十年（2014－2023）年高考真题分项汇编—极坐标与参数方程

目录

题型一：极坐标与普通方程互化

1．（2023 年全国甲卷理科·第 22 题）已知点 $P(2,1)$，直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），α 为 l 的倾斜角，l 与 x 轴正半轴，y 轴正半轴分别交于 A，B 两点，且 $|PA|\cdot|PB|=4$．

(1) 求 α；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程．

【答案】(1) $\dfrac{3\pi}{4}$

(2) $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-3=0$

解析：(1) 因为 l 与 x 轴，y 轴正半轴交于 A,B 两点，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，

令 $x=0$，$t_1=-\dfrac{2}{\cos\alpha}$，令 $y=0$，$t_2=-\dfrac{1}{\sin\alpha}$，

所以 $|PA||PB|=|t_2t_1|=\left|\dfrac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|=\left|\dfrac{4}{\sin2\alpha}\right|=4$，所以 $\sin2\alpha=\pm1$，

即 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$．

(2) 由 (1) 可知，直线 l 的斜率为 $\tan\alpha=-1$，且过点 $(2,1)$，

所以直线 l 的普通方程为：$y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$，

由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-3=0$．

2．(2021 年高考全国甲卷理科 • 第 22 题) 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$．

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点．

【答案】(1) $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$；(2) P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），C 与 C_1 没有公共点．

解析：(1) 由曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 可得 $\rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta$，

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入可得 $x^2+y^2=2\sqrt{2}x$，即 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$，

即曲线 C 的直角坐标方程为 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$；

(2) 设 $P\left(x,y\right)$，设 $M\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$

$\because\ \overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，

$\therefore\left(x-1,y\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta-1,\sqrt{2}\sin\theta\right)=\left(2+2\cos\theta-\sqrt{2},2\sin\theta\right)$，

则 $\begin{cases}x-1=2+2\cos\theta-\sqrt{2}\\ y=2\sin\theta\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$，

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

$\because$ 曲线 C 的圆心为 $\left(\sqrt{2},0\right)$，半径为 $\sqrt{2}$，曲线 C_1 的圆心为 $\left(3-\sqrt{2},0\right)$，半径为 2，

则圆心距为 $3-2\sqrt{2}$，$\because 3-2\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$，$\therefore$ 两圆内含，

故曲线 C 与 C_1 没有公共点．

3．(2018 年高考数学课标卷Ⅰ(理) • 第 22 题) [选修 4−4：坐标系与参数方程] (10 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$．

(1) 求 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点，求 C_1 的方程．

【答案】解析：(1) 由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=4$．

(2) 由 (1) 知 C_2 是圆心为 $A(-1,0)$，半径为 2 的圆．

由题设知，C_1 是过点 $B(0,2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线．记 y 轴右边的射线为 l_1，y 轴左边的射线为 l_2．由于 B 在圆 C_2 的外面，故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点，或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点．

当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_1 所在直线的距离为 2，所以 $\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=-\dfrac{4}{3}$ 或 $k=0$．

经检验，当 $k=0$ 时，l_1 与 C_2 没有公共点；当 $k=-\dfrac{4}{3}$ 时，l_1 与 C_2 只有一个公共点，l_2 与 C_2 有两个公共点．

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_2 所在直线的距离为 2，所以 $\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$．

经检验，当 $k=0$ 时，l_1 与 C_2 没有公共点；当 $k=\dfrac{4}{3}$ 时，l_2 与 C_2 没有公共点．

综上，所求 C_1 的方程为 $y=-\dfrac{4}{3}|x|+2$．

4．(2015 高考数学江苏文理·第 23 题) 已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})-4=0$，求圆 C 的半径．

【答案】(C) $\sqrt{6}$

分析：先根据 $\rho^2=x^2+y^2,y=\rho\sin\theta,x=\rho\cos\theta$ 将圆 C 的极坐标方程化成直角坐标方程，再根据圆的标准方程得到其半径．

解析：以极坐标系的极点为平面直角坐标系的原点 O，以极轴为 x 轴的正半轴，建立直角坐标系 $x\mathrm{O}y$．

圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\sqrt{2}\rho\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)-4=0$，

化简，得 $\rho^2+2\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta-4=0$．

则圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x+2y-4=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=6$，所以圆 C 的半径为 $\sqrt{6}$．

题型二：极坐标方程的应用

1．(2022 年高考全国乙卷数学(理)·第 22 题) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$，($t$ 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为

$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$．

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

【答案】(1) $\sqrt{3}x+y+2m=0$

(2) $-\frac{19}{12}\le m\le\frac{5}{2}$

解析：【小问 1 详解】

因为 l： $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以 $\frac{1}{2}\rho\cdot\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\cdot\cos\theta+m=0$，

又因为 $\rho\cdot\sin\theta=y,\rho\cdot\cos\theta=x$，所以化简为 $\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得 l 的直角坐标方程： $\sqrt{3}x+y+2m=0$

【小问 2 详解】

联立 l 与 C 的方程，即将 $x=\sqrt{3}\cos 2t$， $y=2\sin t$ 代入

$\sqrt{3}x+y+2m=0$ 中，可得 $3\cos 2t+2\sin t+2m=0$，

所以 $3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为 $-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$ 有解，

令 $\sin t=a$， 则 $a\in[-1,1]$，令 $f(a)=6a^2-2a-3$， $(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为 $a=\frac{1}{6}$，开口向上，

所以 $f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{\min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

所以 $-\frac{19}{6}\le 2m\le 5$

m 的取值范围为 $-\frac{19}{12}\le m\le\frac{5}{2}$.

2.（2020 江苏高考·第 22 题）在极坐标系中，已知点 $A(\rho_1,\frac{\pi}{3})$ 在直线 $l:\rho\cos\theta=2$ 上，点 $B(\rho_2,\frac{\pi}{6})$ 在圆 $C:\rho=4\sin\theta$ 上（其中 $\rho\ge 0$， $0\le\theta<2\pi$）.

(1) 求 ρ_1， ρ_2 的值

(2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

【答案】(1) $\rho_1=4$，$\rho_2=2$ (2) $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$

【解析】(1) 以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，

$\because \rho_1\cos\frac{\pi}{3}=2,\therefore \rho_1=4$，因为点 B 为直线 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 上，故其直角坐标方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

又 $\rho=4\sin\theta$ 对应的圆的直角坐标方程为：$x^2+y^2-4y=0$，

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$，

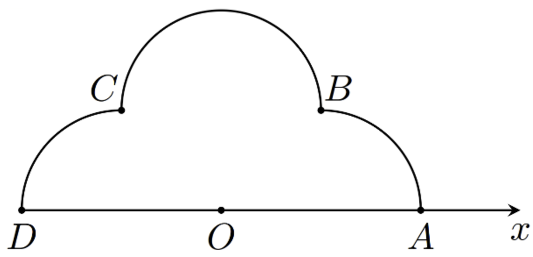
对应的点为 $(0,0),(\sqrt{3},1)$，故对应的极径为 $\rho_2=0$ 或 $\rho_2=2$.

(2) $\because \rho\cos\theta=2,\rho=4\sin\theta,\therefore 4\sin\theta\cos\theta=2,\therefore \sin 2\theta=1$，

$\because \theta\in[0,2\pi),\therefore \theta=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $\rho=2\sqrt{2}$；

当 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时 $\rho=-2\sqrt{2}<0$，舍；即所求交点坐标为当 $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，

3．(2019·全国III·理·第 22 题) 如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2,0)$，$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$，$C(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$，$D(2,\pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$，$(1,\frac{\pi}{2})$，$(1,\pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$，曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$，曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.



(1) 分别写出 M_1，M_2，M_3 的极坐标方程；

(2) 曲线 M 由 M_1，M_2，M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP|=\sqrt{3}$，求 P 的极坐标.

【答案】

(1) M_1：$\rho=2\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$，$M_2$：$\rho=2\sin\theta\ (\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$，

M_3：$\rho=-2\cos\theta\ (\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi)$；

(2) $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$

【官方解析】

(1) 由题设可得，$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的极坐标方程分别为

$\rho=2\cos\theta, \rho=2\sin\theta, \rho=-2\cos\theta$.

所以 M_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$，$M_2$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\ (\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$，

M_3 的极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta\ (\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

(2) 设 $P(\rho,\theta)$，由题设及 (1) 知

若 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$；

若 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，则 $2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{2\pi}{3}$；

若 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

综上 P 的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$.

【点评】此题考查了极坐标中过极点的圆的方程，思考量不高，运算量不大，属于中档题.

4．(2019・全国 II ・理・第 22 题) 在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P.

(1) 当 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程.

【答案】 (1) $\rho_0=2\sqrt{3}$，l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2$；(2) $\rho=4\cos\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

【官方解析】

(1) 因为 $M(\rho_0,\theta_0)$ 在 C 上，当 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ 时，$\rho_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得 $|OP|=|OA|\cos\frac{\pi}{3}=2$.

设 $Q(\rho,\theta)$ 为 l 上除 P 的任意一点.在 $Rt\triangle OPQ$ 中 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=|OP|=2$，

经检验，点 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$ 上.

所以，l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$.

(2) 设 $P(\rho,\theta)$，在 $Rt\triangle OAP$ 中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta$，即 $\rho=4\cos\theta$.

因为 P 在线段 OM 上，且 $AP \perp OM$，故 θ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以，P 点轨迹的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$，$\theta \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

【分析】(1) 先由题意，将 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 代入 $\rho = 4\sin\theta$ 即可求出 ρ_0；根据题意求出直线 l 的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可；

(2) 先由题意得到 P 点轨迹的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可，要注意变量的取值范围.

【解析】(1) 因为点 $M(\rho_0,\theta_0)$ $(\rho_0 > 0)$ 在曲线 $C: \rho = 4\sin\theta$ 上，

所以 $\rho_0 = 4\sin\theta_0 = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$；即 $M\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $k_{OM} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$，

因为直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，所以直线 l 的直角坐标方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，

即 $x+\sqrt{3}y-4=0$；因此，其极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta = 4$，即 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = 2$；

(2) 设 $P(x,y)$，则 $k_{OP} = \frac{y}{x}$，$k_{AP} = \frac{y}{x-4}$，由题意，$OP \perp AP$，所以 $k_{OP}\cdot k_{AP} = -1$，故 $\frac{y^2}{x^2-4x} = -1$，

整理得 $x^2+y^2-4x=0$，因为 P 在线段 OM 上，M 在 C 上运动，所以 $0 \leqslant x \leqslant 2$，$2 \leqslant y \leqslant 4$，

所以，P 点轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta = 0$，即 $\rho = 4\cos\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

【点评】本题主要考查极坐标方程与直角坐标方程的互化，熟记公式即可，属于常考题型.

5．(2019·江苏·第22题)在极坐标系中，已知两点 $A\left(3,\frac{\pi}{4}\right),B\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)$，直线$l$的方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3$.

(1)求 A,B 两点间的距离；(2)求点 B 到直线 l 的距离.

【答案】见解析

【解析】(1)设极点为 O.在 $\triangle OAB$ 中，$A(3,\frac{\pi}{4})$，$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，

由余弦定理，得$AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{5}$.

(2)因为直线l的方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=3$，

则直线l过点 $(3\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

又 $B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，所以点B到直线l的距离为 $(3\sqrt{2}-\sqrt{2})\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=2$.

6．(2018 年高考数学江苏卷·第 23 题)[选修 4—4：坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

在极坐标系中，直线 l 的方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$，求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

【答案】 直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

解析：因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，

所以曲线 C 的圆心为(2，0)，直径为 4 的圆.

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，

则直线 l 过 A(4，0)，倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 A 为直线 l 与圆 C 的一个交点.

设另一个交点为 B，则∠OAB= $\frac{\pi}{6}$.

连结 OB，因为 OA 为直径，从而∠OBA= $\frac{\pi}{2}$，

所以 $AB=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$.

因此，直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

7．(2015 高考数学新课标 2 理科·第 23 题)(本小题满分 10 分)选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数，$t\neq 0$)，其中 $0\le\alpha<\pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$，曲线 $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

(Ⅰ)．求 C_2 与 C_1 交点的直角坐标；

(Ⅱ)．若 C_2 与 C_1 相交于点 A，C_3 与 C_1 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

【答案】(Ⅰ) $(0,0)$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$；(Ⅱ) 4 .

解析：(Ⅰ)曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$，曲线 C_3 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0$. 联立 $\begin{cases}x^2+y^2-2y=0,\\ x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以 C_2 与 C_1 交点的直角坐标为 $(0,0)$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

(Ⅱ)曲线 C_1 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in R,\rho\neq 0)$，其中 $0\le\alpha<\pi$. 因此 A 得到极坐标为 $(2\sin\alpha,\alpha)$，

B 的极坐标为 $(2\sqrt{3}\cos\alpha,\alpha)$．所以 $|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|=4\left|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})\right|$，当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时，$|AB|$ 取得最大值，最大值为 4．

8．(2015 高考数学新课标 1 理科・第 23 题)(本小题满分 10 分)选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中。直线 $C_1: x=-2$，圆 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。

(Ⅰ)求 C_1，C_2 的极坐标方程；

(Ⅱ)若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$，设 C_2 与 C_3 的交点为 M，N，求 ΔC_2MN 的面积

【答案】(Ⅰ) $\rho\cos\theta=-2$，$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ (Ⅱ) $\frac{1}{2}$

分析：(Ⅰ)用直角坐标方程与极坐标互化公式即可求得 C_1，C_2 的极坐标方程；(Ⅱ)将将 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ 即可求出 $|MN|$，利用三角形面积公式即可求出 $\triangle C_2MN$ 的面积.

解析：(Ⅰ)因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=-2$，C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$．……5 分

(Ⅱ)将 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$，得 $\rho^2-3\sqrt{2}\rho+4=0$，解得 $\rho_1=2\sqrt{2}$，$\rho_2=\sqrt{2}$，

$|MN|=\rho_1-\rho_2=\sqrt{2}$，

因为 C_2 的半径为 1，则 $\triangle C_2MN$ 的面积 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}$．

9．(2017 年高考数学课标Ⅱ卷理科・第 22 题)[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$．

(1) M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$，点 B 在曲线 C_2 上，求 ΔOAB 面积的最大值.

【答案】【命题意图】坐标系与参数方程，求动点的轨迹方程，三角函数

【基本解法】(1)解法一：设 P 点在极坐标下坐标为 (ρ,θ)

由 $|OM|\cdot|OP|=16$ 可得 M 点的坐标为 $\left(\frac{16}{\rho},\theta\right)$，代入曲线 C_1 的极坐标方程，得：

$\frac{16}{\rho}\cos\theta=4$，即 $\rho=4\cos\theta$，两边同乘以 ρ，化成直角坐标方程为：

$x^2+y^2=4x$，由题意知 $\rho>0$，所以检验得 $x^2+y^2=4x(x\neq0)$．

解法二：设 P 点在直角坐标系下坐标为 (x,y)，曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x=4$，因为 O,P,M 三点

共线，所以 M 点的坐标为 $\left(4,\dfrac{4y}{x}\right)$，代入条件 $|OM|\cdot|OP|=16$ 得：

$\sqrt{16+\dfrac{16y^2}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=16$，因为 $x>0$，化简得：

$x^2+y^2=4x(x\neq 0)$．

(2) 解法一：由 (1) 知曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，故可设 B 点坐标为 $(4\cos\theta,\theta)$，

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cos\theta\cdot\left|\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\right|=\left|2\sqrt{3}\cos\theta^2-2\sin\theta\cos\theta\right|=\left|\sqrt{3}\cos 2\theta-\sin 2\theta+\sqrt{3}\right|$$

$$=\left|-2\sin(2\theta-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\right|$$

由 $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 得 $S_{\Delta OAB}\le 2+\sqrt{3}$，即最大值为 $2+\sqrt{3}$．

解法二：在直角坐标系中，A 点坐标为 $(1,\sqrt{3})$，直线 OA 的方程为 $\sqrt{3}x-y=0$．

设点 B 点坐标 (x,y)，则点 B 到直线 OA 的距离 $d=\dfrac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$

所以 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot d=\dfrac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$，又因为点 B 坐标满足方程 $(x-2)^2+y^2=4$，由柯西不等式得：

$\left[(x-2)^2+y^2\right]\left[\sqrt{3}^2+(-1)^2\right]\ge\left[\sqrt{3}(x-2)-y\right]^2$，即 $-4\le\sqrt{3}(x-2)-y\le 4$

即 $-4+2\sqrt{3}\le\sqrt{3}x-y\le 4+2\sqrt{3}$

由 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$ 得，$S_{\Delta OAB}\le 2+2\sqrt{3}$．

解法三：前面同解法二，

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot d=\dfrac{\left|\sqrt{3}x-y\right|}{2}$，又因为点 B 坐标满足方程 $(x-2)^2+y^2=4$，故可设

B 的坐标 $(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，即

$$S_{\Delta OAB}=\frac{\left|2\sqrt{3}\cos\alpha+2\sqrt{3}-2\sin\alpha\right|}{2}=\frac{\left|-4\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}\right|}{2}\le 2+\sqrt{3}.$$

题型三：参数方程与普通方程互化

1．(2020 年高考课标Ⅰ卷理科・第 22 题)在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$ (t 为参数)．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$．

(1) 当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

(2) 当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标．

【答案】(1) 曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆；(2) $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$．

【解析】(1) 当 $k=1$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ (t 为参数)，

两式平方相加得 $x^2+y^2=1$，

所以曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆；

(2) 当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$ (t 为参数)，

所以 $x\geq 0,y\geq 0$，曲线 C_1 的参数方程化为 $\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$ (t 为参数)，

两式相加得曲线 C_1 方程为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，

得 $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$，平方得 $y=x-2\sqrt{x}+1,0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$，

曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，

曲线 C_2 直角坐标方程为 $4x-16y+3=0$，

联立 C_1,C_2 方程 $\begin{cases}y=x-2\sqrt{x}+1\\ 4x-16y+3=0\end{cases}$，

整理得 $12x-32\sqrt{x}+13=0$，解得 $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{x}=\frac{13}{6}$ (舍去)，

$\therefore x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4}$，$\therefore C_1,C_2$ 公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$．

2．(2020 年高考课标Ⅱ卷理科・第 22 题)已知曲线 C_1，C_2 的参数方程分别为 C_1：$\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (ϑ 为参

数)，C_2：$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t}, \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$（$t$ 为参数）.

(1) 将 C_1，C_2 的参数方程化为普通方程；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．设 C_1，C_2的交点为 P，求圆心在极轴上，且经过极点和 P 的圆的极坐标方程．

【答案】(1) $C_1: x+y=4$；$C_2: x^2-y^2=4$；(2) $\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$．

解析：(1) 由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 得 C_1 的普通方程为：$x+y=4$；

由 $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2 \\ y^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2 \end{cases}$，两式作差可得 C_2 的普通方程为：$x^2-y^2=4$．

(2) 由 $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$ 得：$\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$，即 $P\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；

设所求圆圆心的直角坐标为 $(a,0)$，其中 $a>0$，

则 $\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(0-\dfrac{3}{2}\right)^2=a^2$，解得：$a=\dfrac{17}{10}$，$\therefore$ 所求圆的半径 $r=\dfrac{17}{10}$，

$\therefore$ 所求圆的直角坐标方程为：$\left(x-\dfrac{17}{10}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{17}{10}\right)^2$，即 $x^2+y^2=\dfrac{17}{5}x$，

$\therefore$ 所求圆的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$．

【点睛】本题考查极坐标与参数方程的综合应用问题，涉及到参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程等知识，属于常考题型．

3．(2016 高考数学江苏文理科·第 23 题) [选修 4-4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ $(t$ 为参数$)$，椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$ $(\theta$ 为参数$)$，设直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，求线段 AB 的长．

【答案】$\frac{16}{7}$；

【官方解答】椭圆 C 的普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

将直线 l 参数方程 $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ 代入 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，

得 $(1+\frac{1}{2}t)^2+\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2}{4}=1$，即 $7t^2+16t=0$，解得 $t_1=0,t_2=-\frac{16}{7}$.

所以 $AB=|t_1-t_2|=\frac{16}{7}$.

民间解答：

直线 l 方程化为普通方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

椭圆 C 方程化为普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，

联立得 $\begin{cases} \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{7} \end{cases}$，

因此 $AB=\sqrt{\left(1+\frac{1}{7}\right)^2+\left(0+\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{16}{7}$.

题型四：参数方程的应用

1.（2019·全国Ⅰ·理·第 22 题）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程；

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值．

【答案】解：(1) 因为 $-1<\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant 1$，且 $x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}=1$，

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x\neq -1)$． l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$．

(2) 由 (1) 可设 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C 上的点到 l 的距离为 $\dfrac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$．

当 $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11$ 取得最小值 7，故 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$．

2．（2018 年高考数学课标III卷（理）• 第 22 题）【选修 4—4：坐标系与参数方程】（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），过点 $\left(0,-\sqrt{2}\right)$，且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交 A,B 两点.

(1) 求 α 的取值范围；

(2) 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

【答案】【官方解析】(1) $\odot O$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，l 与 $\odot O$ 交于两点；

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan\alpha=k$，则 l 的方程为 $y=kx-\sqrt{2}$

l 与 $\odot O$ 交于两点当且仅当 $\dfrac{\left|\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}<1$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$，即 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 或 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

综上可知 α 的取值范围为 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

(2) l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=-\sqrt{2}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$）

设 A,B,P 对应的参数分别为 t_A,t_B,t_P，则 $t_P=\dfrac{t_A+t_B}{2}$，且 t_A，t_B 满足 $t^2-2\sqrt{2}t\sin\alpha+1=0$

于是 $t_A+t_B=2\sqrt{2}\sin\alpha$，$t_P=\sqrt{2}\sin\alpha$，又点 P 的坐标 (x,y) 满足

$$\begin{cases}x=t_P\cos\alpha\\ y=-\sqrt{2}+t_P\sin\alpha\end{cases}$$