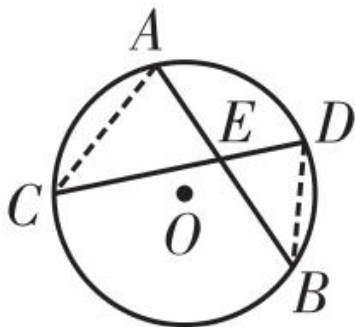


专题 06 圆中的重要模型--圆幂定理模型

圆幂定理是一个总结性的定理，是对相交弦定理、切割线定理、割线定理、弦切角定理、托勒密定理以及它们推论的统一与归纳。可能是在 19 世纪由德国数学家施泰纳（*Steiner*）或者法国数学家普朗克雷（*Poncelet*）提出的。圆幂定理的用法：可以利用圆幂定理求解与圆有关的线段比例、角度、面积等问题。

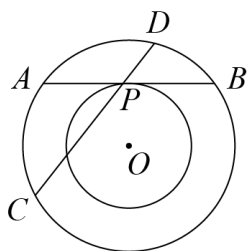
模型 1. 相交弦模型



条件：在圆 O 中，弦 AB 与弦 CD 交于点 E ，点 E 在圆 O 内。

结论： $\triangle CAE \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow EC \times ED = EB \times EA$ 。

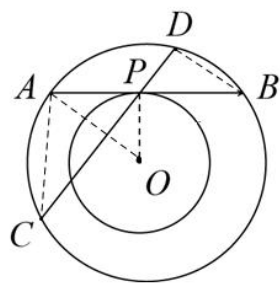
例 1.（2023·广东广州·九年级校考期中）如图，两个同心圆，大圆的弦 AB 与小圆相切于点 P ，大圆的弦 CD 经过点 P ，且 $CD = 13$ ， $PD = 4$ ，两圆组成的圆环的面积是_____。



【答案】 36π

【分析】连接 AC ， BD ， OP ， OA ，先根据切线的性质定理和垂径定理证出 $PA = PB$ ，再证明 $\triangle APC \sim \triangle DPB$ ，得到 $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$ ，代入数据求得 $AP = BP = 6$ ，最后根据圆环的面积公式进行计算即可求解。

【详解】解：如图，连接 AC ， BD ， OP ， OA ，



$\because$ 大圆的弦 AB 与小圆相切于点 P ， $\therefore OP \perp AB$ ， $\therefore PA = PB$ ， $OA^2 - OP^2 = AP^2$ ，

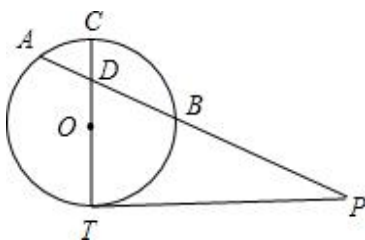
$\because CD = 13$ ， $PD = 4$ ， $\therefore PC = 13 - 4 = 9$ ， $\because \angle BAC = \angle BDC$ ， $\angle C = \angle B$ ， $\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ ，

$$\therefore \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}, \text{ 即 } \frac{AP}{4} = \frac{9}{BP}, \text{ 解得: } AP = BP = 6 \text{ (负值舍去),}$$

$\therefore$ 圆环的面积为: $\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OP^2 = \pi \cdot AP^2 = 36\pi$, 故答案为: 36π .

【点睛】此题综合运用了切线的性质定理、垂径定理、勾股定理、圆周角定理、圆环的面积公式, 分别求出大圆和小圆的半径是解题的关键.

例 2. (2023·江西景德镇·九年级校考期末) 如图, PT 是 $\odot O$ 的切线, T 为切点, PA 是割线, 交 $\odot O$ 于 A、B 两点, 与直径 CT 交于点 D. 已知 $CD=2$, $AD=3$, $BD=4$, 那 $PB=$ _____.

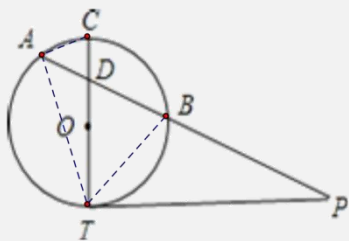


【答案】20.

【分析】连接 AC, BT, AT, 易证 $\triangle CAD \sim \triangle BTD$, 得到 $TD=6$, 易证: $\triangle BTP \sim \triangle TAP$, 得: $TP^2 = AP \cdot BP$, 设 $PB=x$, 则 $AP=x+7$, $TP^2 = (x+7) \cdot x$, $PD=x+4$, 根据勾股定理, 即可求解.

【详解】连接 AC, BT, AT, $\because \angle CAD = \angle BTD$, $\angle ADC = \angle TDB$, $\therefore \triangle CAD \sim \triangle BTD$,

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{TD}, \text{ 即: } \frac{2}{4} = \frac{3}{TD} \therefore TD=6, \because PT \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线, T 为切点, } \therefore \angle BTP + \angle BTD = 90^\circ,$$



$\because CT$ 是直径, $\therefore \angle CAD + \angle TAP = 90^\circ \because \angle CAD = \angle BTD$, $\therefore \angle BTP = \angle TAP$,

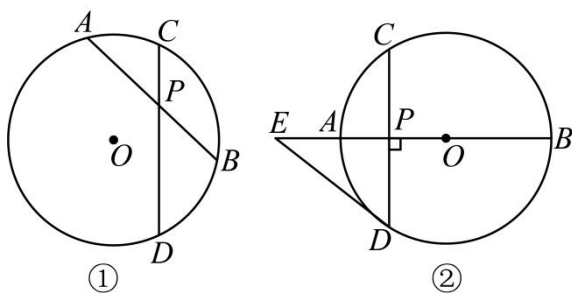
$$\because \angle P = \angle P, \therefore \triangle BTP \sim \triangle TAP, \therefore \frac{TP}{AP} = \frac{BP}{TP}, \text{ 即: } TP^2 = AP \cdot BP,$$

设 $PB=x$, 则 $AP=x+7$, $TP^2 = (x+7) \cdot x$, $PD=x+4$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle DPT$ 中, $DT^2 + PT^2 = PD^2$, $\therefore 6^2 + (x+7)x = (x+4)^2$, 解得: $x=20$, 故答案是: 20.

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定和性质定理与圆的性质的综合, 根据题意, 添加辅助线, 构造相似三角形, 是解题的关键.

例 3. (2023·江苏·九年级专题练习) 相交弦定理: 圆内的两条相交弦, 被交点分成的两条线段长的积相等.



(1)为了说明相交弦定理正确性,需要对其进行证明,如下给出了不完整的“已知”“求证”,请补充完整,并写出证明过程. 已知:如图①,弦 AB , CD 交于点 P , 求证: _____.

(2)如图②,已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, AB 与弦 CD 交于点 P , 且 $AB \perp CD$ 于点 P , 过 D 作 $\odot O$ 的切线, 交 BA 的延长线于 E , D 为切点, 若 $AP=2$, $\odot O$ 的半径为 5, 求 AE 的长.

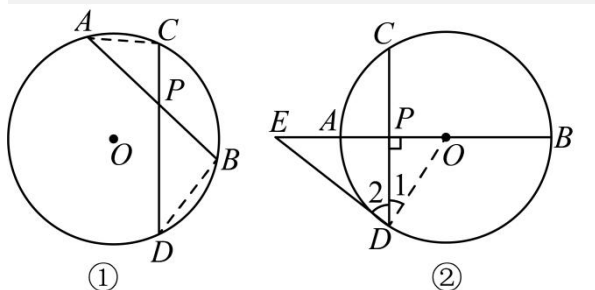
【答案】(1) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 证明见解析(2) $\frac{10}{3}$

【分析】(1) 先证明 $\triangle ACP \sim \triangle DBP$, 再利用相似的性质即可;

(2) 利用(1)可知 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 求出 PD , 再证明 $\triangle OPD \sim \triangle DPE$, 利用相似的性质求出 PE , 求差即可得到 AE 的长.

【详解】(1) 求证: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

证明: 连接 AC 、 BD . 如图①.



$\because \angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$. $\therefore \triangle ACP \sim \triangle DBP$. $\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$. $\therefore PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

(2) 解: $\because AP=2$, $OA=5$, $PB=10-2=8$. 由(1)可知 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. $\therefore PC \cdot PD=16$.

$\because AB \perp CD$, AB 是 $\odot O$ 的直径, $PC=PD$, $PD=4$.

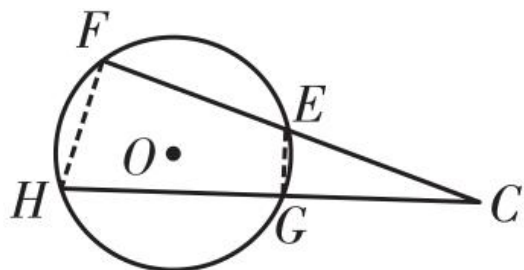
连接 OD . 如图②. $\because DE$ 为切线. $\therefore \angle EDO = 90^\circ$.

$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$. $\angle E + \angle 2 = 90^\circ$. $\therefore \angle 1 = \angle E$. $\therefore \triangle OPD \sim \triangle DPE$.

$\therefore \frac{OP}{PD} = \frac{PD}{PE}$, $\therefore OP \cdot PE = PD \cdot PD$. $\therefore 16 = 3PE$, $PE = \frac{16}{3}$. 又 $\because AP=2$. $\therefore AE = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

【点睛】 本题考查了圆的相关性质, 三角形相似的判定与性质, 严格的逻辑思维和严密的书写过程是解题的关键.

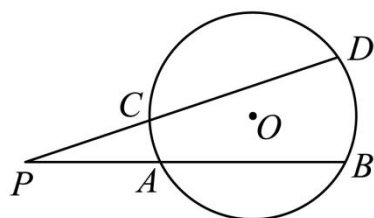
模型 2. 双割线模型



条件：如图，割线 CH 与弦 CF 交圆 O 于点 E 和点 G 。

结论： $\triangle CEG \sim \triangle CHF$ $\therefore \frac{EC}{CH} = \frac{CG}{CF}$ $\therefore EC \cdot CF = GC \cdot HC$

例 1. (2023·浙江·九年级假期作业) 如图： PAB 、 PCD 为 $\odot O$ 的两条割线，若 $PA \cdot PB = 30$ ， $PC = 3$ ，则 CD 的长为 ()



A. 10

B. 7

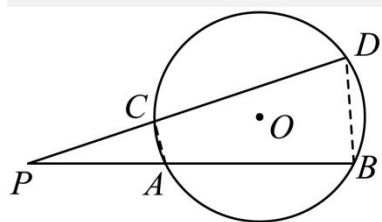
C. $5\sqrt{10}$

D. 3

【答案】B

【分析】如图，连接 AC ， BD ，可证 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ ，可得 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ，从而可求得 PD 的长，进而可得到 CD 的长。

【详解】解：如图，连接 AC ， BD ，



$\because \angle PAC + \angle BAC = 180^\circ$ ， $\angle BAC + \angle D = 180^\circ \therefore \angle PAC = \angle D$

又 $\angle P = \angle P \therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB \therefore \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$

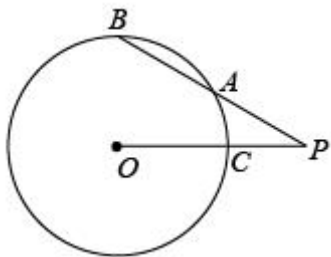
$\because PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ， $PA \cdot PB = 30$ ， $PC = 3$ ， $\therefore PD = \frac{PA \cdot PB}{PC} = 10$ ，

$\therefore CD = 10 - 3 = 7$ ．故选：B．

【点睛】本题考查了圆的内接四边形性质，相似三角形的判定和性质，由相似三角形得到线段间数量关系

是解题的关键.

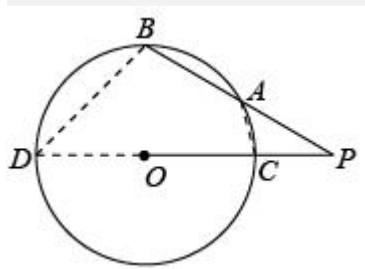
例 2. (2023·四川成都·九年级校考阶段练习) 如图, PAB 为 $\odot O$ 的割线, 且 $PA = AB = 3$, PO 交 $\odot O$ 于点 C , 若 $PC = 2$, 则 $\odot O$ 的半径的长为_____.



【答案】 $\frac{7}{2}$

【分析】 延长 PO 交圆于点 D , 连接 AC 、 BD , 由圆内接四边形内对角互补性质可得 $\angle B + \angle ACD = 180^\circ$, 结合邻补角互补可得 $\angle ACP = \angle B$, 继而证明 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$, 由相似三角形对应边成比例解得 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 由此计算 $PD = 9$, 最后根据线段的和差解题即可.

【详解】 如图, 延长 PO 交圆于点 D , 连接 AC 、 BD ,



四边形 $ABDC$ 为圆内接四边形, $\therefore \angle B + \angle ACD = 180^\circ$.

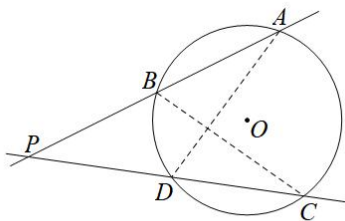
$\because \angle ACD + \angle ACP = 180^\circ$, $\therefore \angle ACP = \angle B$, $\because \angle P = \angle P$, $\therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB$,

$\therefore \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, $\therefore PD \times 2 = 3 \times 6$, $PD = 9$,

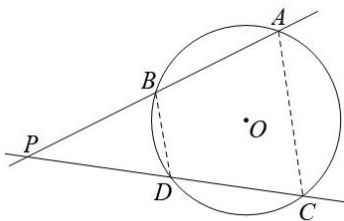
$\because CD + PC = PD$, $\therefore CD = 9 - 2 = 7$, $\therefore$ 半径为 $\frac{7}{2}$, 故答案为: $\frac{7}{2}$.

【点睛】 本题考查圆的内接四边形、相似三角形的判定与性质等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

例 3. (2022·河南洛阳·统考一模) 我们知道, 直线与圆有三种位置关系: 相交、相切、相离. 当直线与圆有两个公共点 (即直线与圆相交) 时, 这条直线就叫做圆的割线. 割线也有一些相关的定理. 比如, 割线定理: 从圆外一点引圆的两条割线, 这一点到每条割线与圆交点的距离的积相等. 下面给出了不完整的定理“证明一”, 请补充完整.



图①



图②

已知：如图①，过 $\odot O$ 外一点 P 作 $\odot O$ 的两条割线，一条交 $\odot O$ 于 A 、 B 点，另一条交 $\odot O$ 于 C 、 D 点.

求证： $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

证明一：连接 AD 、 BC ,

$\because \angle A$ 和 $\angle C$ 为 $\widehat{BD}$ 所对的圆周角， $\therefore$ _____.

又 $\because \angle P = \angle P$ ， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____.

即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

研究后发现，如图②，如果连接 AC 、 BD ，即可得到学习过的圆内接四边形 $ABDC$. 那么或许割线定理也可以用圆内接四边形的性质来证明. 请根据提示，独立完成证明二.

证明二：连接 AC 、 BD ,

【答案】证明一： $\angle A = \angle C$ ， $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ ， $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$ ；证明二见解析

【分析】(1) 证明 $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ 即可得到结论；

(2) 根据圆内接四边形的性质可得 $\angle PBD = \angle ACD$ ，进一步证明 $\triangle ACP \sim \triangle DBP$

【详解】解：证明一：连接 AD 、 BC ，

$\because \angle A$ 和 $\angle C$ 为 $\widehat{BD}$ 所对的圆周角， $\therefore \angle A = \angle C$.

又 $\because \angle P = \angle P$ ， $\therefore \triangle ADP \sim \triangle CBP$ ， $\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$. 即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

故答案为： $\angle A = \angle C$ ， $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ ， $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$ ，

证明二：连接 AC 、 BD ，

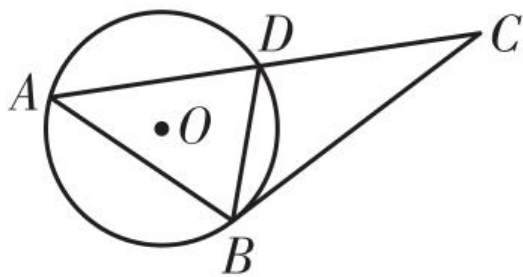
$\because$ 四边形 $ABDC$ 为圆内接四边形， $\therefore \angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$ ，

又 $\because \angle ABD + \angle PBD = 180^\circ$ ， $\therefore \angle PBD = \angle ACD$ ，

又 $\because \angle P = \angle P$ ， $\therefore \triangle ACP \sim \triangle DBP$ ， $\therefore \frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$ ，即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定方法是解题关键.

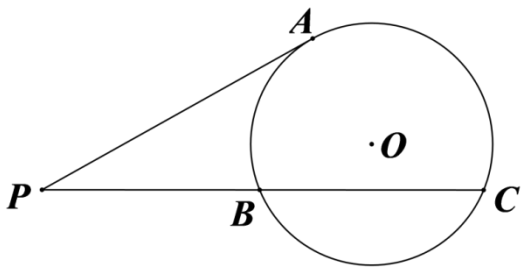
模型 3. 切割线模型



条件：如图， CB 是圆 O 的切线， CA 是圆 O 的割线。

结论： $\triangle CBD \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow CB^2 = CD \times CA$

例 1.（2023·江苏盐城·九年级统考期中）如图， PA 与 $\odot O$ 切于点 A ， PBC 是 $\odot O$ 的割线，如果 $PB = BC = 2$ ，那么 PA 的长为_____。



【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】根据切割线定理得出 $PA^2 = PB \cdot PC$ ，再代入数据进行计算即可。

【详解】解：∵ PA 为 $\odot O$ 的切线， A 为切点， PBC 是 $\odot O$ 的割线，∴ $PA^2 = PB \cdot PC$ ，

∵ $PB = BC = 2$ ，∴ $PC = 4$ ，∴ $PA^2 = 4 \times 2$ ，∴ $PA = 2\sqrt{2}$ 故答案为 $2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查了切割线定理，解题的关键是运用切割线定理列方程求解。

例 2.（2023·河南郑州·一模）复习巩固，切线：直线和圆只有一个公共点，这时这条直线和圆相切，我们把这条直线叫做圆的切线，这个点叫做切点。

割线：直线和圆有两个公共点，这时这条直线和圆相交，我们把这条直线叫做圆的割线。

切线长：过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的切线长。

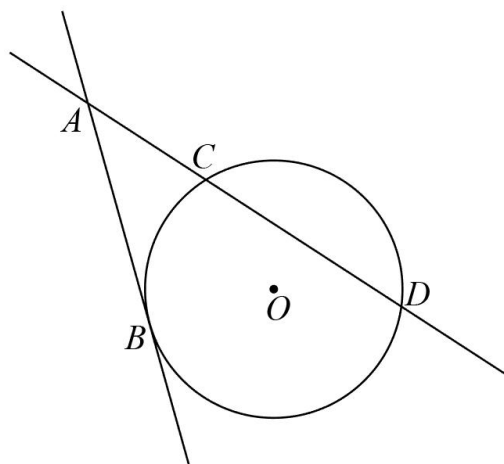
阅读材料：《几何原本》是古希腊数学家欧几里得所著的一部数学著作。它是欧洲数学的基础，总结了平面几何五大公设，被广泛地认为是历史上学习数学几何部分最成功的教科书。其中第三卷命题 36 - 2 圆幂定理（切割线定理）内容如下：

切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项。

为了说明材料中定理的正确性，需要对其进行证明，下面已经写了不完整的“已知”和“求证”，请补充完整，并写出证明过程。

已知：如图， A 是 $\odot O$ 外一点，_____.

求证：_____.



【答案】 AB 是 $\odot O$ 的切线，直线 ACD 为 $\odot O$ 的割线， $AB^2 = AC \cdot AD$ ，见解析

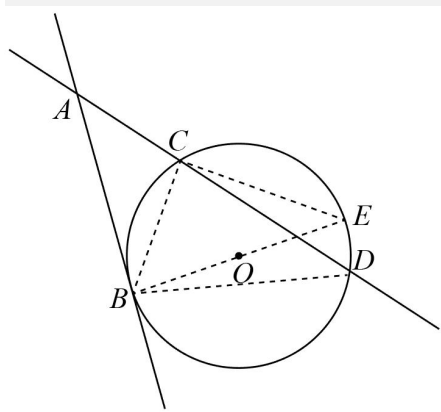
【分析】按照题设要求，写出“已知”和“求证”，然后证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ ，即可求解.

【详解】解：（已知：如图， A 是 $\odot O$ 外一点，） AB 是 $\odot O$ 的切线，直线 ACD 为 $\odot O$ 的割线.

求证： $AB^2 = AC \cdot AD$.

故答案为： AB 是 $\odot O$ 的切线，直线 ACD 为 $\odot O$ 的割线， $AB^2 = AC \cdot AD$,

证明：连接 BD ，连接 BO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ，连接 CE ，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线， $\therefore \angle ABC + \angle CBE = 90^\circ$,

$\because BE$ 是圆的直径， $\therefore \angle BCE = 90^\circ = \angle E + \angle CBE$,

$\therefore \angle ABC = \angle E$ ，而 $\angle E = \angle CDB$ ， $\therefore \angle ABC = \angle BDC$,

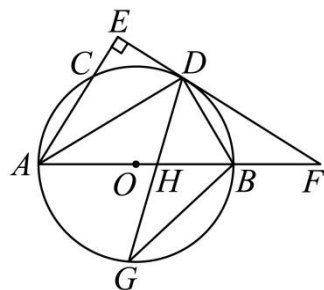
$\because \angle BAC = \angle DAB$ ， $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB$,

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ ， $\therefore AB^2 = AC \cdot AD$.

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，相似三角形的判定及性质，作出辅助线是解决本题的关键.

例 3. (2023·山东潍坊·统考一模) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 、 D 在 $\odot O$ 上, 且 AD 平分 $\angle CAB$, 过点 D 作 AC 的垂线, 与 AC 的延长线相交于 E , 与 AB 的延长线相交于点 F , G 为 AB 的下半圆弧的中点, DG 交 AB 于 H , 连接 DB 、 GB (1) 证明: EF 是 $\odot O$ 的切线; (2) 若圆的半径 $r=3$, $BH=2$, 求 GH 的长; (3) 求证:

$$DF^2 = AF \cdot BF.$$



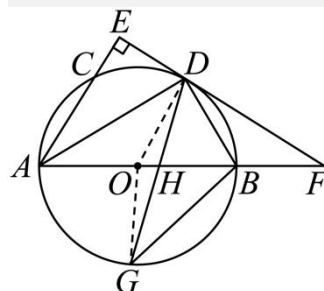
【答案】(1) 见解析 (2) $GH = \sqrt{10}$ (3) 见解析

【分析】(1) 连接 OD , 证明 $OD \perp EF$ 即可由切线的判定定理得出结论;

(2) 连接 OG , 因为 G 是半圆弧中点, 所以 $\angle BOG = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle OGH$ 中, 根据勾股定理求解即可;

(3) 证明 $\triangle FBD \sim \triangle FDA$, 得 $\frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FD}$, 即可得出结论.

【详解】(1) 连接 OD ,



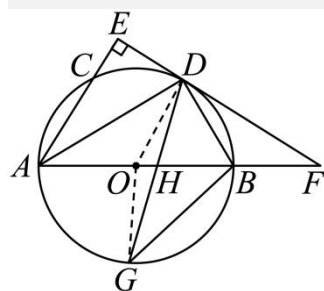
$$\because OA = OD, \therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\text{又} \because AD \text{ 平分 } \angle BAC, \therefore \angle OAD = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle CAD, \therefore OD \parallel AE,$$

$$\text{又} \because EF \perp AE, \therefore OD \perp EF, \therefore EF \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

(2) 连接 OG ,



$$\because G \text{ 是半圆弧中点}, \therefore \angle BOG = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OGH$ 中, $OG=3$, $OH=OB-BH=3-2=1$.

$$\therefore GH = \sqrt{OH^2 + OG^2} = \sqrt{10}.$$

(3) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore \angle DAB + \angle OBD = 90^\circ$,

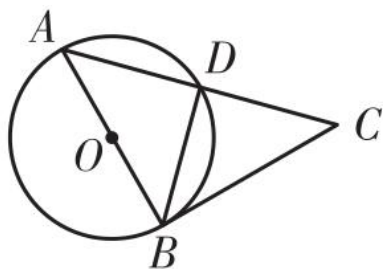
由 (1) 得, EF 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle ODF = 90^\circ$, $\therefore \angle BDF + \angle ODB = 90^\circ$,

$\therefore OD = OB$, $\therefore \angle ODB = \angle OBD$, $\therefore \angle DAB = \angle BDF$,

又 $\angle F = \angle F$, $\therefore \triangle FBD \sim \triangle FDA$, $\therefore \frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FD}$, $\therefore DF^2 = AF \cdot BF$.

【点睛】本题考查切线的判定和性质, 圆周角定理及其推论, 勾股定理, 相似三角形的判定与性质, 解题关键是熟练掌握相关性质与判定定理.

模型 4. 弦切角模型



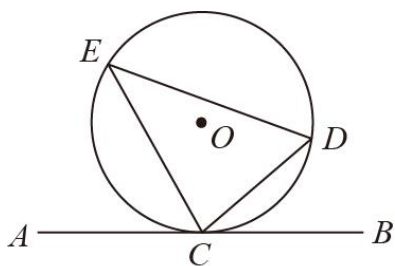
条件: 如图, CB 是圆 O 的切线, AB 是圆 O 的直径。

结论: 1) $\triangle CBD \sim \triangle CAB$ $\therefore \frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CB}$ $\therefore CB^2 = CD \cdot CA$;

2) $\triangle CBD \sim \triangle BAD$ $\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD}$ $\therefore BD^2 = AD \cdot CD$;

3) $\triangle BAD \sim \triangle CAB$ $\therefore \frac{BA}{CA} = \frac{DA}{BA}$ $\therefore BA^2 = AD \cdot AC$ 。

例 1. (2023·河南三门峡·统考二模) 小锐同学是一个数学学习爱好者, 他在一本数学课外读物上看到一个课本上没有的与圆相关的角---弦切角 (弦切角的定义: 把顶点在圆上, 一边与圆相切, 另一边和圆相交的角叫做弦切角), 并尝试用所学的知识研究弦切角的有关性质。



(1) 如图, 直线 AB 与 $\odot O$ 相切于 C 点, D, E 为 $\odot O$ 上不同于 C 的两点, 连接 CE, DE, CD . 请你写

出图中的两个弦切角_____；（不添加新的字母和线段）

（2）小锐目测 $\angle DCB$ 和 $\angle DEC$ 可能相等，并通过测量的方法验证了他的结论，你能帮小锐用几何推理的方法证明结论的正确性吗？

已知：如图，直线 AB 与 $\odot O$ 相切于 C 点， D ， E 为圆上不同于 C 的两点，连接 CE ， DE ， CD 。

求证： $\angle DCB = \angle DEC$ 。

（3）如果我们把上述结论称为弦切角定理，请你用一句话概括弦切角定理_____。

【答案】（1） $\angle DCB$ ， $\angle ECB$ ， $\angle DCA$ ， $\angle ECA$ （任意写出两个即可）；（2）见解析；（3）弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角

【分析】（1）根据弦切角的定义加以识别即可；

（2）过点 C 作直径 CF ，连接 DF ，借助于同弧所对的圆周角相等，将 $\angle DEC$ 转化为 $\angle F$ ，所以只需证 $\angle DCB = \angle F$ 即可。

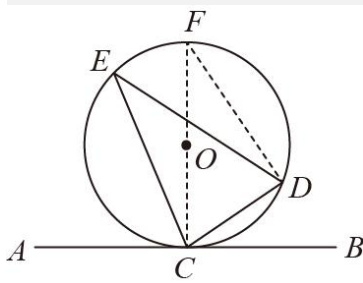
（3）由题意可归纳：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。

【详解】解：（1）弦 CD 、 CE 分别与切线 CB 构成的弦切角为： $\angle DCB$ ， $\angle ECB$ ；

弦 CD 、 CE 分别与切线 CA 构成的弦切角为： $\angle DCA$ ， $\angle ECA$ 。

故答案为： $\angle DCB$ ， $\angle ECB$ ， $\angle DCA$ ， $\angle ECA$ （任意写 2 个即可）

（2）证明：过 C 作直径 CF ，连接 DF 。



$\because CF$ 是 $\odot O$ 直径， $\therefore \angle FDC = 90^\circ$ 。 $\therefore \angle F + \angle FCD = 90^\circ$ 。

又 $\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 C ， $\therefore FC \perp AB$ 。

$\therefore \angle FCD + \angle DCB = 90^\circ$ 。 $\therefore \angle DCB = \angle F$ 。

$\because \widehat{CD} = \widehat{CD}$ ， $\therefore \angle F = \angle CED$ 。 $\therefore \angle DCB = \angle CED$ 。

（3）弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。

【点睛】本题考查了圆的切线的性质、圆周角定理及推论、直角三角形的两锐角互余等知识点，熟知上述图形的相关性质是解题的基础，对新定义的理解及问题的概括能力是关键。

例 2.（2022·山西大同·九年级校联考期中）阅读与思考

阅读下面内容并完成任务：

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做弦切角。

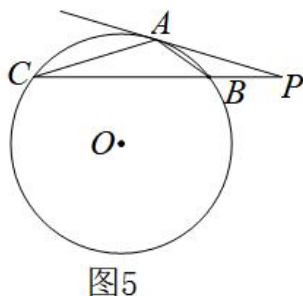
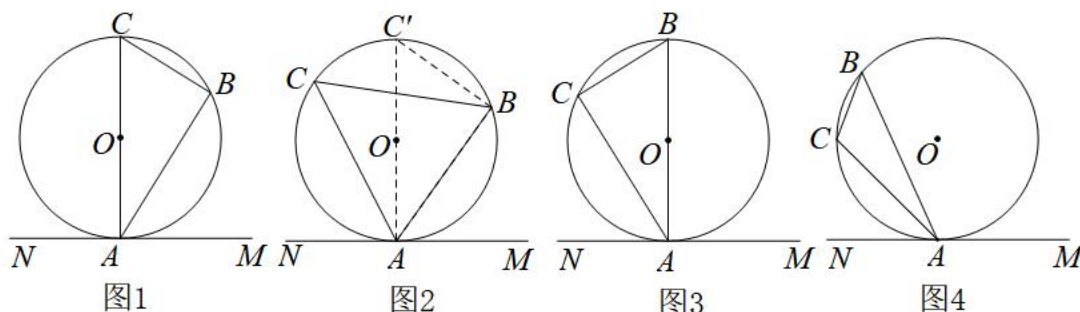
弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。

如图 1，直线 NM 与 $\odot O$ 相切于点 A ， AB 为 $\odot O$ 的弦， $\angle BAM$ 叫弦切角， $\widehat{AB}$ 叫做弦切角 $\angle BAM$ 所夹的弧， $\angle C$ 是 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角， AC 为直径时，很容易证明 $\angle BAM = \angle C$ 。

小华同学认为这是一种特殊情况，若 AC 不是直径会如何呢？即在图 2 中 $\angle BAM = \angle C$ 吗？她连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 C' ，连接 $C'B$...问题得到了解决。

小颖同学利用图 3 证明了当弦切角 $\angle BAM$ 为直角时，弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角。

小亮积极思考，提出当弦切角 $\angle BAM$ 为钝角时，能证明 $\angle BAM = \angle C$ （如图 4）吗？



任务：(1)请按照小华的思路，利用图 2 证明 $\angle BAM = \angle C$ ；

(2)结合小华、小颖的思路或结论，利用图 4 解答小亮提出的问题；

(3)写出在上面解决问题的过程中体现的数学思想：_____（写出两种）；

(4)解决问题：如图 5，点 P 为 $\odot O$ 的弦 CB 延长线上一点， PA 切 $\odot O$ 于点 A ，连接 AB ， AC ， $\angle P = 19^\circ$ ， $\angle ABP = 140^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____°。

【答案】(1)见解析(2)见解析(3)转化思想和类比思想(4) 21

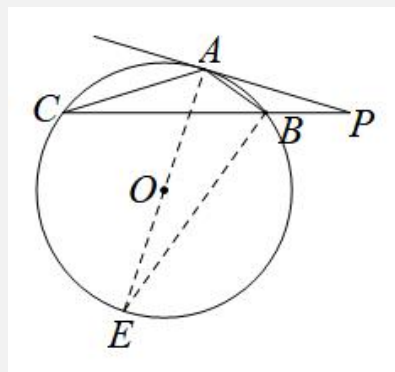
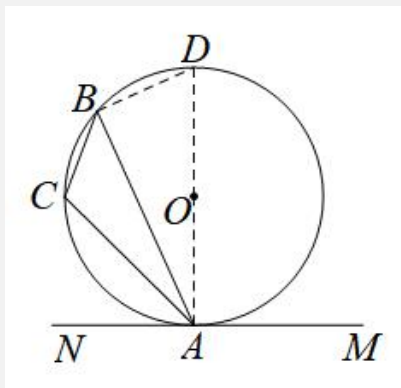
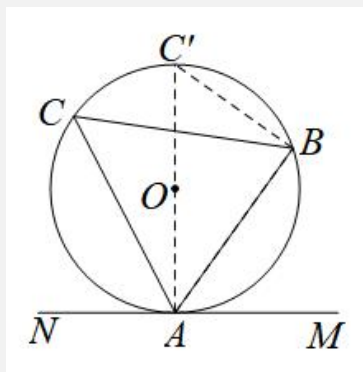
【分析】(1) 连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 C' ，连接 $C'B$ ，则 $\angle C' = \angle C$ ，根据 AC' 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\angle C' + \angle C'AB = 90^\circ$ ，再根据切线的性质可得 $\angle C'AB + \angle BAM = \angle C'AM = 90^\circ$ ，即可；

(2) 连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 D ，连接 DB ，根据 AD 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\angle D + \angle DAB = 90^\circ$ ，再根据

切线的性质可得 $\angle DAB + \angle BAN = \angle DAN = 90^\circ$ ，从而得到 $\angle BAN = \angle D$ ，再由圆内接四边形的性质，可得 $\angle C + \angle D = 180^\circ$ ，即可；（3）上面解决问题的过程中体现的数学思想为：转化思想和类比思想；

（4）接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EB ，则 $\angle C = \angle E$ ，证明 $\angle BAP = \angle C$ ，即可。

【详解】（1）证明：连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 C' ，连接 $C'B$ ，则 $\angle C' = \angle C$ ，



$\because AC'$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ABC' = 90^\circ$ ， $\therefore \angle C' + \angle C'AB = 90^\circ$ ，

$\because$ 直线 NM 与 $\odot O$ 相切于点 A ， $\therefore C'A \perp MN$ ， $\therefore \angle C'AB + \angle BAM = \angle C'AM = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAM = \angle C'$ ， $\therefore \angle BAM = \angle C$ ；

（2）证明：连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 D ，连接 DB ，

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ABD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle D + \angle DAB = 90^\circ$ ，

$\because$ 直线 NM 与 $\odot O$ 相切于点 A ， $\therefore DA \perp MN$ ， $\therefore \angle DAB + \angle BAN = \angle DAN = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BAN = \angle D$ ，

$\because$ 四边形 $ACBD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$ ，

$\because \angle BAN + \angle BAM = 180^\circ$ ， $\therefore \angle BAM = \angle C$ ；

（3）解：上面解决问题的过程中体现的数学思想为：转化思想和类比思想；

故答案为：思想转化思想和类比思想

（4）解：如图，接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EB ，则 $\angle C = \angle E$ ，

$\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ABE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle E + \angle EAB = 90^\circ$ ，

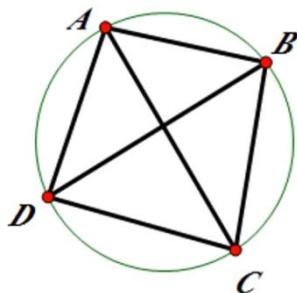
$\because$ 直线 AP 与 $\odot O$ 相切于点 A ， $\therefore EA \perp AP$ ， $\therefore \angle EAB + \angle BAP = \angle EAP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAP = \angle E$ ， $\therefore \angle BAP = \angle C$ ， $\because \angle P = 19^\circ$ ， $\angle ABP = 140^\circ$ ，

$\therefore \angle C = \angle BAP = 21^\circ$ ．故答案为：21．

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，切线的性质，圆内接四边形的性质，熟练掌握圆周角定理，切线的性质，圆内接四边形的性质是解题的关键。

模型 5.托勒密定理模型



条件：如图， AB 、 CD 是圆 O 的两条弦； **结论：** $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$

例 1.（2022 春·广东九年级课时练习）阅读与应用

请阅读下列材料，完成相应的任务：

托勒密是“地心说”的集大成者，著名的天文学家、地理学家、占星学家和光学家。后人从托勒密的书中发现一个命题：圆内接四边形对边乘积的和等于对角线的乘积。下面是对这个命题的证明过程。



如图 1，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ 。

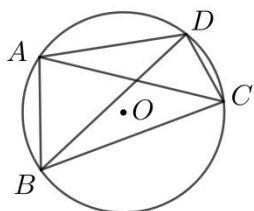


图1

求证： $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 。

证明：如图 2，作 $\angle BAE = \angle CAD$ 交 BD 于点 E 。

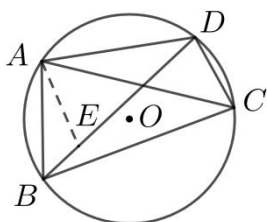


图2

$\because \widehat{AD} = \widehat{AD}, \therefore \angle ABE = \angle ACD$.（依据）

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD. \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}. AB \cdot DC = AC \cdot BE.$$

...

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED.$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}. \therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED.$$

$$\therefore AB \cdot DC = AC \cdot BE,$$

$$\therefore AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC (BE + ED) = AC \cdot BD.$$

$$\therefore AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

任务：(1)证明过程中的“依据”是_____；(2)补全证明过程；

(3)如图 3， $\odot O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 的边长都为 2，求对角线 BD 的长.

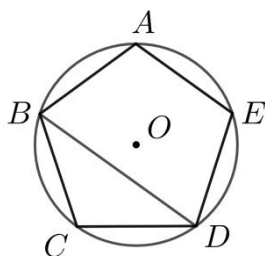


图3

【答案】(1)同弧所对的圆周角相等；(2)见解析；(3) $\sqrt{5}+1$ ；

【分析】(1) 根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle ABE = \angle ACD$ ；

(2) 由 $\angle BAE = \angle CAD$ 可得 $\angle BAC = \angle EAD$ ，再由 $\angle ACB = \angle ADE$ 可得 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ；

(3) 连接 AD ， BE ，由 $AB = BC = CD = DE = EA = 2$ 可得 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{BA}$ ，进而 $\widehat{BE} = \widehat{AD} = \widehat{BD}$ ， $BE = AD = BD$ ，再由 $AB \cdot DE + AE \cdot BD = BE \cdot AD$ 解方程即可；

【详解】(1) 解： $\because$ 同弧所对的圆周角相等， $\widehat{AD} = \widehat{AD}$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$ ；故答案为：同弧所对的圆周角相等；

(2) 解： $\because \angle BAE = \angle CAD$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle CAD + \angle EAC$ ， $\therefore \angle BAC = \angle EAD$ ，

$\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$ ， $\therefore \angle ACB = \angle ADE$ ；

(3) 解：如图，连接 AD ， BE ，

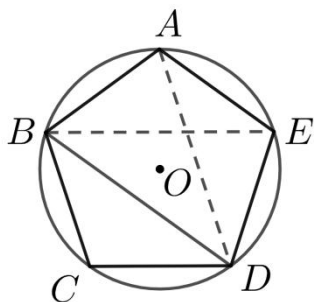
$\because AB = BC = CD = DE = EA = 2$ ， $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{BA}$ ，

$\therefore \widehat{AB} + \widehat{AE} = \widehat{AE} + \widehat{ED} = \widehat{CD} + \widehat{CB}$ ， $\therefore \widehat{BE} = \widehat{AD} = \widehat{BD}$ ， $\therefore BE = AD = BD$ ，

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\therefore AB \cdot DE + AE \cdot BD = BE \cdot AD$ ，

$\because AB = DE = EA = 2, \therefore 2 \times 2 + 2BD = BD^2,$

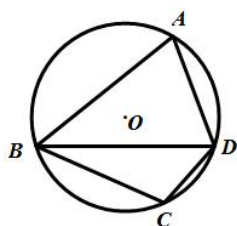
解得: $BD = \sqrt{5} + 1$ 或 $BD = 1 - \sqrt{5}$ (舍去), $\therefore$ 对角线 BD 的长为 $\sqrt{5} + 1$;



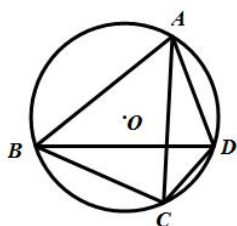
【点睛】本题考查了圆内接多边形，圆心角、弧、弦关系，相似三角形的判定和性质，一元二次方程等知识；掌握在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等是解题关键。

例 2. (2023·江苏盐城·九年级统考期中) 【旧知再现】圆内接四边形的对角_.

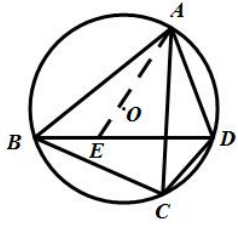
如图①，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，若 $AB = BD, \angle ABD = 40^\circ$ ，则 $\angle BCD = \underline{\quad}^\circ$.



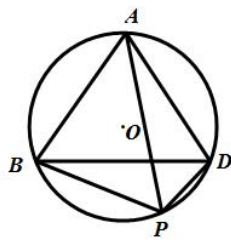
图①



图②



图③



图④

【问题创新】圆内接四边形的边会有特殊性质吗？

如图②，某数学兴趣小组进行深入研究发现: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

证明: 如图③，作 $\angle BAE = \angle CAD$ ，交 BD 于点 E .

$\because \angle BAE = \angle CAD, \angle ABD = \angle ACD, \therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD,$

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$ 即 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ (请按他们的思路继续完成证明)

【应用迁移】如图④，已知等边 $\triangle ABC$ 外接圆 $\odot O$ ，点 P 为 $\widehat{BC}$ 上一点，且 $PB = \sqrt{3}, PC = 1$ ，求 PA 的长.

【答案】【旧知再现】互补， 110 ; 【问题创新】见解析; 【应用迁移】 $PA = \sqrt{3} + 1$

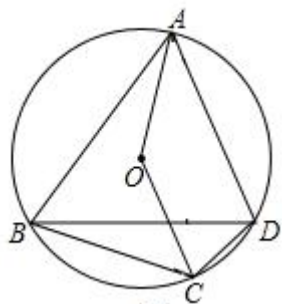
【分析】【重温旧知】根据圆周角定理，得出 $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ ， $\angle ADC = \frac{1}{2}$ 优角 $\angle AOC$ ，化简得出

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，利用等腰三角形的两个底角相等和圆内接四边形对角互补，即可得 $\angle BCD = 110^\circ$;

【提出问题】所得等式两边加上 $AD \cdot BC$ ，右边变形后即可得证;

【应用迁移】由上题的结论，根据 $\triangle ABC$ 为等边三角形，可得 $AB = AC = BC$ ，代入化简即可求出 PA 的长.

【详解】(1) 如图示：



连接 OA , OC , 根据圆周角定理,

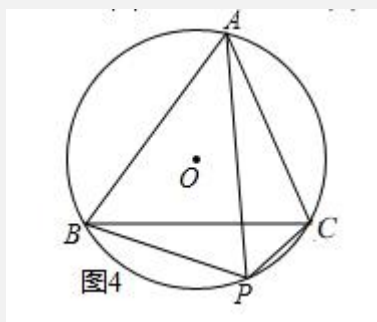
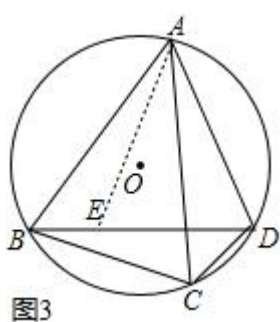
则有: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle ADC = \frac{1}{2}$ 优角 $\angle AOC$

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}$ 优角 $\angle AOC = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$ $\therefore$ 圆内接四边形的对角互补;

$\because AB = BD$, $\angle ABD = 40^\circ$, $\therefore$ 在等腰三角形 ABD 中, $\angle BAD = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

(2) 证明: 如图,



$\because \angle BAE = \angle CAD \therefore \angle BAE + \angle CAE = \angle CAD + \angle CAE$, 即 $\angle BAC = \angle DAE$,

又 $\because \angle ACB = \angle ADB$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED \therefore \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD}$, 即 $AD \cdot BC = AC \cdot DE$

$\therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot DE$, $\therefore AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$,

(3) 由 (2) 可知 $PB \cdot AC + PC \cdot AB = PA \cdot BC$

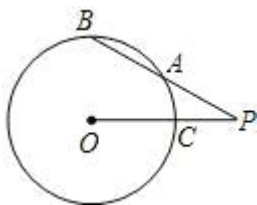
$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = AC = BC$,

$\therefore (PB + PC) \cdot BC = PA \cdot BC$, $\therefore PB + PC = PA$ 即 $PA = \sqrt{3} + 1$.

【点睛】此题属于圆的综合题, 涉及的知识有: 圆内接四边形的性质, 等边三角形的性质, 相似三角形的判定与性质, 熟练掌握圆内接四边形的性质是解本题的关键.

课后专项训练

1. (2023·北京·九年级校考期中) 如图, 点 P 是 $\odot O$ 外一点, PAB 为 $\odot O$ 的一条割线, 且 $PA=AB$, PO 交 $\odot O$ 于点 C , 若 $OC=3$, $OP=5$, 则 AB 长为 ()

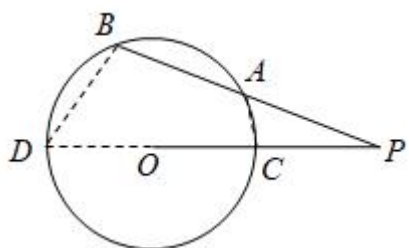


- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】设 $PA=AB=x$, 延长 PO 交圆于点 D . 证明 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ 得 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 即可求得 PA 的长, 也就得到了 AB 的长.

【详解】解: 设 $PA=AB=x$, 延长 PO 交圆于点 D . 连接 BD , AC



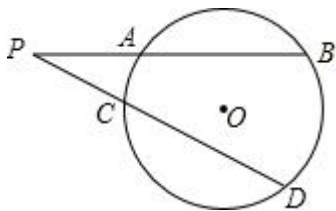
$\because$ 四边形 $ABDC$ 内接于 $\odot O \therefore \angle PAC = \angle D$

又 $\angle P = \angle P \therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB \therefore \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \therefore PA \cdot PB = PC \cdot PD$,

$\because OC=3, OP=5, \therefore PC=2, PD=5+3=8. \therefore x \cdot 2x=16, \therefore x=2\sqrt{2} \therefore AB=2\sqrt{2}$. 故选: B.

【点睛】本题考查了圆内接四边形以及相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定方法是解题关键.

2. (2023·山东九年级月考) 如图, 过点 P 作 $\odot O$ 的两条割线分别交 $\odot O$ 于点 A 、 B 和点 C 、 D , 已知 $PA=3$, $AB=PC=2$, 则 PD 的长是 ()



- A. 3 B. 7.5 C. 5 D. 5.5

【答案】B

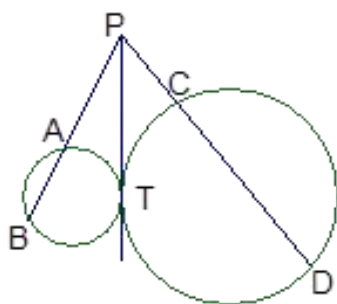
【分析】由已知可得 PB 的长，再根据割线定理得 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 即可求得 PD 的长.

【详解】解：∵ $PA=3$ ， $AB=PC=2$ ，∴ $PB=5$ ，

∵ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ，∴ $PD=7.5$ ，故选 B.

【点睛】主要是考查了割线定理的运用.

3. (2023·浙江·中考模拟) 如图,PT 是外切两圆的公切线,T 为切点,PAB,PCD 分别为这两圆的割线,若 $PA=3, PB=6, PC=2$, 则 PD 等于()



A. 12

B. 9

C. 8

D. 4

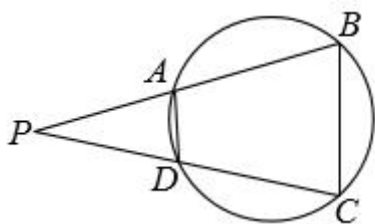
【答案】B

【分析】根据切割线定理得 $PT^2 = PA \cdot PB$ ， $PT^2 = PC \cdot PD$ ，所以 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ，从而可求得 PD 的长.

【详解】∵ $PT^2 = PA \cdot PB$ ， $PT^2 = PC \cdot PD$ ，∴ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ，

∵ $PA=3$ ， $PB=6$ ， $PC=2$ ，∴ $PD=9$ 。故选 B.

4. (2023·浙江杭州·模拟预测) 如图，过点 P 引圆的两条割线 PAB 和 PCD，分别交圆于点 A, B 和 C, D，连结 AC, BD，则在下列各比例式中，① $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$ ；② $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ ；③ $\frac{PA}{AC} = \frac{PD}{BD}$ ，成立的有_____ (把你认为成立的比例式的序号都填上).



【答案】②③

【分析】根据已知及相似三角形的判定方法得到， $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ ，根据相似三角形的对应边的比相等从而可得到答案.

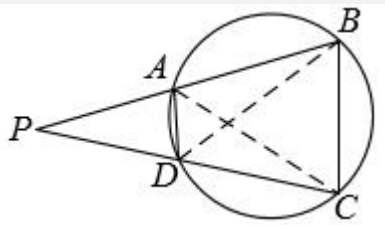
【详解】解：∵ 四边形 ABCD 是圆内接四边形，

∴ $\angle PAD = \angle PCB$ ， $\angle PDA = \angle PBC$ ，∴ $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ ，

$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{BC}$, $\therefore$ ① $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$ 错误; ② $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ 正确;

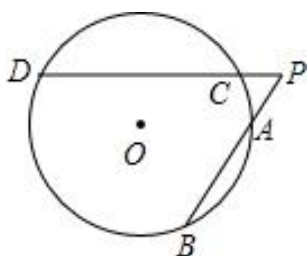
③ 连接 AC , BD , $\because \angle P = \angle P$, $\angle PBD = \angle PCA$, $\therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB$,

$\therefore \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{BD}$, $\therefore \frac{PA}{AC} = \frac{PD}{BD}$, 正确; 故答案为: ②③.



【点睛】本题主要考查了圆内接四边形的性质，相似三角形的判定和性质，注意到题目中的相似三角形是解决本题的关键.

5. (2023·北京九年级月考)如图,割线 PAB 、 PCD 分别交 $\odot O$ 于 AB 和 CD , 若 $PC=2$, $CD=16$, $PA:AB=1:2$, 则 $AB=$ _____.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【分析】设 $PA=x$, 则 $PB=3x$, 由切割线定理得, $2 \times (16+2) = x \cdot 3x$, 求解即可.

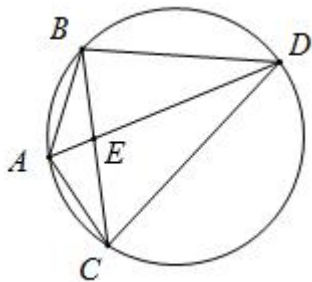
【详解】设 $PA=x$, $\because PA:AB=1:2$, $\therefore AB=2x$, $\therefore PB=3x$,

由切割线定理得, $2 \times (16+2) = x \cdot 3x$,

解得 $x=2\sqrt{3}$, $\therefore AB=4\sqrt{3}$. 故答案为 $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了切割线定理和勾股定理, 是基础知识要熟练掌握.

6. (2023·浙江绍兴·模拟预测) 四边形 $ABDC$ 内接于圆, 对角线交点为 E , $AB=AC=4$, $AE=2$, 若 BE 、 CE 都是整数, 则 BE 的值为_____.



【答案】3 或 4

【分析】证明 $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ ，求出 AD ，从而得到 DE ，再证明 $\triangle AEC \sim \triangle BED$ ，得到 $BE \cdot CE = 12$ ，根据 BE ， CE 都是整数可得所有可能的取值，再根据三角形三边关系可得 BE ， CE 都是整数，从而得到 DE 的取值。

【详解】解： $\because AB=AC=4$ ， $AE=2$ ， $\therefore \angle ADB = \angle ADC$ ，

$\because \angle ABC = \angle ADC$ ， $\therefore \angle ADB = \angle ABC$ ，又 $\angle BAD = \angle BAE$ ， $\therefore \triangle ABD \sim \triangle AEB$ ，

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$ ，即 $\frac{4}{2} = \frac{AD}{4}$ ， $\therefore AD=8$ ， $\therefore DE=6$ ，

$\because \angle CAE = \angle DBE$ ， $\angle ACE = \angle BDE$ ， $\therefore \triangle AEC \sim \triangle BED$ ，

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$ ，即 $\frac{2}{BE} = \frac{CE}{6}$ ， $\therefore BE \cdot CE = 12$ ， $\because BE$ ， CE 都是整数，

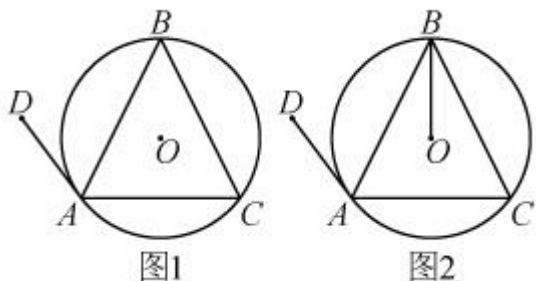
则 BE 和 CE 可取的值为 3，4 或 2，6 或 1，12；

$\because AB=AC=4$ ， $\therefore BC < AB+AC=8$ ， $\therefore BC=3+4=7$ ，

$\therefore BE$ 的值为 3 或 4，故答案为：3 或 4。

【点睛】本题考查了圆周角定理，相似三角形的判定和性质，以及三角形三边关系，解题的关键是找出适当的相似三角形得到线段关系。

7. (2023·辽宁大连·模拟预测)如图 1， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 D 为圆外 AB 上方一点，连接 AD ，若 $\angle C = \angle BAD$ 。



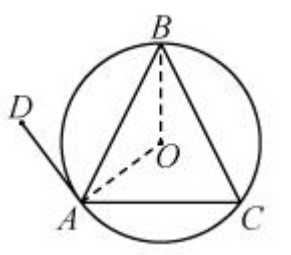
(1) 求证： AD 是 $\odot O$ 的切线；(2) 如图 2，连接 OB 。若 $\tan \angle ABO = \frac{1}{2}$ ， $AC = 6\sqrt{5}$ ， $BC = 8$ ，求 $\odot O$ 的半径。（注：本题不允许使用弦切角定理）

【答案】(1) 见解析 (2) $R = \frac{\sqrt{185}}{2}$

【分析】(1) 连接 OA, OB ，根据圆周角定理，得到 $\angle AOB = 2\angle C$ ；根据 $OA = OB$ ，得到 $\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \angle C$ 即 $\angle OAB + \angle C = 90^\circ$ ，等量代换即可证明 $\angle OAD = 90^\circ$ 。

(2) 延长 BO 交 $\odot O$ 于 F ，连接 AF ，过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E 。先证明 $\triangle AFB \sim \triangle ECA$ ，再利用勾股定理，三角函数计算 AB ， AF 的长度，再次运用勾股定理求解即可。

【详解】(1) 如图，连接 OA, OB ，根据题意，得 $\angle AOB = 2\angle C$ ；



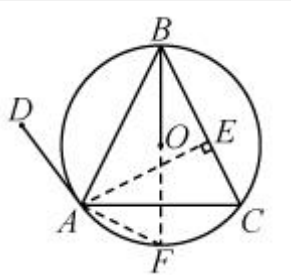
$\because OA = OB$, $\therefore \angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \angle C$ 即 $\angle OAB + \angle C = 90^\circ$,

$\because \angle C = \angle BAD$, $\therefore \angle OAB + \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \angle OAD = 90^\circ$, $\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 如图, 延长 BO 交 $\odot O$ 于 F , 连接 AF , 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E .

$\because BF$ 是 $\odot O$ 的直径, $\tan \angle ABO = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ$, $\angle C = \angle F$, $\tan \angle ABO = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$,



$\therefore \triangle AFB \sim \triangle ECA$, $\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{AF} = \frac{1}{2}$,

$\because AC = 6\sqrt{5}$, $\therefore EC^2 + AE^2 = AC^2$, $\therefore EC^2 + 4EC^2 = 36 \times 5$, 解得 $EC = 6, EC = -6$ (舍去), $\therefore AE = 12$;

$\because BC = 8$; $\therefore BE = BC - EC = 8 - 6 = 2$, $\therefore AB = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$, $AF = \frac{1}{2}AB = \sqrt{37}$,

$\therefore BF = \sqrt{(2\sqrt{37})^2 + (\sqrt{37})^2} = \sqrt{185}$, $\therefore OB = \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{185}}{2}$, 故 $\odot O$ 的半径为 $\frac{\sqrt{185}}{2}$.

【点睛】本题考查了圆周角定理, 正切函数, 三角形相似的判定和性质, 勾股定理, 切线的判定, 熟练掌握正切函数, 三角形相似的判定和性质, 勾股定理是解题的关键.

8. (2022 秋·四川绵阳·九年级统考期中) 定义: 顶点在圆上, 一边和圆相交, 另一边和圆相切的角叫做弦切角. 如图 1, AC 为 $\odot O$ 的切线, 点 A 为切点, AB 为 $\odot O$ 内一条弦, $\angle CAB$ 即为弦切角.

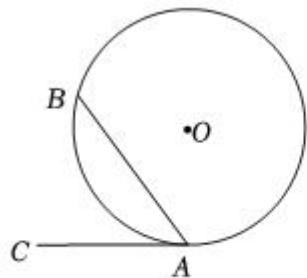


图1

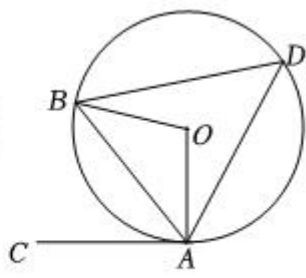


图2

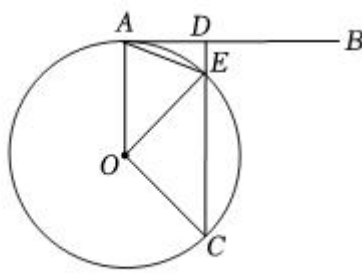


图3

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/517122032132010022>