2025高考数学二轮复习
利用导数研究函数的单调性、极值与最值

考点一　导数的几何意义(多考向探究预测)

考向1导数几何意义的应用

例 1(1)(2023 全国甲,文 8)曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$在点$(1,\frac{e}{2})$处的切线方程为(　C　)

A.$y=\frac{e}{4}x$　　B.$y=\frac{e}{2}x$　　C.$y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$　　D.$y=\frac{e}{2}x+\frac{3e}{4}$

解析 $\because y=\frac{e^x}{x+1}$, $\therefore y'=\frac{(e^x)'(x+1)-(x+1)'e^x}{(x+1)^2}=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

则 $y'|_{x=1}=\frac{e}{4}=k$.

在点$(1,\frac{e}{2})$处的切线方程为 $y-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}(x-1)$,即 $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$.故选 C.

(2)(2022新高考Ⅰ,15)若曲线$y=(x+a)e^x$有两条过坐标原点的切线,则a的取值范围是______$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$______.

解析 由题意可得,$y'=e^x+(x+a)e^x=(1+x+a)e^x$.

设切点为$(x_0,(x_0+a)e^{x_0})$,则切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(1+x_0+a)e^{x_0}\cdot(x-x_0)$.

又切线过原点,$\therefore -(x_0+a)e^{x_0}=-x_0(1+x_0+a)e^{x_0}$,整理得$x_0^2+ax_0-a=0$.

$\because$ 曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线,

$\therefore x_0^2+ax_0-a=0$ 有 2 个不同实数解,

$\therefore \Delta=a^2+4a>0$,解得 $a>0$ 或 $a<-4$.

故 a 的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

(3)(2022新高考Ⅱ,14)曲线$y=\ln|x|$经过坐标原点的两条切线方程分别为________,____________$y=\frac{x}{e}$____________. $y=-\frac{x}{e}$

解析 当 $x>0$ 时,$y=\ln x$,点$(x_1,\ln x_1)(x_1>0)$上的切线为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.

若该切线经过原点,则 $\ln x_1-1=0$,解得 $x_1=e$,此时切线方程为 $y=\frac{x}{e}$.

当 $x<0$ 时,$y=\ln(-x)$,点$(x_2,\ln(-x_2))(x_2<0)$上的切线为 $y-\ln(-x_2)=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$.

若该切线经过原点,则 $\ln(-x_2)-1=0$,解得 $x_2=-e$,此时切线方程为 $y=-\frac{x}{e}$.

考向2公切线问题

例 2(1)(2020 全国Ⅲ,理 10)若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$都相切,则 l 的方程为(D)

A.$y=2x+1$　　B.$y=2x+\frac{1}{2}$　　C.$y=\frac{1}{2}x+1$　　D.$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

解析 由 $y=\sqrt{x}$得 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,设直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$的切点为$(x_0,\ \sqrt{x_0})$,则直线 l 的方程为 $y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$,即$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x-y+\frac{1}{2}\sqrt{x_0}=0$,

由直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$相切,得圆心(0,0)到直线 l 的距离等于圆的半径 $r=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

即$\frac{|\frac{1}{2}\sqrt{x_0}|}{\sqrt{\frac{1}{4x_0}+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,解得 $x_0=1$(负值舍去),所以直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

(2)(2024福建模拟预测)已知直线$y=kx+b$既是曲线$y=\ln x$的切线,也是曲线$y=-\ln(-x)$的切线,则(　A　)

A.$k=\frac{1}{e}$,$b=0$　　　　B.$k=1$,$b=0$

C.$k=\frac{1}{e}$,$b=-1$　　　　D.$k=1$,$b=-1$

解析 设直线与曲线 $y=\ln x$ 的切点为 $(x_1,\ln x_1)$ 且 $x_1>0$，与曲线 $y=-\ln(-x)$ 的切点为 $(x_2,-\ln(-x_2))$ 且 $x_2<0$，又 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$，$y'=[-\ln(-x)]'=-\frac{1}{x}$，

则直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 的切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$，

直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=-\ln(-x)$ 的切线方程为 $y+\ln(-x_2)=-\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即

$y=-\frac{1}{x_2}x+1-\ln(-x_2)$，则 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=-\frac{1}{x_2},\\ \ln x_1-1=1-\ln(-x_2),\end{cases}$ 解得 $x_1=\mathrm{e}, x_2=-\mathrm{e}$，

故 $k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=\ln x_1-1=0$，故选 A.

[对点训练1](1)(2024陕西西安二模)已知直线$y=kx+b$与曲线$f(x)=ax^2+2+\ln x$相切于点$P(1,4)$,则$a+b+k=$(　D　)

A.3　　B.4

C.5　　D.6

解析 ∵点$P(1,4)$在曲线$f(x)=ax^2+2+\ln x$上,∴$a+2=4$,解得$a=2$.

由题意得,$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}=4x+\frac{1}{x}$,∴在点$P(1,4)$处的切线斜率$k=5$,把$P(1,4)$代入$y=kx+b$,得$b=-1$,

∴$a+b+k=2-1+5=6$,故选D.

(2)(2024安徽黄山模拟)已知函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$在点(1,-1)处的切线与曲线$y=ax^2+(a-1)x-2$只有一个公共点,则实数a的取值范围为(B)

A.$\{1,9\}$　　B.$\{0,1,9\}$

C.$\{-1,-9\}$　　D.$\{0,-1,-9\}$

解析 由$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$得$f'(1)=2$,

所以切线方程是$y=2(x-1)-1=2x-3$,

①若$a=0$,则曲线为$y=-x-2$,显然切线与该曲线只有一个公共点;

②若$a\neq0$,则$2x-3=ax^2+(a-1)x-2$,即$ax^2+(a-3)x+1=0$,

由$\Delta=(a-3)^2-4a=0$,即$a^2-10a+9=0$,得$a=1$或$a=9$.

考点二　利用导数研究函数的单调性(多考向探究预测)

考向1求函数的单调区间

例 3(2023 全国甲,理 21)已知函数 $f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$,$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(1)当$a=8$时,讨论$f(x)$的单调性;

(2)若$f(x)<\sin 2x$,求a的取值范围.

解 (1)$a=8$ 时,$f(x)=8x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}(0<x<\frac{\pi}{2})$,

$f'(x)=\frac{(4\cos^2 x+3)(2\cos^2 x-1)}{\cos^4 x}$,

当 $f'(x)>0$ 时,$\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$,$0<x<\frac{\pi}{4}$;

当 $f'(x)<0$ 时,$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

∴$f(x)$在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内为增函数,在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为减函数.

(2)(方法一)令 $g(x)=f(x)-\sin 2x=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$,则

$g'(x)=a-\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}-2(2\cos^2 x-1)$,

令 $t=\cos^2 x$,则 $t\in(0,1)$,

则 $h(t)=a-\frac{3-2t}{t^2}-2(2t-1)$,

$h'(t)=\frac{-4t^3-2t+6}{t^3}$.

令 $\varphi(t)=-4t^3-2t+6$,则 $\varphi'(t)=-12t^2-2<0$,

$\therefore \varphi(t)$单调递减,$\varphi(t)>\varphi(1)=0$,$\therefore h'(t)>0$,$h(t)$单调递增.

又当 $x\in\ 0,\frac{\pi}{2}$ 时,$y=\cos^2x$ 单调递减,

∴$g'(x)$在 $0,\frac{\pi}{2}$ 内单调递减.∴$g'(x)<g'(0)=a-3$.

当 $a\leq3$ 时,$g'(0)\leq0$,$g(x)$单调递减,$g(x)<g(0)=0$,满足题意.

当 $a>3$ 时,$g'(0)>0$,且 $x\to\frac{\pi}{2}$时,$g'(x)\to-\infty$,

∴存在 $x_0\in\ 0,\frac{\pi}{2}$ 使得 $g'(x_0)=0$.

∴当$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

∴此时存在x,使得$g(x)>g(0)=0$,不满足题意.

综上,$a\leq3$.

(方法二)$f(x)=ax-\frac{\sin x(\sin^2x+\cos^2x)}{\cos^3x}=ax-\tan^3x-\tan x$,

令 $g(x)=\sin 2x-f(x)$,由 $f(x)<\sin 2x$,得 $g(x)>0$,即$\frac{2\tan x}{\tan^2x+1}+\tan^3x+\tan x-ax>0$,

$\therefore g'(x)=\frac{4-2(\tan^2x+1)}{\tan^2x+1}+3(\tan^2x+1)^2-2(\tan^2x+1)-a$.

令 $t=\tan^2x+1(t>1)$,则 $h(t)=\frac{4-2t}{t}+3t^2-2t-a,h'(t)=\frac{2(3t^3-t^2-2)}{t^2}$,

令 $\varphi(t)=3t^3-t^2-2$,则 $\varphi'(t)=9t^2-2t$,当 $t\in(1,+\infty)$时,$\varphi'(t)>0$,$\therefore\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

又 $\varphi(1)=0$,∴$\varphi(t)>0$,∴$h'(t)>0$,∴$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$h(t)>h(1)=3-a$,

当 $a\leq 3$ 时,$3-a\geq 0$,$h(t)>0$,∴$g'(x)>0$,$g(x)$在 $0,\frac{\pi}{2}$ 内单调递增,$g(x)>0$ 对 $x\in$ $0,\frac{\pi}{2}$ 恒成立.

当 $a>3$ 时,若 $g(x)>g(0)=0$ 对 $x\in$ $0,\frac{\pi}{2}$ 恒成立,则 $h(1)=3-a<0$.

又 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,且 $t\to+\infty$时,$h(t)\to+\infty$,∴存在 $t_0\in(1,+\infty)$使得 $h(t_0)=0$,∴存在 $x_0\in$ $0,\frac{\pi}{2}$ 使得 $g'(x_0)=0$.

与 $g(x)>g(0)=0$ 对 $x\in$ $0,\frac{\pi}{2}$ 恒成立矛盾.综上,$a\leq 3$.

(方法三)由于$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$f(x)<\sin 2x$,则 $ax<\frac{2\sin x\cos^4 x+\sin x}{\cos^3 x}$,

即 $a<\frac{2\sin x\cdot\cos^4 x+\sin x}{x\cdot\cos^3 x}=\frac{\sin x}{x}(2\cos x+\frac{1}{\cos^3 x})$,

当 $x\to 0$ 时,$\frac{\sin x}{x}\to 1$,故猜想 $a\leq 3$,

下证 $a\leq 3$ 时,$f(x)<\sin 2x$ 成立,

由 $a\leq 3$ 得 $ax\leq 3x$,即 $ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}\leq 3x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$,

令 $g(x)=3x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x$,$g(0)=0$,只需证 $g(x)<g(0)$,$g'(x)=3-\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}-2\cos 2x$

$$=\frac{3\cos^4 x-\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)-2(2\cos^2 x-1)}{\cos^4 x}=\frac{(2\cos^2 x+1)(\cos^2 x-1)}{\cos^4 x}<0,$$

$g(x)$在 $0,\frac{\pi}{2}$ 内单调递减,$g(x)<g(0)=0$,$\therefore 3x-\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x<0$ 成立.

综上,$a\leq 3$ 时,$f(x)<\sin 2x$ 成立.

考向2单调性的应用

例4(1)(2023新高考Ⅱ,6)已知函数$f(x)=ae^x-\ln x$在区间(1,2)上单调递增,则a的最小值为(　C　)

A.e^2　　B.e　　C.e^{-1}　　D.e^{-2}

解析　由题意可知 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\geq 0$ 在区间(1,2)内恒成立,即 $a\geq\frac{1}{xe^x}$在区间(1,2)内恒成立.

设 $g(x)=xe^x$,则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$ 在区间(1,2)内恒成立,

所以函数 $g(x)=xe^x$ 在区间(1,2)内单调递增,所以 $g(x)>g(1)=e$,

则 $0<\frac{1}{g(x)}<\frac{1}{e}$,即 $a\geq e^{-1}$.故选 C.