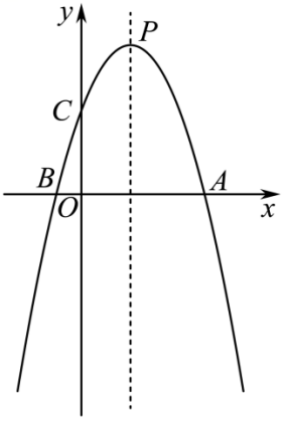
二次函数综合—特殊三角形问题

典例精析

【典例 1】如图，抛物线的顶点坐标为$P(2,6)$，且与x轴交于点A、B（点A在点B的右侧），与 y 轴交于点$C\left(0,\frac{10}{3}\right)$，点$D$为该抛物线的对称轴上的点．



（1）求该抛物线的函数表达式和点A的坐标；

（2）在对称轴右侧的抛物线上是否存在点E，使得△ADE是以D为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出点E的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）设抛物线的函数表达式为$y=a(x-2)^2+6$，将点$C\left(0,\frac{10}{3}\right)$代入，利用待定系数法即可求解，令$y=0$即可求得点$A$的坐标；

（2）记抛物线的对称轴与x轴的交点为F，则$F(2,0)$，分两种情况：①当点E在x轴上方时，如图点D、E分别在点D_1E_1的位置，过点E_1作$E_1N\perp PF$于点N，证明△$AFD_1\cong$△D_1NE_1(AAS)，得$D_1N=AF$，$D_1F=E_1N$，设$D_1(2,m)$，则$E_1(m+2,m+3)$，代入$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$可得$m$的值，从而求得$E_1$的坐标；②当点$E$在$x$轴下方时，如图点$D$、$E$分别在点$D_2E_2$的位置，过点$E_2$作$E_2H\perp PF$于点$H$，同理可得$E_2$的坐标．

【解题过程】

（1）解：设抛物线的函数表达式为$y=a(x-2)^2+6$，

将点$C\left(0,\frac{10}{3}\right)$代入得：$4a+6=\frac{10}{3}$，

解得$a=-\frac{2}{3}$,

∴抛物线的函数表达式为$y=-\frac{2}{3}(x-2)^2+6=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$,

令$y=0$得：$-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}=0$，

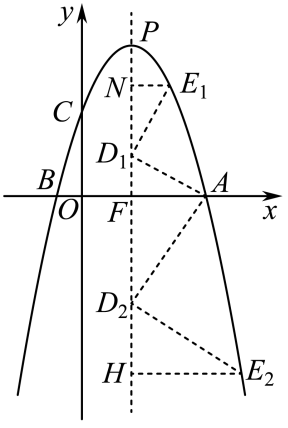
解得$x_1=-1$，$x_2=5$，

∴ $A(5,0)$；

（2）解：存在点E，使得△ADE是以D为直角顶点的等腰直角三角形，理由如下：

记抛物线的对称轴与x轴的交点为F，则$F(2,0)$，

①当点E在x轴上方时，如图点D、E分别在点D_1E_1的位置，过点E_1作$E_1N\perp PF$于点N，如图：



∵ $\angle AD_1E_1=90°$，

∴ $\angle AD_1F+\angle E_1D_1N=90°$，

∵ $\angle E_1D_1N+\angle D_1E_1N=90°$，

∴ $\angle AD_1F=\angle D_1E_1N$，

∵ $AD_1=D_1E_1$，$\angle AFD_1=\angle D_1NE_1=90°$，

∴ △AFD_1≌△D_1NE_1(AAS)，

∴ $D_1N=AF$，$D_1F=E_1N$，

∵ $A(5,0)$，$F(2,0)$，

∴ $AF=D_1N=3$，

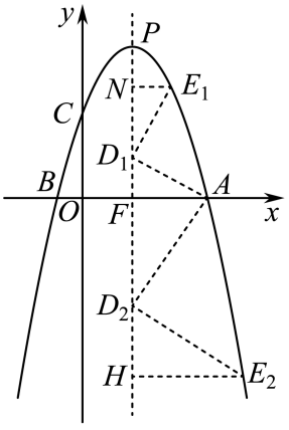
设$D_1(2,m)$，则$E_1(m+2,m+3)$，

将$E_1(m+2,m+3)$代入$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$得：$-\frac{2}{3}(m+2)^2+\frac{8}{3}(m+2)+\frac{10}{3}=m+3$，

解得$m=-3$（舍去）或$m=\frac{3}{2}$;

$\therefore E_1\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$;

②当点E在x轴下方时，如图点D、E分别在点D_2E_2的位置，过点E_2作$E_2H\perp PF$于点H，如图：



$\because \angle AD_2E_2=90°$，

$\therefore \angle AD_2F+\angle HD_2E_2=90°$，

$\because \angle HD_2E_2+\angle HE_2D_2=90°$，

$\therefore \angle AD_2F=\angle HE_2D_2$，

$\because AD_2=D_2E_2$，$\angle AFD_2=\angle D_2HE_2=90°$，

$\therefore \triangle AFD_2\cong\triangle D_2HE_2(\mathrm{AAS})$，

$\therefore D_2H=AF$，$D_2F=E_2H$，

$\because A(5,0)$，$F(2,0)$，

$\therefore D_2H=AF=3$，

设$D_2(2,n)$，则$E_2(2-n,n-3)$，

把$E_2(2-n,n-3)$代入$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{10}{3}$得：$-\frac{2}{3}(2-n)^2+\frac{8}{3}(2-n)+\frac{10}{3}=n-3$，

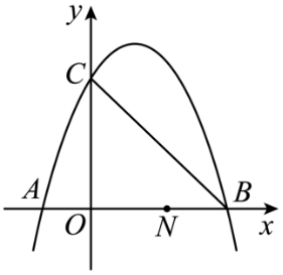
解得：$n=3$（舍去）或$n=-\frac{9}{2}$，

$\therefore E_2\left(\frac{13}{2},-\frac{15}{2}\right)$.

综上所述，E 的坐标为$\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$或$\left(\frac{13}{2},-\frac{15}{2}\right)$.

学霸必刷

1．（2023·浙江·九年级假期作业）如图，已知抛物线$y=-x^2+2x+3$与x轴交于A、B两点（点A在点B的左边），与y轴交于点C，连接BC．



（1）求A、B、C三点的坐标及抛物线的对称轴；

（2）若已知x轴上一点$N\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，则在抛物线对称轴上是否存在一点$Q$，使得$\triangle CNQ$是直角三角形？若存在，求出点$Q$的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）分别令$x=0$和$y=0$进行求解即可；

（2）设$Q(1,\ m)$，分别按C、N、Q三点为直角顶点，应用勾股定理进行求解．

【解题过程】

（1）解：由$y=-x^2+2x+3$得到：$y=-(x+1)(x-3)=-(x-1)^2+4$，

令$y=0$，则$-(x+1)(x-3)=0$，

$\therefore x=-1$或$x=3$，

则$A(-1,\ 0)$，$B(3,\ 0)$，对称轴是$x=1$．

令$x=0$，则$y=3$，

所以$C(0,\ 3)$，

综上所述，$A(-1,\ 0)$，$B(3,\ 0)$，$C(0,\ 3)$，对称轴是$x=1$；

（2）解：假设存在满足条件的点Q．

设$Q(1,\ m)$．

又$C(0,\ 3)$，

$\therefore CN^2=3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$，$CQ^2=1^2+(3-m)^2=m^2-6m+10$，$NQ^2=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+m^2=\frac{1}{4}+m^2$，

①当点C是直角顶点时，则$CN^2+CQ^2=NQ^2$，即$\frac{45}{4}+m^2-6m+10=\frac{1}{4}+m^2$，

解得$m=\frac{7}{2}$，

此时点Q的坐标是$\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$；

②当点N为直角顶点时，$CN^2+NQ^2=CQ^2$，即$\frac{45}{4}+\frac{1}{4}+m^2=m^2-6m+10$，

解得$m=-\frac{1}{4}$，

此时点Q的坐标是$\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$；

③当点Q为直角顶点时，$CQ^2+NQ^2=CN^2$，即$\frac{45}{4}=\frac{1}{4}+m^2+m^2-6m+10$，

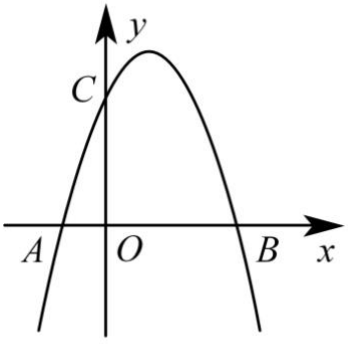
解得$m=\frac{3+\sqrt{11}}{2}$或$m=\frac{3-\sqrt{11}}{2}$，

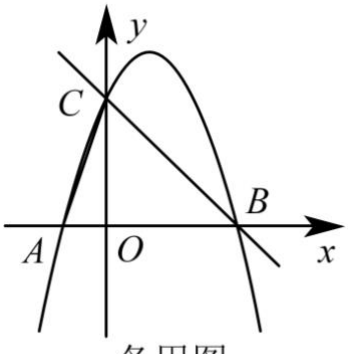
此时点Q的坐标是$\left(1,\ \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)$或$\left(1,\ \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$.

综上所述，满足条件的点Q的坐标为：$\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$或$\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$或$\left(1,\ \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)$或$\left(1,\ \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$.

2．（2022 秋·山西吕梁·九年级校考阶段练习）综合与探究

如图，抛物线$y=-x^2+2x+3$与x轴交于A,B两点（点A在点B的左侧），与y轴交于点C，点P是第一象限内抛物线上的一个动点．





备用图

（1）请直接写出点 A，B，C 的坐标；

（2）是否存在这样的点P，使得$S_{\triangle COP}=S_{\triangle BOP}$？若存在，求出点$P$的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若点Q是直线BC上一点，是否存在点Q，使得以点A、C、Q为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求出Q的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）令$x=0$，求出y值，令$y=0$，求出x的值，进而得到点 A，B，C 的坐标；

（2）根据$S_{\triangle COP}=S_{\triangle BOP}$，得到$P$点的横纵坐标之间的数量关系，再跟点$P$在抛物线上，进行求解即可；

（3）分$AC=CQ,AC=AQ,AQ=CQ$，三种情况进行讨论及求解即可；

【解题过程】

（1）解：$\because y=-x^2+2x+3$，

当$x=0$时，$y=3$，当$y=0$时，$0=-x^2+2x+3$，解得：$x_1=-1,x_2=3$，

$\therefore A(-1,0),B(3,0),C(0,3)$；

（2）解：设$P(m,n)(m>0,n>0)$，

$\because B(3,0),C(0,3)$，

$\therefore OB=OC=3$，

$\therefore S_{\triangle COP}=\frac{1}{2}OC\cdot m=\frac{3m}{2},S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OB\cdot n=\frac{3n}{2}$，

$\because S_{\triangle COP}=S_{\triangle BOP}$，

$\therefore m=n$，

$\therefore P(m,m)$，

$\therefore m=-m^2+2m+3$，解得：$m=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$（负值已舍掉）；

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2},\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)$；

（3）存在，设直线BC的解析式为：$y=kx+t$，

则：$\begin{cases}3k+t=0\\t=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\t=3\end{cases}$，

$\therefore y=-x+3$；

设$Q(p,-p+3)$，

$\because A(-1,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore AC^2=1^2+3^2=10$，$AQ^2=(p+1)^2+(3-p)^2=2p^2-4p+10$，$CQ^2=p^2+p^2=2p^2$，

当$AC=CQ$时：$2p^2=10$，解得：$p=\pm\sqrt{5}$；

$\therefore Q\left(\sqrt{5},-\sqrt{5}+3\right)$或$Q\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}+3\right)$；

当$AC=AQ$时：$10=2p^2-4p+10$，解得：$p=0$（舍去）或$p=2$，

$\therefore Q(2,1)$；

当$AQ=CQ$时：$2p^2=2p^2-4p+10$，解得：$p=\frac{5}{2}$，

$\therefore Q\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$，

综上：$Q\left(\sqrt{5},-\sqrt{5}+3\right)$或$Q\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}+3\right)$或$Q(2,1)$或$Q\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3．（2023 秋·山西晋城·九年级校考期末）如图 1，抛物线$y=ax^2+bx+3$与 x 轴交于$A(-1,0)$，$B(4,0)$两点，与 y 轴交于点 C，顶点为 D．点 P 是直线BC上方抛物线上的一个动点，过点 P 作$PE\perp x$轴于点 E，交直线BC于点 Q.

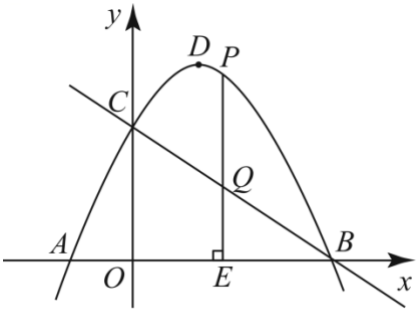


图1

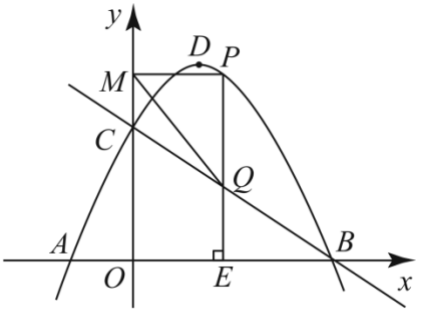


图2

（1）求抛物线的表达式；

（2）求线段PQ的最大值；

（3）如图 2，过点 P 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M，连接QM．是否存在点 P，使得△ PQM为等腰三角形？若存在，请直接写出点 P 的横坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）利用待定系数法求解即可；

（2）先求出点 C 的坐标，进而求出直线BC的解析式，设$P\left(m,\ -\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3\right)$，则$Q\left(m,\ -\frac{3}{4}m+3\right)$，则$PQ=-\frac{3}{4}(m-2)^2+3$，由此即可求出答案；

（3）先证明$PQ\perp PM$，则当△ PQM为等腰三角形，只存在$PM=PQ$这一种情况，设$P\left(n,\ -\frac{3}{4}n^2+\frac{9}{4}n+3\right)$，则$Q\left(n,\ -\frac{3}{4}n+3\right)$，则$-\frac{3}{4}n^2+3n=n$，解方程即可．

【解题过程】

（1）解：把$A(-1,0)$，$B(4,0)$代入$y=ax^2+bx+3$中得：$\begin{cases}a-b+3=0\\16a+4b+3=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\b=\frac{9}{4}\end{cases}$，

∴抛物线解析式为$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$；

（2）解：设直线BC的解析式为$y=kx+b_1$，

在$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$中，当$x=0$时，$y=3$，

$\therefore C(0,\ 3)$，

把$C(0，3)$，$B(4,0)$代入$y=kx+b_1$中得$\begin{cases}4k+b_1=0\\ b_1=3\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\ b_1=3\end{cases}$，

$\therefore$直线BC的解析式为$y=-\frac{3}{4}x+3$，

设$P\left(m，-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3\right)$，则$Q\left(m，-\frac{3}{4}m+3\right)$，

$\therefore PQ=-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3-\left(-\frac{3}{4}m+3\right)$

$=-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3+\frac{3}{4}m-3$

$=-\frac{3}{4}m^2+3m$

$=-\frac{3}{4}(m-2)^2+3$，

$\because-\frac{3}{4}<0$，

$\therefore$当$m=2$时，PQ有最大值，最大值为3；

（3）解：$\because PQ\perp x$轴，$PM\parallel x$轴，

$\therefore PQ\perp PM$，

$\therefore$当$\triangle PQM$为等腰三角形，只存在$PM=PQ$这一种情况，

设$P\left(n，-\frac{3}{4}n^2+\frac{9}{4}n+3\right)$，则$Q\left(n，-\frac{3}{4}n+3\right)$，

同理可得$PQ=-\frac{3}{4}n^2+3n$，

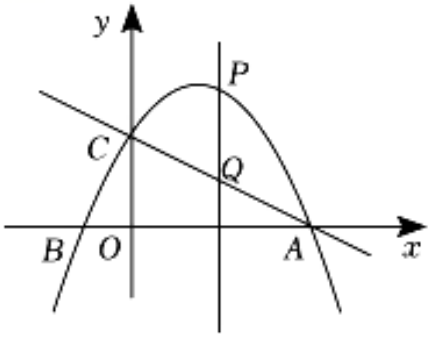
又$\because PM=n$，

$\therefore-\frac{3}{4}n^2+3n=n$，

解得$n=\frac{8}{3}$或$n=0$，

$\therefore$存在一点 P，当点 P 的横坐标为$\frac{8}{3}$时，$\triangle PQM$为等腰三角形.

4．（2023 春·山东济宁·九年级统考期末）如图，在平面直角坐标系中，一次函数$y=-\frac{1}{2}x+2$的图象与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C，抛物线$y=ax^2+bx+c$关于直线$x=\frac{3}{2}$对称，且经过 A，C 两点，与 x 轴交于另一点为 B.



（1）求抛物线的解析式；

（2）若点 P 为直线AC上方的抛物线上的一点，过点 P 作$PQ \perp x$轴于 M，交AC于 Q，求PQ的最大值，并求此时 P 点的坐标；

（3）在抛物线的对称轴上找一点 D，使△ ADC是以AC为直角边的直角三角形，请求出点 D 的坐标.

【思路点拨】

（1）先求得 A，B，C 的坐标，再利用待定系数法即可求解；

（2）设P点坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$，则点$Q$的坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m+2\right)$，由$PQ=\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)-\left(-\frac{1}{2}m+2\right)=-\frac{1}{2}m^2+2m=-\frac{1}{2}(m-2)^2+2\leq 2$，即可求解；

（3）分$AC^2+AD^2=CD^2$、$AC^2+CD^2=AD^2$，两种情况，分别求解即可.

【解题过程】

（1）解：令$y=-\frac{1}{2}x+2=0$，

解得：$x=4$，

即点 A 的坐标为$(4,0)$.

∵A、B 关于直线$x=\frac{3}{2}$对称，

∴点 B 的坐标为$(-1,0)$.

令$x=0$，则$y=2$，

∴点 C 的坐标为$(0,2)$，

∵抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点 A、B、C，

∴有$\begin{cases}c=2\\a-b+c=0\\16a+4b+c=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{3}{2}\\c=2\end{cases}$.

故抛物线解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$；

（2）∵$PQ \perp x$轴，设P点坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$，

∴点Q的坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m+2\right)$，

∴$PQ=\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)-\left(-\frac{1}{2}m+2\right)=-\frac{1}{2}m^2+2m=-\frac{1}{2}(m-2)^2+2\leq 2$，

∴当$m=2$时，$PQ_{最大}=2$，此时点$P(2,3)$；

（3）假设存在，设 D 点的坐标为$\left(\frac{3}{2},n\right)$.

由两点间的距离公式可知：$AC=\sqrt{4^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-4\right)^2+n^2}$，$CD=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(n-2)^2}$，

$\triangle ADC$为直角三角形分两种情况：①$AC^2+AD^2=CD^2$，

此时有$20+\left(\frac{3}{2}-4\right)^2+n^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+(n-2)^2$，即：$4n=-20$，

解得：$n=-5$，

此时点 D 的坐标为$\left(\frac{3}{2},-5\right)$；

②$AC^2+CD^2=AD^2$，

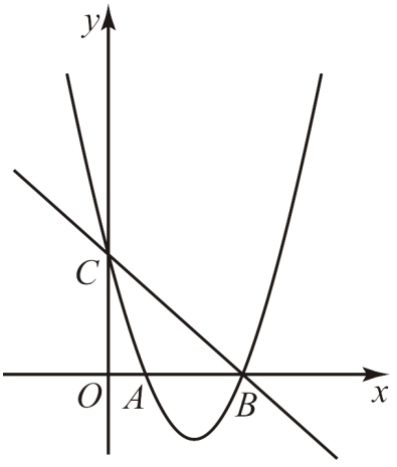
此时有$20+\left(\frac{3}{2}\right)^2+(n-2)^2=\left(\frac{3}{2}-4\right)^2+n^2$，即：$20-4n=0$，

解得：$n=5$，

此时点 D 的坐标为$\left(\frac{3}{2},5\right)$；

综上可知：在抛物线的对称轴上存在点 D，使$\triangle ADC$为直角三角形，点 D 的坐标为$\left(\frac{3}{2},-5\right)$或$\left(\frac{3}{2},5\right)$.

5．（2023·浙江·九年级假期作业）如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与 x 轴相交于 A，B 两点，与 y 轴相交于点 C，直线$y=kx+n(k\neq 0)$经过 B，C 两点，已知$A(1，0)$，$C(0，3)$，且$BC=5$.



（1）试求出点 B 的坐标.

（2）分别求出直线BC和抛物线的解析式.

（3）在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使得以B，C，P三点为顶点的三角形是直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）由$OC=3$，$BC=5$，可由勾股定理求OB，进而得点 B 坐标；

（2）用待定系数法即可求解函数解析式；

（3）设点 P 坐标为$\left(\frac{5}{2},m\right)$，分三类讨论：①当$\angle PCB=90°$时；②当$\angle PBC=90°$时；③当$\angle BPC=90°$时，分别建立勾股定理方程求解点 P 坐标即可.

【解题过程】

（1）解：∵点$C(0，3)$，即$OC=3$.

∵$BC=5$，

在$Rt\triangle BOC$中，根据勾股定理得$OB=\sqrt{BC^2-OC^2}=4$，

即点 B 坐标为$(4，0)$.

（2）把$B(4，0)$、$C(0，3)$分别代入$y=kx+n$中，

得$\begin{cases}4k+n=0\\n=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\n=3\end{cases}$.

∴直线BC解析式为$y=-\frac{3}{4}x+3$；

把$A(1，0)$、$B(4，0)$、$C(0，3)$分别代入$y=ax^2+bx+c$得

$\begin{cases}a+b+c=0\\16a+4b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=-\frac{15}{4}\\c=3\end{cases}$.

∴抛物线的解析式是$y=\frac{3}{4}x^2-\frac{15}{4}x+3$.

（3）在抛物线的对称轴上存在点 P，使得以B，C，P三点为顶点的三角形是直角三角形，理由如下：

∵抛物线的解析式是$y=\frac{3}{4}x^2-\frac{15}{4}x+3$，

∴抛物线对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$.

设点 P 坐标为$\left(\frac{5}{2},m\right)$.

①当$\angle PCB=90°$时，有$BP^2=BC^2+PC^2$.

∵$BP^2=\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2$，$PC^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2$，$BC^2=25$，

$\therefore\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2+25$，

解得：$m=\frac{19}{3}$，

故点$P_1\left(\frac{5}{2},\frac{19}{3}\right)$；

②当$\angle PBC=90°$时，有$PC^2=PB^2+BC^2$.

$\because PC^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2$，$PB^2=\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2$，$BC^2=25$，

$\therefore\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2=\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2+25$，

解得：$m=-2$，

故点$P_2\left(\frac{5}{2},-2\right)$；

③当$\angle BPC=90°$时，有$BC^2=BP^2+PC^2$.

$\because PC^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2$，$PB^2=\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2$，$BC^2=25$，

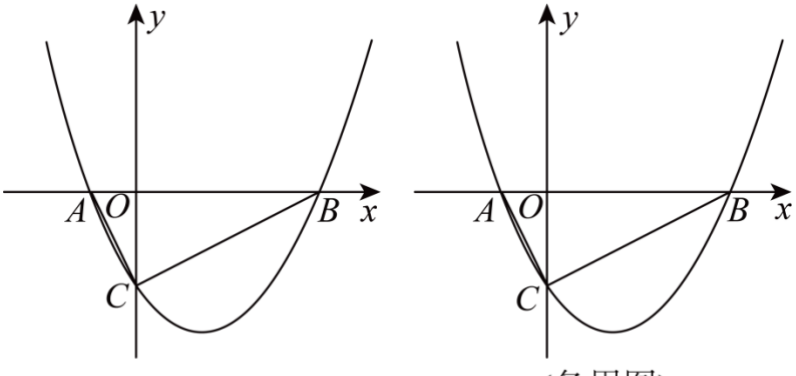
$\therefore 25=\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+m^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+(m-3)^2$.

解得：$m_1=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$，$m_2=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore P_3\left(\frac{5}{2},\frac{3+2\sqrt{6}}{2}\right)$，$P_4\left(\frac{5}{2},\frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right)$.

综上所述，使得$\triangle BCP$为直角三角形的点 P 的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{19}{3}\right)$或$\left(\frac{5}{2},-2\right)$或$\left(\frac{5}{2},\frac{3+2\sqrt{6}}{2}\right)$或$\left(\frac{5}{2},\frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right)$.

6.（2023 秋·山西阳泉·九年级统考期末）综合与探究：在平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2+bx-2$与x轴交于点$A(-1,0)$和点$B(4,0)$，与y轴交于点C，过动点$D(0,m)$作平行于x轴的直线l，直线l与抛物线$y=ax^2+bx-2$相交于点E，F.



(备用图)

（1）求抛物线的表达式；

（2）求m的取值范围；

（3）直线l上是否存在一点P，使得△BCP是以BC为直角边的等腰直角三角形？若存在，求m的值；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）把点$A(-1,0)$和点$B(4,0)$代入$y=ax^2+bx-2$，求解即可；

（2）将抛物线解析式化成顶点式，求得y的最小值为$-\frac{25}{8}$. 由直线l与抛物线有两个交点，即可得出$m>-\frac{25}{8}$；

（3）分两种情况：①当$\angle BCP=90°$，$BC=PC$时，②如图，当$\angle CBP=90°$，$BC=BP$时，分别 求解即可.

【解题过程】

（1）解：∵抛物线$y=ax^2+bx-2$经过点$A(-1,0)$和点$B(4,0)$，

$\therefore\begin{cases}a-b-2=0,\\16a+4b-2=0.\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

（2）解：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{8}$

∴y的最小值为$-\frac{25}{8}$.

∵直线l与抛物线有两个交点，

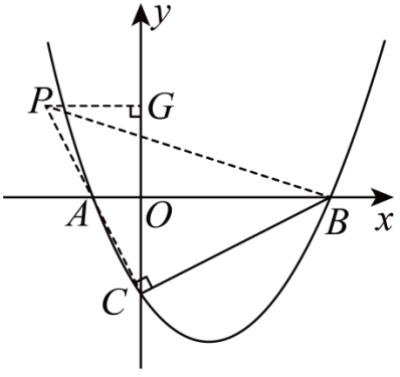
∴$m>-\frac{25}{8}$.

（3）解：存在.

当$x=0$时，$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=-2$.

∴点C的坐标为$(0,-2)$.

①如图，当$\angle BCP=90°$，$BC=PC$时，过点P作$PG\perp y$轴于G，



∴$\angle BOC=\angle CGP=90°$.

∵$\angle BCO+\angle PCG=90°$，$\angle GPC+\angle PCG=90°$，

$\therefore \angle BCO = \angle CPG.$

在$\triangle BCO$和$\triangle CPG$中，$\begin{cases} \angle BOC = \angle CGP, \\ \angle BCO = \angle CPG, \\ BC = PC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BCO \cong \triangle CPG.$

$\therefore CG = BO = 4.$

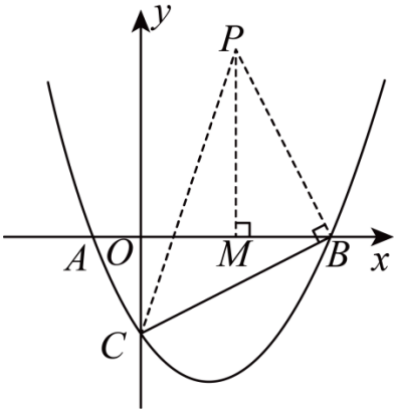
$\because CO = 2,$

$\therefore m = OG = 4 - 2 = 2.$

延长PC至P'使得$CP' = CP$，此时$\triangle BCP'$也是等腰直角三角形.

易得，此时$m = -6$.（不合题意，舍去）

②如图，当$\angle CBP = 90°$，$BC = BP$时，过点P作$PM \perp x$轴于M，



$\because \angle BOC = \angle BMP = 90°$，$\angle BCO + \angle OBC = 90°$，$\angle PBM + \angle OBC = 90°$，

$\therefore \angle BCO = \angle PBM.$

$\therefore \triangle BCO \cong \triangle PBM.$

$\therefore PM = BO = 4.$

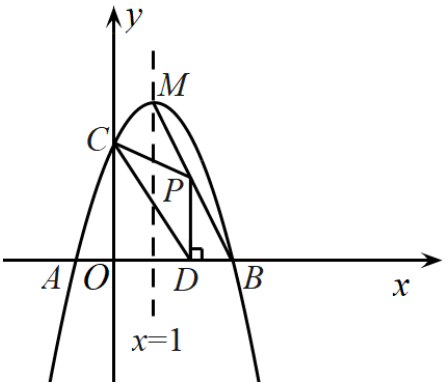
$\therefore m = PM = 4.$

延长PB，使得$BP' = BP$，此时$\triangle BCP'$也是等腰直角三角形.

同理可得，$m = -4$.（不合题意，舍去）

综上所述，直线l上存在一点P，使得$\triangle BCP$是以BC为直角边的等腰直角三角形，m的值为 2 或 4.

7.（2023 秋·九年级单元测试）如图，抛物线$y = -x^2 + bx + c$与 x 轴相交于 A，B 两点（点 A 位于点 B 的左侧），与 y 轴相交于点 C，M 是抛物线的顶点，直线$x = 1$是抛物线的对称轴，且点 C 的坐标为$(0,3)$.



（1）求抛物线的关系式；

（2）已知 P 为线段MB上一个动点，过点 P 作$PD \perp x$轴于点 D．若$PD = m$，$\triangle PCD$的面积为 S.

①求 S 与 m 之间的函数关系式.

②当 S 取得最大值时，求点 P 的坐标.

（3）在（2）的条件下，在线段MB上是否存在点 P，使$\triangle PCD$为等腰三角形？如果存在，直接写出满足条件的点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）点C坐标代入解析式可求c的值，由对称轴可求b的值，即可求解；

（2）①先求出点M，点A，点B的坐标，利用待定系数法可求BM解析式，由三角形的面积公式可求解；②利用二次函数的性质可求解；

（3）分三种情况讨论，利用两点距离公式列出方程可求解.

【解题过程】

（1）解：∵直线$x = 1$是抛物线的对称轴，且点C的坐标为$(0,3)$，

$\therefore c = 3$，$-\frac{b}{2\times(-1)} = 1$，

$\therefore b = 2$，

∴抛物线的解析式为：$y = -x^2 + 2x + 3$；

（2）解：①∵$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$

$\therefore M(1,4)$.

∵令$y = 0$，则$-x^2 + 2x + 3 = 0$，

解得$x_1 = 3, x_2 = -1$，

$\therefore A(-1,0). B(3,0)$.

∵点$M(1,4)$，点$B(3,0)$，

∴直线BM的解析式为$y=-2x+6$.

∵点 P 在直线BM上，且$PD\perp x$轴于点 D，$PD=m$，

∴点$P\left(3-\frac{m}{2},m\right)$，

∴$S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}PD\cdot OD=\frac{1}{2}m\times\left(3-\frac{m}{2}\right)=-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m$.

∴S 与 m 之间的函数关系式为$S=-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m(0<m\leq 4)$；

②∵$S=-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m=-\frac{1}{4}(m-3)^2+\frac{9}{4}$

∴当$m=3$时，S 有最大值为$\frac{9}{4}$，

此时$PD=m=3$

把$y=3$代入$y=-2x+6$，得$x=\frac{3}{2}$

∴$P\left(\frac{3}{2},3\right)$

∴当$m=3$时，S 有最大值为$\frac{9}{4}$，此时$P\left(\frac{3}{2},3\right)$.

（3）解：存在满足条件的点 P，点 P 的坐标为$(-6+3\sqrt{7},18-6\sqrt{7})$或$(4-\sqrt{7},-2+2\sqrt{7})$.

理由如下：

设$P(t,6-2t)$，则$C(0,3)$，$D(t,0)$，

所以$|PD|=|6-2t|$，

$|CD|=\sqrt{t^2+9}$，

$|PC|=\sqrt{t^2+(3-2t)^2}=\sqrt{5t^2-12t+9}$，

若$|PD|=|CD|$，即$|6-2t|=\sqrt{t^2+9}$，

解得$t=4-\sqrt{7}$（$4+\sqrt{7}$舍去），

所以点 $P(4-\sqrt{7},-2+2\sqrt{7})$；

若$|PD|=|PC|$，即$|6-2t|=\sqrt{5t^2-12t+9}$，

解得$t=-6+3\sqrt{7}$（$-6-3\sqrt{7}$舍去），

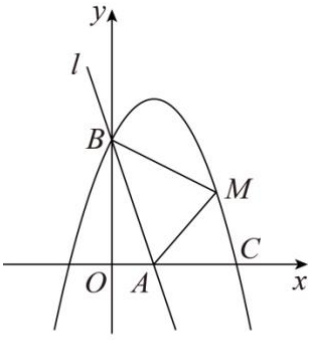
所以点 $P(-6+3\sqrt{7},18-6\sqrt{7})$；

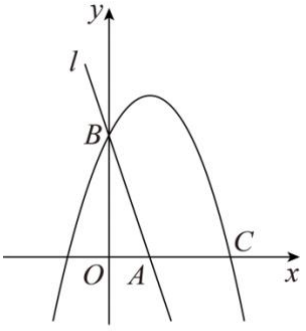
若$|CD|=|PC|$，即$\sqrt{t^2+9}=\sqrt{5t^2-12t+9}$，

解得$t=0$或$t=3$，均不合题意，故舍去，

所以点 P 的坐标为$(-6+3\sqrt{7},18-6\sqrt{7})$或$(4-\sqrt{7},-2+2\sqrt{7})$.

8．（2023·辽宁营口·校联考一模）已知直线l与x轴、y轴分别相交于$A(1,0)$、$B(0,3)$两点，抛物线$y=ax^2-2ax+a+4$ $(a<0)$经过点B，交x轴正半轴于点C．





备用图

（1）求直线l的函数解析式和抛物线的函数解析式；

（2）在第一象限内抛物线上取点M，连接AM、BM，求△AMB面积的最大值及点M的坐标．

（3）抛物线上是否存在点P使△CBP为直角三角形，如果存在，请直接写出点P的坐标；如果不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）先利用待定系数法求得直线l的函数解析式，求得点 B 的坐标，从而可以求得抛物线的解析式；

（2）根据题意可以求得点 A 的坐标，然后根据题意和图形可以用含 m 的代数式表示出 S，然后将其化为顶点式，再根据二次函数的性质即可解答本题；

（3）分三种情况讨论，分别当BC、PC、PB为斜边时，利用勾股定理列方程即可求解．

【解题过程】

（1）解：设$y=kx+b$，

把$A(1,0)$，$B(0,3)$代入得：$\begin{cases}k+b=0\\0+b=3\end{cases}$，

∴ $k=-3$，$b=3$，

∴一次函数解析式为：$y=-3x+3$，

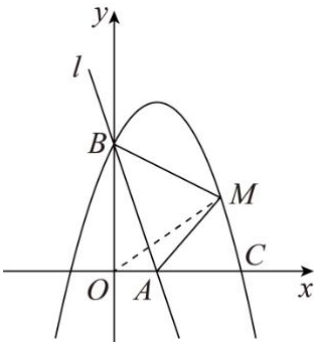
把$B(0,3)$代入$y=ax^2-2ax+a+4$，

∴ $3=a+4$，

∴ $a=-1$，

∴二次函数解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）解：连接OM，



把$y=0$代入$y=-x^2+2x+3$得，$0=-x^2+2x+3$，

$\therefore x=-1$或3，

∴抛物线与x轴的交点横坐标为-1和3，

设点$M(m,-m^2+2m+3)$，

$\because M$在抛物线上，且在第一象限内，

$\therefore 0<m<3$，

$\because A$的坐标为$(1,0)$，

$\therefore S=S_{\triangle OBM}+S_{\triangle OAM}-S_{\triangle AOB}$

$=\frac{1}{2}\times m\times 3+\frac{1}{2}\times 1\times(-m^2+2m+3)-\frac{1}{2}\times 1\times 3=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$，

∴当$m=\frac{5}{2}$时，S取得最大值$\frac{25}{8}$.

此时M的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$；

（3）解：设点$P(n,\ -n^2+2n+3)$，

则$BC^2=3^2+3^2=18$，$PC^2=(n-3)^2+(-n^2+2n+3)^2$，$PB^2=n^2+(-n^2+2n)^2$，

当PC为斜边时，则$n^2+(-n^2+2n)^2+18=(n-3)^2+(-n^2+2n+3)^2$，

解得$n=0$（舍去）或$n=1$，

∴点$P(1,\ 4)$；

当PB为斜边时，则$(n-3)^2+(-n^2+2n+3)^2+18=n^2+(-n^2+2n)^2$，

解得$n=3$（舍去）或$n=-2$，

∴点$P(-2,\ -5)$；

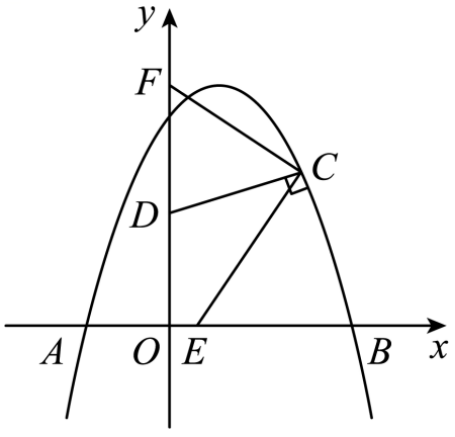
当BC为斜边时，则$(n-3)^2+(-n^2+2n+3)^2+n^2+(-n^2+2n)^2=18$，

解得$n=3$（舍去）或$n=0$（舍去）或$n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$n=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

∴点P的坐标为$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$；

综上，点P的坐标为$(-2,\ -5)$或$(1,\ 4)$或$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

9.（2022 秋·广东惠州·九年级校考阶段练习）如图，点$A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(3,3)$均在抛物线$y=ax^2+bx+c$上，点D在y轴上，且$DC\perp BC$，$\angle BCD$绕点C顺时针旋转后两边与x轴、y轴分别相交于点E，F.



（1）求抛物线的解析式；

（2）CF能否经过抛物线的顶点？若能，求出此时点E的坐标；若不能，请说明理由；

（3）若$\triangle FDC$是等腰三角形，求点F的坐标.

【思路点拨】

（1）利用待定系数法即可求解；

（2）作$CH\perp y$轴于点H，$CS\perp x$轴于点S，求得顶点M坐标，求得直线CM即CF的解析式，得出点F的坐标，证明$\triangle FCH\cong\triangle ECS$，据此求解即可；

（3）证明$\triangle DCH\cong\triangle SCB$，求得$CD=\sqrt{10}$，分三种情况讨论，即可求解.

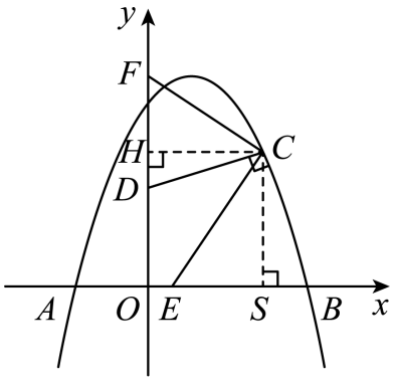
【解题过程】

（1）解：由抛物线与x轴的两个交点A，B的坐标，可以由两根式设抛物线解析式为$y=a(x+2)(x-4)$，然后将C点坐标代入得：$a(3+2)(3-4)=3$，

解得：$a=\frac{3}{5}$，

故抛物线解析式为$y=-\frac{3}{5}(x+2)(x-4)=-\frac{3}{5}x^2+\frac{6}{5}x+\frac{24}{5}$；

（2）解：作$CH\perp y$轴于点H，$CS\perp x$轴于点S，



$y=-\frac{3}{5}(x+2)(x-4)=-\frac{3}{5}(x-1)^2+\frac{27}{5}$，

∴顶点M坐标为$\left(1,\ \frac{27}{5}\right)$，

设直线CM的解析式为$y=mx+n$，

∴$\begin{cases}3=3m+n\\ \frac{27}{5}=m+n\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=-\frac{6}{5}\\ n=\frac{33}{5}\end{cases}$，

∴直线CM即CF的解析式为$y=-\frac{6}{5}x+\frac{33}{5}$，

∴ F点坐标为$\left(0,\ \frac{33}{5}\right)$.

∵$\angle FCH+\angle HCE=90°$，$\angle ECS+\angle HCE=90°$，

∴$\angle ECS=\angle HCF$，

∴$\triangle FCH\cong\triangle ECS$，

∴$FH=SE=\frac{33}{5}-3=\frac{18}{5}$，

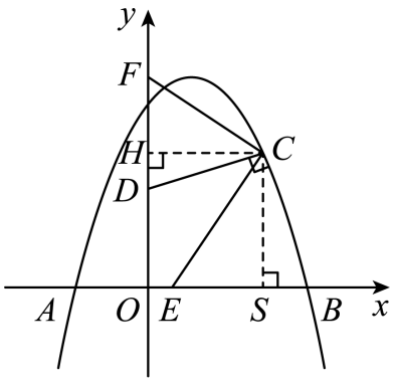
∴$EO=\frac{18}{5}-3=\frac{3}{5}$，

∴$E\left(-\frac{3}{5},\ 0\right)$，

∴CF能经过抛物线的顶点，此时点E的坐标为$\left(-\frac{3}{5},\ 0\right)$；

（3）解：同理求得CB直线方程为$y=-3x+12$，

作$CH\perp y$轴于点H，$CS\perp x$轴于点S.



∵$C(3，3)$，

∴四边形$HOSC$是正方形，$OS=3$，

∵$B(4，0)$，

∴$BS=1$，

∵$\angle HCD+\angle DCS=90°$，$\angle BCS+\angle DCS=90°$，

∴$\angle DCH=\angle SCB$，

∴$\triangle DCH\cong\triangle SCB$，

∴$DH=SB=1$，$OD=2$，

∴$D(0，2)$，

∴$CD=\sqrt{10}$，

则$\triangle FDC$是等腰三角形可以有三种情形：

①$FC=CD=\sqrt{10}$．则$DH=1$，$FH=1$，则F点坐标为$(0，4)$；

②$FD=CD=\sqrt{10}$，则F点坐标为$(0，2+\sqrt{10})$；

③$FD=FC$，设$F(0，m)$．

∵$FC^2=FH^2+HC^2$，即$FC^2=(m-3)^2+3^2$，$FD=FC=m-2$，

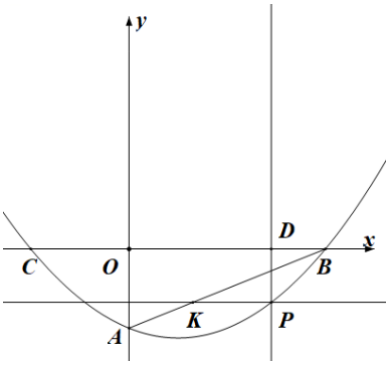
∴$(m-3)^2+3^2=(m-2)^2$，

解得$m=7$，

∴$F(0，7)$，

综上，点F的坐标为$(0，4)$或$(0，2+\sqrt{10})$或$(0，7)$．

10．（2023·四川·九年级专题练习）如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于$B(4,0)$，$C(-2,0)$两点．与y轴交于点$A(0,-2)$．



（1）求该抛物线的函数表达式；

（2）若点 P 是直线AB下方抛物线上的一动点，过点 P 作 x 轴的平行线交AB于点 K，过点 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于点 D，求与$\frac{1}{2}PK+PD$的最大值及此时点 P 的坐标；

（3）在抛物线的对称轴上是否存在一点 M，使得△ MAB是以AB为一条直角边的直角三角形：若存在，请求出点 M 的坐标，若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）将A、B、C代入抛物线解析式求解即可；

（2）可求直线AB的解析式为$y=\frac{1}{2}x-2$，设$P\left(m,\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2\right)$（$0<m<4$），可求$K\left(\frac{1}{2}m^2-m,\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2\right)$，从而可求$\frac{1}{2}PK+PD=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2$，即可求解；

（3）过A作$AM_2\perp AB$交抛物线的对称轴于M_2，过B作$BM_1\perp AB$交抛物线的对称轴于M_1，连接AM_1，设$M_1(1,n)$，可求${AM_1}^2=n^2+4n+5$，${BM_1}^2=n^2+9$，由$AB^2+{BM_1}^2={AM_1}^2$，可求M_1，进而求出直线BM_1的解析式，即可求解．

【解题过程】

（1）解：由题意得 $\begin{cases}16a+4b+c=0\\4a-2b+c=0\\c=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{2}\\c=-2\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2$．

（2）解：设直线AB的解析式为$y=kx+b$，则有：$\begin{cases}4k+b=0\\b=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=-2\end{cases}$，

∴直线AB的解析式为$y=\frac{1}{2}x-2$；

设$P\left(m,\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2\right)$（$0<m<4$），

∴ $\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2$，

解得：$x=\frac{1}{2}m^2-m$，

$\therefore K\left(\frac{1}{2}m^2-m,\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2\right)$，

$\therefore PK=m-\left(\frac{1}{2}m^2-m\right)=-\frac{1}{2}m^2+2m$，

$\therefore \frac{1}{2}PK=-\frac{1}{4}m^2+m$，

$PD=-\left(\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m-2\right)=-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m+2$，

$\therefore \frac{1}{2}PK+PD=-\frac{1}{4}m^2+m-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m+2$

$=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2$

$=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$，

$\because -\frac{1}{2}<0$，

$\therefore$当$m=\frac{3}{2}$时，$\frac{1}{2}PK+PD$的最大值为$\frac{25}{8}$，

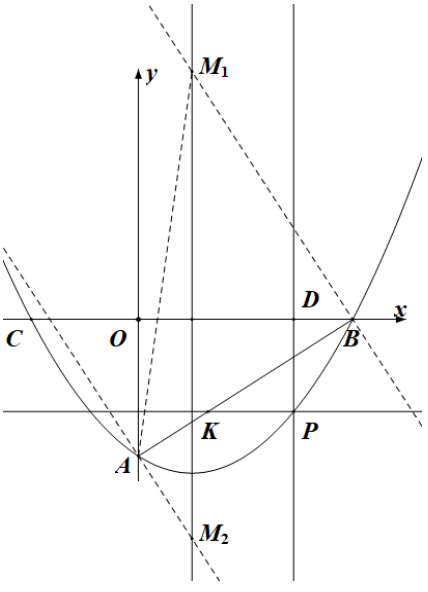
$\therefore\ y=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-2=-\frac{35}{16}$，

$\therefore\ P\left(\frac{3}{2},-\frac{35}{16}\right)$.

故$\frac{1}{2}PK+PD$的最大值为$\frac{25}{8}$，$P\left(\frac{3}{2},-\frac{35}{16}\right)$.

（3）解：存在，

如图，过A作$AM_2\perp AB$交抛物线的对称轴于M_2，过B作$BM_1\perp AB$交抛物线的对称轴于M_1，连接AM_1，



∵抛物线$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2$的对称轴为直线$x=1$，

∴设$M_1(1,n)$，

∴ ${AM_1}^2=1^2+(n+2)^2$

$=n^2+4n+5$，

$AB^2=2^2+4^2=20$，

${BM_1}^2=(4-1)^2+n^2$

$=n^2+9$，

∵ $AB^2+{BM_1}^2={AM_1}^2$，

∴ $n^2+9+20=n^2+4n+5$，

解得：$n=6$，

∴ $M_1(1,6)$；

设直线BM_1的解析式为$y=k_1x+b_1$，则有：$\begin{cases}k_1+b_1=6\\4k_1+b_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_1=-2\\b_1=8\end{cases}$，

∴直线BM_1解析式为$y=-2x+8$，

∵ $AM_2\parallel BM_1$，且经过$A(0,-2)$，

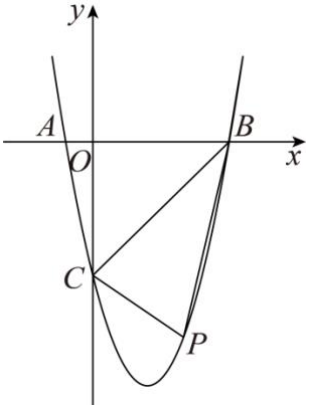
∴直线AM_2解析式为$y=-2x-2$，

∴当$x=1$时，$y=-2\times1-2=-4$，

∴ $M_2(1,-4)$；

综上所述：存在，M的坐标为$(1,6)$或$(1,-4)$.

11．（2023·湖南娄底·统考中考真题）如图，抛物线$y=x^2+bx+c$过点$A(-1,0)$、点$B(5,0)$，交y轴于点C.



（1）求b，c的值.

（2）点$P(x_0,y_0)(0<x_0<5)$是抛物线上的动点

①当x_0取何值时，△PBC的面积最大？并求出△PBC面积的最大值；

②过点 P 作$PE \perp x$轴，交BC于点 E，再过点 P 作$PF \parallel x$轴，交抛物线于点 F，连接EF，问：是否存在点 P，使△ PEF为等腰直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）将将$A(-1,0)$、$B(5,0)$代入抛物线$y=x^2+bx+c$即可求解；

（2）①由（1）可知：$y=x^2-4x-5$，得$C(0,-5)$，可求得BC的解析式为$y=x-5$，过点 P 作$PE \perp x$轴，交BC于点 E，交x轴于点Q，易得$PE=y_E-y_0=-{x_0}^2+5x_0$，根据△ PBC的面积$=S_{\triangle PEC}+S_{\triangle PEB}$，可得△ PBC的面积$=\frac{1}{2}PE\cdot(x_0-x_C)+\frac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_0)=-\frac{5}{2}\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{125}{8}$，即可求解；

②由题意可知抛物线的对称轴为$x_{对}=-\frac{-4}{2\times1}=2$，则$x_F=4-x_0$，分两种情况：当点$P$在对称轴左侧时，即$0<x_0<2$时，当点$P$在对称轴右侧时，即$2<x_0<5$时，分别进行讨论求解即可．

【解题过程】

（1）解：将$A(-1,0)$、$B(5,0)$代入抛物线$y=x^2+bx+c$中，

可得：$\begin{cases}1-b+c=0\\25+5b+c=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=-4\\c=-5\end{cases}$，

即：$b=-4$，$c=-5$；

（2）①由（1）可知：$y=x^2-4x-5$，

当$x=0$时，$y=-5$，即$C(0,-5)$，

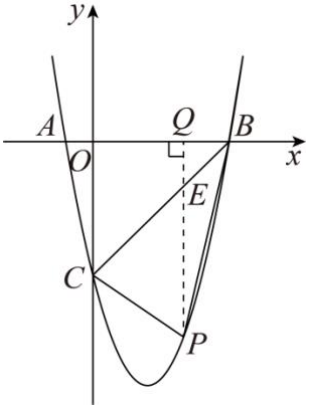
设BC的解析式为：$y=kx+b$，

将$B(5,0)$，$C(0,-5)$代入$y=kx+b$中，

可得$\begin{cases}5k+b=0\\b=-5\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=-5\end{cases}$，

∴BC的解析式为：$y=x-5$，

过点 P 作$PE \perp x$轴，交BC于点 E，交x轴于点Q，



∵$P(x_0,y_0)(0<x_0<5)$，则${y_0}={x_0}^2-4x_0-5$，

∴点 E 的横坐标也为x_0，则纵坐标为$y_E = x_0 - 5$，

$\therefore PE = y_E - y_0 = (x_0 - 5) - ({x_0}^2 - 4x_0 - 5) = -{x_0}^2 + 5x_0$，

$\triangle PBC$的面积$= S_{\triangle PEC} + S_{\triangle PEB}$

$= \frac{1}{2}PE \cdot (x_0 - x_C) + \frac{1}{2}PE \cdot (x_B - x_0)$

$= \frac{1}{2}PE \cdot (x_B - x_C)$

$= \frac{5}{2}(-{x_0}^2 + 5x_0)$

$= -\frac{5}{2}\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{125}{8}$，

$\because -\frac{5}{2} < 0$，

∴当$x_0 = \frac{5}{2}$时，$\triangle PBC$的面积有最大值，最大值为$\frac{125}{8}$；

②存在，当点P的坐标为$\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2}, \frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$或$(4, -5)$时，$\triangle PEF$为等腰直角三角形.

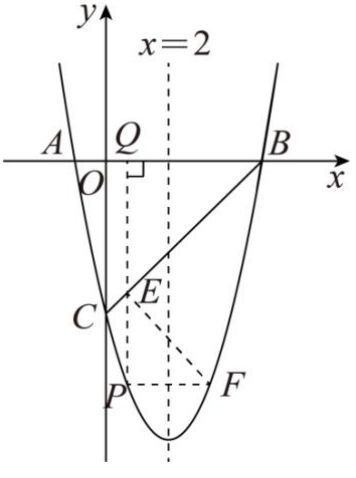
理由如下：由①可知$PE = -{x_0}^2 + 5x_0$，

由题意可知抛物线的对称轴为直线$x_{对} = -\frac{-4}{2\times 1} = 2$，

$\because PF \parallel x$轴，

$\therefore \angle EPF = 90°$，$\frac{x_0 + x_F}{2} = x_{对} = 2$，则$x_F = 4 - x_0$，

当点P在对称轴左侧时，即$0 < x_0 < 2$时，



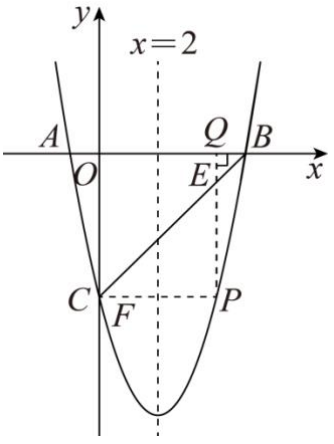
$PF = x_F - x_0 = 4 - 2x_0$，当$PE = PF$时，$\triangle PEF$为等腰直角三角形，

即：$-{x_0}^2 + 5x_0 = 4 - 2x_0$，整理得：${x_0}^2 - 7x_0 + 4 = 0$，

解得：$x_0 = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$（$x_0 = \frac{7+\sqrt{33}}{2} > 2$，不符合题意，舍去）

此时$y_0 = {x_0}^2 - 4x_0 - 5 = \frac{3-3\sqrt{33}}{2}$，即点$P\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2}, \frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$；

当点P在对称轴右侧时，即$2 < x_0 < 5$时，



$PF = x_0 - x_F = 2x_0 - 4$，当$PE = PF$时，$\triangle PEF$为等腰直角三角形，

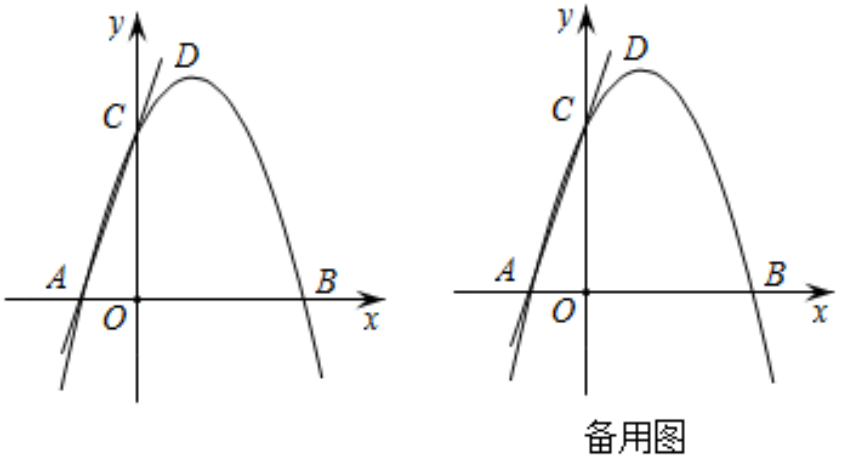
即：${-x_0}^2 + 5x_0 = 2x_0 - 4$，整理得：${x_0}^2 - 3x_0 - 4 = 0$，

解得：$x_0 = 4$（$x_0 = -1 < 2$，不符合题意，舍去）

此时：$y_0 = 4^2 - 4 \times 4 - 5 = -5$，即点$P(4, -5)$；

综上所述，当点P的坐标为$\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2}, \frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$或$(4, -5)$时，$\triangle PEF$为等腰直角三角形.

12．（2022 秋·广西贵港·九年级统考期末）如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y = ax^2 + 2x + c$与x轴交于A（-1，0），B（3，0）两点，与y轴交于点C，点D是该抛物线的顶点.



备用图

（1）求抛物线的表达式；

（2）请在y轴上找一点M，使$\triangle BDM$的周长最小，求出点M的坐标；

（3）试探究：在抛物线上是否存在点P，使以点A，P，C为顶点，AC为直角边的三角形是直角三角形？若存在，请直接写出符合条件的点P的坐标；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）设抛物线解析式为$y=a(x+1)(x-3)$，展开得到$-2a=2$，然后求出a的值即可得到抛物线的解析式；

（2）利用二次函数的性质确定点D的坐标为$(1，4)$，作B点关于y轴的对称点B'，连接DB'交y轴于M，如图1，则$B'(-3，0)$，利用两点之间线段最短即可判断此时$MB+MD$的值最小，此时$\triangle BDM$的周长最小，然后求出直线DB'的解析式即可得到点M的坐标；

（3）过点C作AC的垂线交抛物线于另一点P，如图2，先用待定系数法求出直线AC的解析式，利用两直线垂直一次项系数互为负倒数设直线PC的解析式为$y=-\frac{1}{3}x+d$，把点C的坐标代入求出d的值得到直线PC的解析式，再解方程组$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+3 \\ y=-x^2+2x+3 \end{cases}$得此时点$P$的坐标，过点$A$作$AC$的垂线交抛物线于另一点$P$，利用同样的方法可求出此时点$P$的坐标.

【解题过程】

（1）解：设抛物线解析式为$y=a(x+1)(x-3)$，

即$y=ax^2-2ax-3a$，

$\therefore -2a=2$，

解得$a=-1$，

∴抛物线解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）解：$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴顶点D的坐标为$(1，4)$，

作B点关于y轴的对称点B'，连接DB'交y轴于M，如图1，则$B'(-3，0)$，

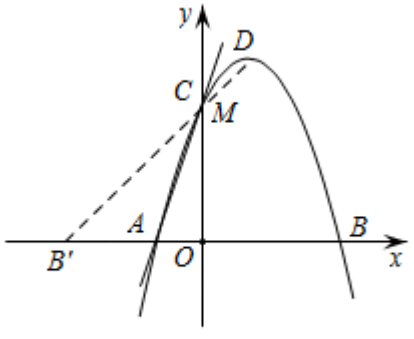


图1

$\because MB=MB'$，

$\therefore MB+MD=MB'+MD=DB'$，此时$MB+MD$的值最小，

而BD的值不变，

∴此时△ BDM的周长最小，

设直线DB'的解析式为$y=kx+b$，将$B'(-3，0)$，D $(1，4)$代入解析式得：

$\begin{cases}-3k+b=0\\k+b=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\b=3\end{cases}$，

∴直线DB'的解析式为$y=x+3$，

当$x=0$时，$y=x+3=3$，

∴点M的坐标为$(0，3)$；

（3）解：存在，

过点C作AC的垂线交抛物线于另一点P，如图 2，

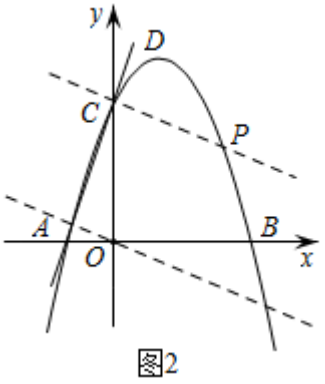


图2

∵抛物线与y轴交于点C，

∴当$x=0$时，$y=3$，

∴点$C(0，3)$，

设直线AC的解析式为：$y=px+q$，

把$C(0，3)$，A（-1，0）代入得，

$\begin{cases}q=3\\-p+q=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}q=3\\p=3\end{cases}$，

∴直线AC的解析式为$y=3x+3$，

∵ $AC\perp PC$，

∴设直线PC解析式为：$y=-\frac{1}{3}x+d$，

把$C(0，3)$代入得：$d=3$，

∴直线PC解析式为$y=-\frac{1}{3}x+3$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/516120153120010114