

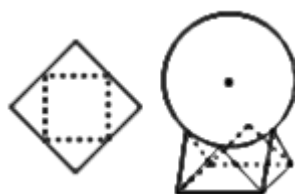
湖南省洞口二中 2025 届高三数学二模试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，用一边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸，按各边中点垂直折起四个小三角形，做成一个蛋巢，将体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的鸡蛋（视为球体）放入其中，蛋巢形状保持不变，则鸡蛋中心（球心）与蛋巢底面的距离为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

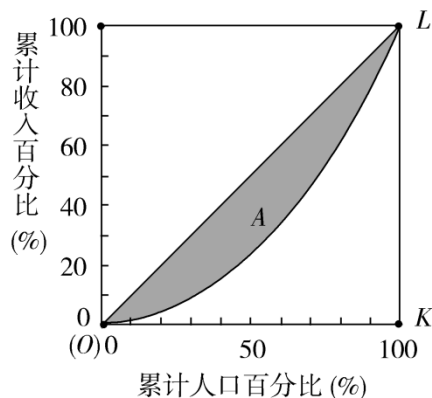
2. 在复平面内， $\frac{3+i}{1-i}$ 复数（ i 为虚数单位）的共轭复数对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = |n - c|$ ($n \in N^*$)。则“ $c < 2$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的（ ）条件。

- A. 必要而不充分 B. 充要 C. 充分而不必要 D. 即不充分也不必要

4. 为了研究国民收入在国民之间的分配，避免贫富过分悬殊，美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线，如图所示。劳伦茨曲线为直线 OL 时，表示收入完全平等。劳伦茨曲线为折线 OKL 时，表示收入完全不平等。记区域 A 为不平等区域， a 表示其面积， S 为 $\triangle OKL$ 的面积，将 $Gini = \frac{a}{S}$ 称为基尼系数。



对于下列说法：

① Gini 越小，则国民分配越公平；

② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$ ，则对 $\forall x \in (0,1)$ ，均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$ ；

③ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0,1])$ ，则 $\text{Gini} = \frac{1}{4}$ ；

④ 若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0,1])$ ，则 $\text{Gini} = \frac{1}{2}$ 。

其中正确的是：

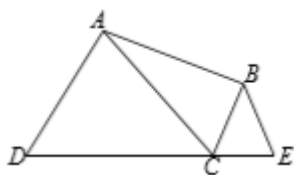
A. ①④

B. ②③

C. ①③④

D. ①②④

5. 如图所示，为了测量 A 、 B 两座岛屿间的距离，小船从初始位置 C 出发，已知 A 在 C 的北偏西 45° 的方向上， B 在 C 的北偏东 15° 的方向上，现在船往东开 2 百海里到达 E 处，此时测得 B 在 E 的北偏西 30° 的方向上，再开回 C 处，由 C 向西开 $2\sqrt{6}$ 百海里到达 D 处，测得 A 在 D 的北偏东 22.5° 的方向上，则 A 、 B 两座岛屿间的距离为 ()



A. 3

B. $3\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

6. 在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测。

甲：我的成绩比乙高。

乙：丙的成绩比我和甲的都高。

丙：我的成绩比乙高。

成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A. 甲、乙、丙

B. 乙、甲、丙

C. 丙、乙、甲

D. 甲、丙、乙

7. 各项都是正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$ ，且 $a_2, \frac{1}{2}a_3, a_1$ 成等差数列，则 $\frac{a_3 + a_4}{a_4 + a_5}$ 的值为 ()

A. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合 $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$ ，则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = ()$ 。

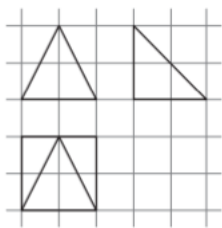
A. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$

B. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

D. $(1, 3)$

9. 如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积是 ()



- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 8

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - k(x + \frac{1}{2})$ 在 R 上零点最多, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{3e})$ B. $(-\frac{2}{3e}, 0)$ C. $(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, 0)$ D. $(0, \frac{1}{2\sqrt{e}})$

12. 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 若 $\alpha = a + \frac{1}{a}, \beta = b + \frac{1}{b}$, 则 $\alpha + \beta$ 的最小值是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $x, y \in R$, i 为虚数单位, 且 $(x-2)i - y = -1 + i$, 则 $x + y =$ _____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x + y = 0$, 则 $a =$ _____.

15. 在 $(x + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, 常数项为_____.(用数字作答)

16. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过左焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B

两点, 且 $|AF_1| = 3|BF_1|, |AB| = |BF_2|$, 则椭圆的离心率为_____.

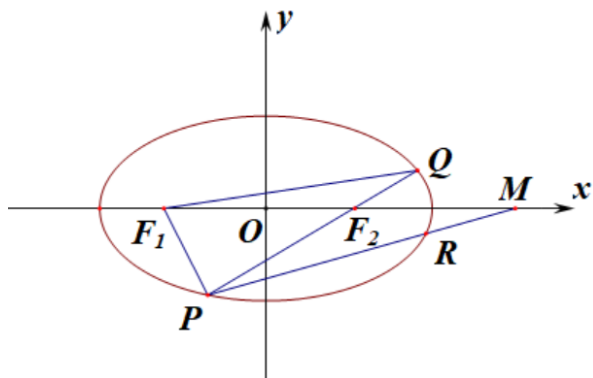
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x (a \in R)$, 函数 $g(x) = -2x + 3$.

(I) 判断函数 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}ag(x)$ 的单调性;

(II) 若 $-2 \leq a \leq -1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq t|g(x_1) - g(x_2)|$ 恒成立, 求实数 t 的最小值.

18. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 4, 且椭圆过点 $(2, \frac{5}{3})$, 过点 F_2 且不平行于坐标轴的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 点 Q 关于 x 轴的对称点为 R , 直线 PR 交 x 轴于点 M .



(1) 求 $\triangle PF_1Q$ 的周长;

(2) 求 $\triangle PF_1M$ 面积的最大值.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln(2x + a)$ ($x > 0, a > 0$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 $\ln 3 - \frac{2}{3}$.

(1) 求 a ;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2x$ ($x > 0$) 和 $h(x) = f(x) - \frac{2x}{2x+1}$ ($x > 0$) 的单调性;

(3) 设 $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, 求证: $\frac{5-2^{n+1}}{2^n} < \frac{1}{a_n} - 2 < 0$ ($n \geq 2$).

20. (12分) 设前 n 项积为 T_n 的数列 $\{a_n\}$, $a_n = \lambda - T_n$ (λ 为常数), 且 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是等差数列.

(I) 求 λ 的值及数列 $\{T_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_n = (2n+3)T_n$, 求 $S_{2n} - S_n - 2n$ 的最小值.

21. (12分) 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 且在两种坐标系中取相同的长度单位, 建立极坐标系, 判断

直线 $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ (t 为参数) 与圆 $C: \rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$ 的位置关系.

22. (10分) 一年之计在于春, 一日之计在于晨, 春天是播种的季节, 是希望的开端. 某种植户对一块地的 n ($n \in N^*$)

个坑进行播种, 每个坑播 3 粒种子, 每粒种子发芽的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且每粒种子是否发芽相互独立. 对每一个坑而言,

如果至少有两粒种子发芽, 则不需要进行补播种, 否则要补播种.

- (1) 当 n 取何值时, 有 3 个坑要补播种的概率最大? 最大概率为多少?
- (2) 当 $n = 4$ 时, 用 X 表示要补播种的坑的个数, 求 X 的分布列与数学期望.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

先求出球心到四个支点所在球的小圆的距离, 再加上侧面三角形的高, 即可求解.

【详解】

设四个支点所在球的小圆的圆心为 O' , 球心为 O ,

由题意, 球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$, 即 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}$ 可得球 O 的半径为 1,

又由边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形硬纸, 可得圆 O' 的半径为 $\frac{1}{2}$,

利用球的性质可得 $O'O^2 = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又由 O' 到底面的距离即为侧面三角形的高, 其中高为 $\frac{1}{2}$,

所以球心到底面的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

故选: D.

【点睛】

本题主要考查了空间几何体的结构特征, 以及球的性质的综合应用, 着重考查了数形结合思想, 以及推理与计算能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

将复数化简得 $z=1+2i$, $\bar{z}=1-2i$, 即可得到对应的点为 $(1,-2)$, 即可得出结果.

【详解】

$$z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i \Rightarrow \bar{z} = 1-2i, \text{ 对应的点位于第四象限.}$$

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的四则运算,考查共轭复数和复数与平面内点的对应,难度容易.

3、A

【解析】

根据递增数列的特点可知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 解得 $c < n + \frac{1}{2}$, 由此得到若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $c < \frac{3}{2}$, 根据推出关系可确定结果.

【详解】

若“ $\{a_n\}$ 是递增数列”, 则 $a_{n+1} - a_n = |n+1-c| - |n-c| > 0$,

即 $(n+1-c)^2 > (n-c)^2$, 化简得: $c < n + \frac{1}{2}$,

又 $n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore n + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$, $\therefore c < \frac{3}{2}$,

则 $c < 2$, $\{a_n\}$ 是递增数列, $\{a_n\}$ 是递增数列 $\Rightarrow c < 2$,

$\therefore$ “ $c < 2$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的必要不充分条件.

故选: A.

【点睛】

本题考查充分条件与必要条件的判断,涉及到根据数列的单调性求解参数范围,属于基础题.

4、A

【解析】

对于①, 根据基尼系数公式 $\text{Gini} = \frac{a}{S}$, 可得基尼系数越小, 不平等区域的面积 a 越小, 国民分配越公平, 所以①正确.

对于②, 根据劳伦茨曲线为一条凹向横轴的曲线, 由图得 $\forall x \in (0,1)$, 均有 $f(x) < x$, 可得 $\frac{f(x)}{x} < 1$, 所以②错误. 对

于③, 因为 $a = \int_0^1 (x - x^2) dx = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)|_0^1 = \frac{1}{6}$, 所以 $\text{Gini} = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, 所以③错误. 对于④, 因为

$a = \int_0^1 (x - x^3) dx = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)|_0^1 = \frac{1}{4}$, 所以 $\text{Gini} = \frac{a}{S} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, 所以④正确. 故选 A.

5、B

【解析】

先根据角度分析出 $\angle CBE, \angle ACB, \angle DAC$ 的大小, 然后根据角度关系得到 AC 的长度, 再根据正弦定理计算出 BC 的长度, 最后利用余弦定理求解出 AB 的长度即可.

【详解】

由题意可知: $\angle ACB = 60^\circ, \angle ADC = 67.5^\circ, \angle ACD = 45^\circ, \angle BCE = 75^\circ, \angle BEC = 60^\circ$,

所以 $\angle CBE = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$, $\angle DAC = 180^\circ - 67.5^\circ - 45^\circ = 67.5^\circ$,

所以 $\angle DAC = \angle ADC$, 所以 $CA = CD = 2\sqrt{6}$,

又因为 $\frac{BC}{\sin \angle BEC} = \frac{CE}{\sin \angle CBE}$, 所以 $BC = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$,

所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB} = \sqrt{24 + 6 - 2 \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查解三角形中的角度问题, 难度一般. 理解方向角的概念以及活用正、余弦定理是解答问题的关键.

6、A

【解析】

利用逐一验证的方法进行求解.

【详解】

若甲预测正确, 则乙、丙预测错误, 则甲比乙成绩高, 丙比乙成绩低, 故 3 人成绩由高到低依次为甲, 乙, 丙; 若乙预测正确, 则丙预测也正确, 不符合题意; 若丙预测正确, 则甲必预测错误, 丙比乙的成绩高, 乙比甲成绩高, 即丙比甲, 乙成绩都高, 即乙预测正确, 不符合题意, 故选 A.

【点睛】

本题将数学知识与时政结合, 主要考查推理判断能力. 题目有一定难度, 注重了基础知识、逻辑推理能力的考查.

7、C

【解析】

分析: 解决该题的关键是求得等比数列的公比, 利用题中所给的条件, 建立项之间的关系, 从而得到公比 q 所满足的等量关系式, 解方程即可得结果.

详解: 根据题意有 $a_2 + a_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} a_3$, 即 $q^2 - q - 1 = 0$, 因为数列各项都是正数, 所以 $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, 而

$\frac{a_3 + a_4}{a_4 + a_5} = \frac{1}{q} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, 故选 C.

点睛：该题应用题的条件可以求得等比数列的公比 q ，而待求量就是 $\frac{1}{q}$ ，代入即可得结果.

8、A

【解析】

算出集合 A 、 B 及 $A \cap B$ ，再求补集即可.

【详解】

由 $x^2 - 2x - 3 < 0$ ，得 $-1 < x < 3$ ，所以 $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ，又 $B = \{x | x \geq 1\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 3\}$ ，故 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查集合的交集、补集运算，考查学生的基本运算能力，是一道基础题.

9、A

【解析】

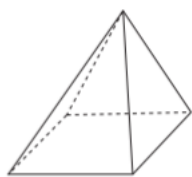
由三视图还原出原几何体，得出几何体的结构特征，然后计算体积.

【详解】

由三视图知原几何体是一个四棱锥，四棱锥底面是边长为2的正方形，高为2，

直观图如图所示， $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$.

故选：A.



【点睛】

本题考查三视图，考查棱锥的体积公式，掌握基本几何体的三视图是解题关键.

10、C

【解析】

根据双曲线的解析式及离心率，可求得 a, b, c 的值；得渐近线方程后，由点到直线距离公式即可求解.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

则 $a=2$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$, 解得 $c=\sqrt{7}$, 所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{7}, 0)$,

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7-4}=\sqrt{3}$,

则双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 即 $\sqrt{3}x\pm 2y=0$,

不妨取右焦点, 则由点到直线距离公式可得 $d=\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{7}|}{\sqrt{3+4}}=\sqrt{3}$,

故选: C.

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质及简单应用, 渐近线方程的求法, 点到直线距离公式的简单应用, 属于基础题.

11、D

【解析】

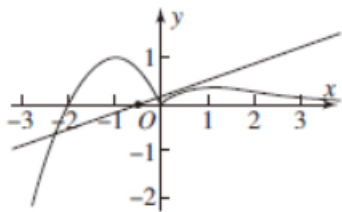
将函数的零点个数问题转化为函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 的交点的个数问题, 画出函数 $y=f(x)$ 的图象, 易知

直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 过定点 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 故与 $f(x)$ 在 $x<0$ 时的图象必有两个交点, 故只需与 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的图象有两个

交点, 再与切线问题相结合, 即可求解.

【详解】

由图知 $y=f(x)$ 与 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 有 4 个公共点即可,



即 $k\in(0, k_{\text{切}})$, 当设切点 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} k=\frac{1-x_0}{e^{x_0}} \\ k(x_0+\frac{1}{2})=\frac{x_0}{e^{x_0}} \end{cases}, \therefore \begin{cases} x_0=\frac{1}{2} \\ k=\frac{1}{2\sqrt{e}} \end{cases}$$

$$\therefore k\in(0, \frac{1}{2\sqrt{e}}).$$

故选: D.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/516145223044011044>