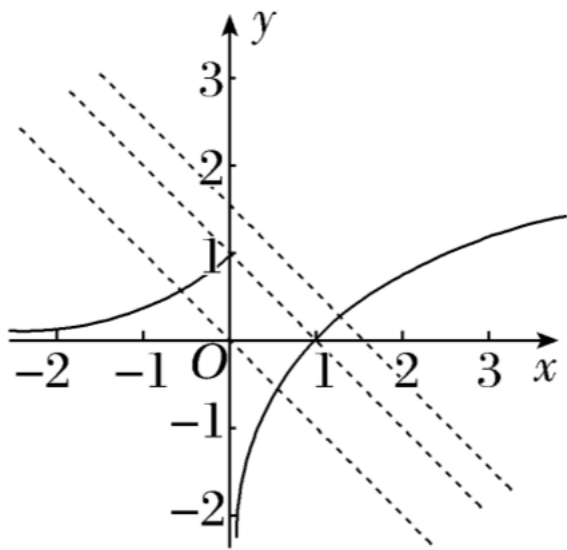
由图可知, 在实数集 \mathbf{R} 上, $\min\{x^2+1, x+3, 13-x\}$ 为 $y=x+3$ 上 A 点下方的射线, 抛物线 AB 之间的部分, 线段 BC , 与直线 $y=13-x$ 上点 C 下方的部分的组合

图. 显然, 在区间 $[0, +\infty)$ 上, 在 C 点时, $y=\min\{x^2+1, x+3, 13-x\}$ 取得最大值.



$$\text{解方程组 } \begin{cases} y=x+3, \\ y=13-x, \end{cases} \text{ 得点 } C(5,8). \text{ 所以 } f(x)_{\max}=8.$$

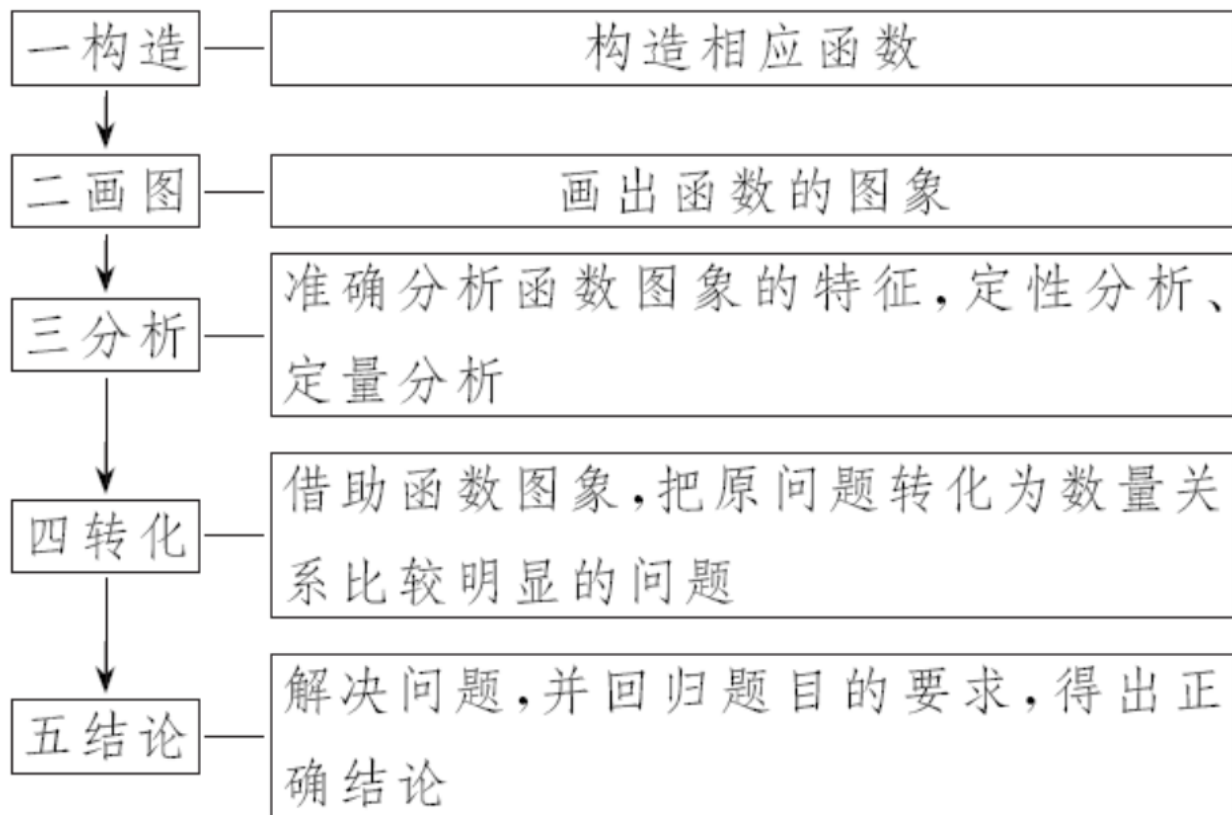
(2)函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在2个零点，即关于 x 的方程 $f(x)=-x-a$ 有2个不同的实根，即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有2个交点，作出直线 $y=-x-a$ 与函数 $f(x)$ 的图象，如图所示，由图可知， $-a \leq 1$ ，解得 $a \geq -1$.



[答案] (1)C (2)C

方法点睛

研究函数的零点及方程的根、不等式的求解及参数范围等问题，常转化为函数图象的交点问题，其思维流程为：



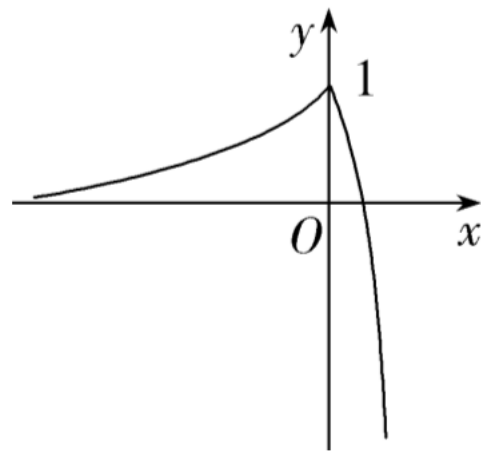
[变式训练]

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ -8x^2 - x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(m) = f(2^m)$, 则 $f(m+1) =$

()

A. 1 **B. $\frac{1}{2}$** C. $\frac{1}{3}$ D. -2

B [作出 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数. 由于 $f(m) = f(2^m)$, 且对于任意 $m \in \mathbf{R}$ 都有 $m < 2^m$, 则 $m < 0$,



所以 $2^m = -8 \cdot (2^m)^2 - 2^m + 1$, 即 $8 \cdot (2^m)^2 + 2 \cdot 2^m - 1 = 0$, 解得 $2^m = \frac{1}{4}$ (负值舍去), 所以 $m = -2$. 则 $f(m+1) =$

$f(-1) = \frac{1}{2}$. 故选 B.]

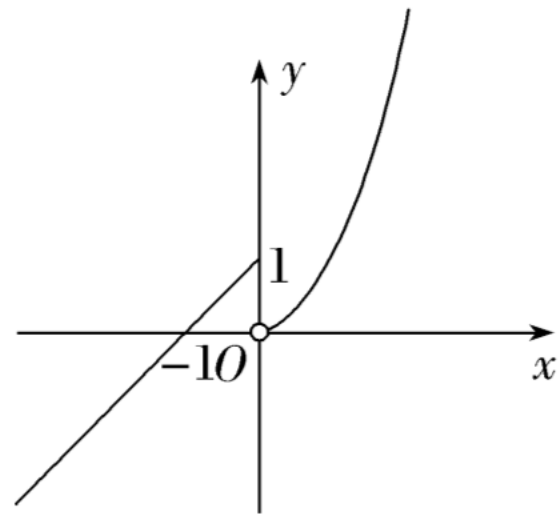
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的取值范围是_____.

[解析] 根据题意, 作出函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

的图象如图所示.

设 $f(x_1) = f(x_2) = t$, $t \in (0, 1]$, 且 $x_1 > x_2$, 则 $x_2 + 1 = t$, $x_1^2 = t$, 所以 $|x_1 - x_2| = x_1 - x_2 = \sqrt{t} - t + 1 = -(\sqrt{t})^2 + \sqrt{t} + 1$

$$= -\left(\sqrt{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$



令 $m = \sqrt{t}$, 则 $m \in (0, 1]$, 设 $g(m) = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$, 易知 $g(m)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 所以 $g(m)_{\min} = g(1) = 1$, $g(m)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, 所以 $|x_1 - x_2|$ 的取值范围是 $\left[1, \frac{5}{4}\right]$.

[答案] $\left[1, \frac{5}{4}\right]$

应用二 巧借几何性质解决问题

[例2] (1)已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点, P 为椭圆 C 上一点,

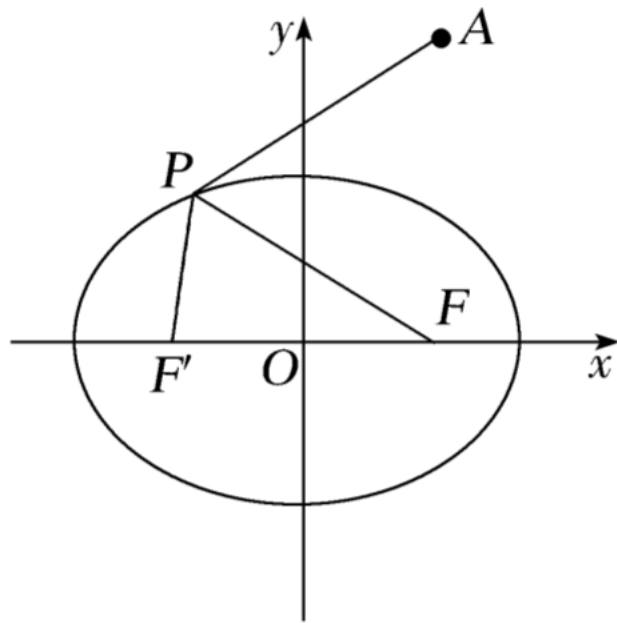
$A(1, 2\sqrt{2})$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最大值为()

- A. $4 + \sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $4 + \sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

(2)(2023·烟台市诊断性测试)过直线 $x - y - m = 0$ 上一点 P 作圆 $M: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 若使得四边形 $PAMB$ 的面积为 $\sqrt{7}$ 的点 P 有两个, 则实数 m 的取值范围为()

- A. $(-5, 3)$
B. $(-3, 5)$
C. $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$
D. $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

[解析] (1)根据题意, 设椭圆 C 的左焦点为 F' , 连接 PF' , 如图所示. 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 其中 $c = \sqrt{3-2} = 1$, 则 $F(1,0)$, $F'(-1,0)$, $a = \sqrt{3}$. 因为 P 为椭圆 C 上一点, 所以 $|PF'| + |PF| = 2a = 2\sqrt{3}$, 则 $|PF| = 2a - |PF'| = 2\sqrt{3} - |PF'|$, 则 $|PA| + |PF| = |PA| + 2\sqrt{3} - |PF'| = 2\sqrt{3} + |PA| - |PF'|$, 分析可得 $||PA| - |PF'|| \leq |AF'| = 2\sqrt{3}$, 当 P, A, F' 三点共线且点 F' 在 A, P 之间时, 等号成立, 则 $|PA| + |PF|$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$. 故选D.



(2)如图, 由圆 $M: (x-2)^2+(y-3)^2=1$, 知圆的圆心为 $M(2,3)$, 半径为1, 所以 $|MA|=|MB|=1$, 所以四边形

$PAMB$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|PA||MA|+\frac{1}{2}|PB||MB|=|PA|=\sqrt{7}$,

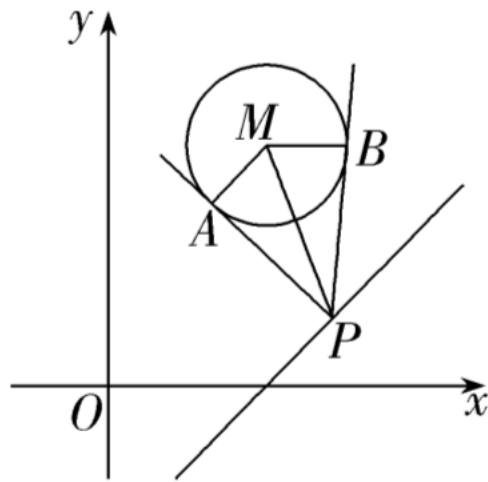
所以 $|PM|=\sqrt{|MA|^2+|PA|^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$,

要使四边形 $PAMB$ 的面积为 $\sqrt{7}$ 的点 P 有两个,

则点 M 到直线 $x-y-m=0$ 的距离 $d=\frac{|2-3-m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<2\sqrt{2}$, 解得 $-5<m<3$,

即 m 的取值范围为 $(-5,3)$. 故选A.

[答案] (1)D (2)A



方法点睛

(1)对于解析几何图形中的动态问题，应分析各个变量的变化过程，找出其中的相互关系求解.

(2)应用解析几何意义法解决问题需要熟悉常见几何结构的代数形式，主要有：

①形如 $m = \frac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题；

②形如 $m = ax + by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题；

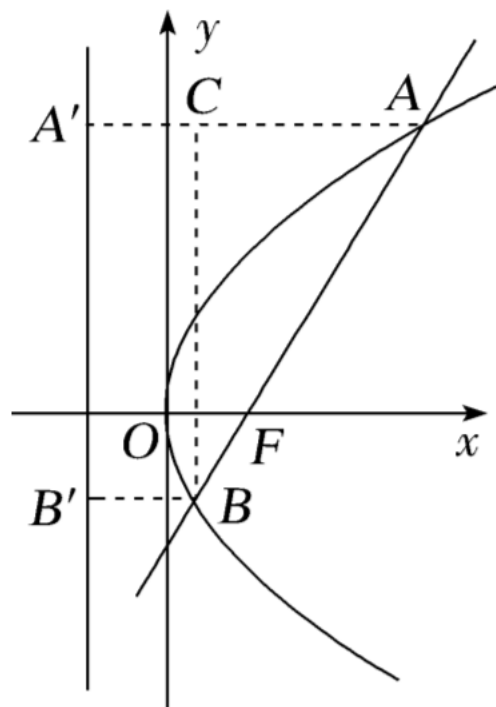
③形如 $m = (x-a)^2 + (y-b)^2$ 的最值问题，可转化为两点间距离的平方的最值问题.

[变式训练]

1. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 直线 l 过 F 与抛物线交于 A, B 两点, 且点 A 在第一象限, $|AF|=3|BF|$, 则直线 l 的斜率为()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 1 D. 2

A [如图，过点 A ， B 分别作抛物线的准线 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 A' ， B' ，过 B 作 $BC \perp AA'$ 于点 C ，由抛物线的定义，知 $|AF|=|AA'|$ ， $|BF|=|BB'|$ 。因为 $|AF|=3|BF|$ ，所以 $|AC|=|AA'| - |A'C|=|AF| - |BB'| = |AF| - |BF| = 2|BF|$ ，又 $|AB|=|AF| + |BF| = 4|BF|$ ，所以 $\cos \angle BAC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ，所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，所以直线 l 的斜率为 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，故选A.]



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/516042155045010115>