2024年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）

暨2024年全国高中数学联合竞赛

一试试题（*A*）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 若实数$m>1$满足$\log_9(\log_8 m)=2024$，则$\log_3(\log_2 m)$的值为______.

2. 设无穷等比数列$\{a_n\}$的公比q满足$0<|q|<1$. 若$\{a_n\}$的各项和等于$\{a_n\}$各项的平方和，则a_2的取值范围是______.

3. 设实数a，b满足：集合$A=\{x\in R|x^2-10x+a\le 0\}$与$B=\{x\in R|bx\le b^3\}$的交集为$[4,9]$，则$a+b$的值为______.

4. 在三棱锥$P-ABC$中，若$PA\perp$底面ABC，且棱AB，BP，BC，CP的长分别为1, 2, 3, 4，则该三棱锥的体积为______.

5. 一个不均匀的骰子，掷出1, 2, 3, 4, 5, 6点的概率依次成等差数列.独立地先后掷该骰子两次，所得的点数分别记为a,b．若事件$a+b=7$发生的概率为$\frac{1}{7}$，则事件“$a=b$”发生的概率为______.

6. 设$f(x)$是定义域为R、最小正周期为5的函数．若函数$g(x)=f(2^x)$在区间$[0,5)$上的零点个数为25，则$g(x)$在区间$[1,4)$上的零点个数为______.

7. 设F_1, F_2为椭圆Ω的焦点，在Ω上取一点P（异于长轴端点），记O为$\triangle PF_1F_2$的外心，若$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，则$\Omega$的离心率的最小值为______.

8. 若三个正整数a,b,c的位数之和为8，且组成a，b，c的8个数码能排列为2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8，则称(a,b,c)为“幸运数组”，例如（9, 8, 202400）是一个幸运数组.满足$10<a<b<c$的幸运数组（a，b，c）的个数为______.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）在ΔABC中，已知$\cos C=\frac{sinA+cosA}{2}=\frac{\sin B+cosB}{2}$，求$\cos C$的值.

10.（本题满分20分）在平面直角坐标系中，双曲线Γ：$x^2-y^2=1$的右顶点为A. 将圆心在y轴上，且与Γ的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”．若两个好圆外切于点P，圆心距为d，求$\frac{d}{|PA|}$的所有可能的值.

11.（本题满分20分）设复数z，w满足$z+w=2$，求$S=|z^2-2w|+|w^2-2z|$的最小可能值.

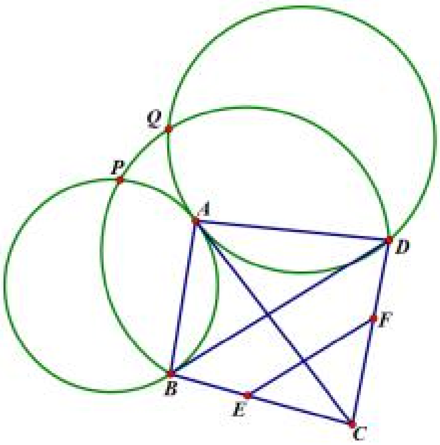
2024年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）

暨2024年全国高中数学联合竞赛

加试试题（*A*卷）

一．（本题满分40分）给定正整数 r，求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，满足 $\|a_n\| \geq C$ 对所有正整数 n 成立.（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离.）

二．（本题满分40分）如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，满足 $EF \parallel BD$，分别延长 FA, EA 至点 P, Q，使得过点 A, B, P 的圆 ω_1 及过点 A, D, Q 的圆 w_2 均与直线 AC 相切. 证明：B, P, Q, D 四点共 圆.（答题时储将图画在答卷纸上）



三．（本题满分50分）给定正整数 n. 在一个 $3\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A, B，存在整数 $l\geq 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1, C_2, \cdots, C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1, 2, \cdots, l-1$）.

求具有下述性质的最大整数 K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值 不小于 K.

四.（本题满分50分）设 A, B 为正整数，S 是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

(1) 对任意非负整数 k，有 $A^k \in S$；

(2) 若正整数 $n \in S$，则 n 的每个正约数均属于 S；

(3) 若 $m, n \in S$，且 m, n 互素，则 $mn \in S$；

(4) 若 $n \in S$，则 $An+B \in S$.

证明：与 B 互素的所有正整数均属于 S.

2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2024 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一．**（本题满分 40 分）** 给定正整数 r．求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，满足 $\|a_n\|\geq C$ 对所有正整数 n 成立.（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离.）

解： 情形 1：r 为奇数.

对任意实数 x，显然有 $\|x\|\leq\frac{1}{2}$，故满足要求的 C 不超过 $\frac{1}{2}$．

又取 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$，注意到对任意正整数 n，均有 r^{n-1} 为奇数，因此 $\|a_n\|=\left\|\frac{r^{n-1}}{2}\right\|=\frac{1}{2}$．这意味着 $C=\frac{1}{2}$ 满足要求．从而满足要求的 C 的最大值为 $\frac{1}{2}$．

…………10 分

情形 2：r 为偶数.

设 $r=2m\ (m\in\mathbf{N}^*)$．对任意实数 α，我们证明 $\|a_1\|$ 与 $\|a_2\|$ 中必有一数不超过 $\frac{m}{2m+1}$，从而 $C\leq\frac{m}{2m+1}$．

事实上，设 $a_1=k\pm\delta$，其中 k 是与 a_1 最近的整数（之一），且 $0\leq\delta\leq\frac{1}{2}$．

注意到，对任意实数 x 及任意整数 k，均有 $\|x+k\|=\|x\|$，以及 $\|-x\|=\|x\|$．

若 $0\leq\delta\leq\frac{m}{2m+1}$，则 $\|a_1\|=\|k\pm\delta\|=\delta\leq\frac{m}{2m+1}$．

若 $\frac{m}{2m+1}<\delta\leq\frac{1}{2}$，则 $\frac{2m^2}{2m+1}<2m\delta\leq m$，即 $m-\frac{m}{2m+1}<\delta r\leq m$，此时

$$\|a_2\|=\|a_1r\|=\|kr\pm\delta r\|=\|\delta r\|<\frac{m}{2m+1}.$$

…………30 分

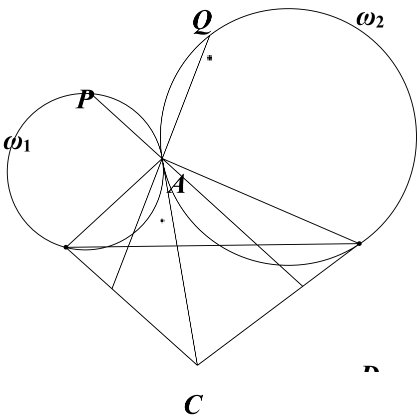
另一方面，取$a_1=\frac{m}{2m+1}$，则对任意正整数n，有$a_n=\frac{m}{2m+1}(2m)^{n-1}$，由二项式展开可知$a_n=\frac{m}{2m+1}(2m+1-1)^{n-1}=K+(-1)^{n-1}\frac{m}{2m+1}$，其中$K$为整数，故$\|a_n\|=\frac{m}{2m+1}$．这意味着$C=\frac{m}{2m+1}$满足要求.

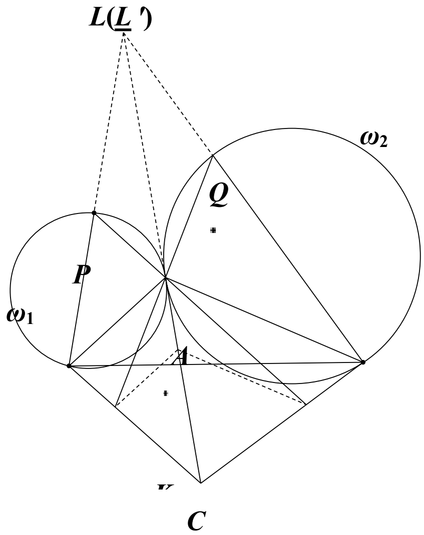
从而满足要求的C的最大值为$\frac{m}{2m+1}=\frac{r}{2(r+1)}$.

综上，当r为奇数时，所求C的最大值为$\frac{1}{2}$；当r为偶数时，所求C的最大值为$\frac{r}{2(r+1)}$.　　…………40 分

二．（本题满分 40 分）如图，在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E, F分别在边BC, CD上，满足$EF \parallel BD$．分别延长FA, EA至点P, Q，使得过点A, B, P的圆w_1及过点A, D, Q的圆w_2均与直线AC相切．证明：B, P, Q, D四点共圆.

（答题时请将图画在答卷纸上）





证明：由圆w_1与AC相切知$\angle BPA = \angle BAC = \angle CAD > \angle CAF = 180^\circ - \angle PAC$，故$BP, CA$的延长线相交，记交点为$L$.

由$EF \parallel BD$知$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$．在线段$AC$上取点$K$，使得$\frac{CK}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$，则$KE \parallel AB,\ KF \parallel AD$.　　…………10 分

由$\angle ABL = \angle PAL = \angle KAF$，$\angle BAL = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle CAD = \angle AKF$，可知$\triangle ABL \backsim \triangle KAF$，所以$AL = \frac{KF \cdot AB}{KA}$.　　…………20 分

同理，记DQ, CA的延长线交于点L'，则$AL' = \frac{KE \cdot AD}{KA}$.

又由$KE \parallel AB,\ KF \parallel AD$知$\frac{KE}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{KF}{AD}$，即$KE . AD = KF . AB$.

所以$AL' = AL$，即L'与L重合.

由切割线定理知$LP . LB = LA^2 = LQ . LD$，所以B, P, Q, D四点共圆.

…………40 分

三．（本题满分 50 分）给定正整数n. 在一个$3\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合S称为“连通的”，如果对S中任意两个不同的小方格A, B，存在整数 $l\ge 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1, C_2, \dots, C_l=B$ ，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边

（$i=1,2,\dots,l-1$）.

求具有下述性质的最大整数K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合S，使得S中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于K.

解：所求最大的$K=n$.

对一个由小方格构成的集合S，记S_b是S中的黑格个数，S_w是S中的白格个数. 用$[i,j]$表示第i行第j列处的方格，这里$1\le i\le 3$，$1\le j\le n$. 对于两个方格$A=[i,j]$，$B=[i',j']$，定义它们之间的距离为$d(A,B)=|i-i'|+|j-j'|$.

首先，如果将方格表按国际象棋棋盘一样黑白间隔染色，我们证明对任意连通的集合S，均有$|S_b-S_w|\le n$，这表明$K\le n$.

设$[1,1]$是黑格，并记$\varepsilon\in\{0,1\}$，满足$\varepsilon\equiv n \pmod 2$.

先证$S_b-S_w\le n$. 可不妨设S包含所有黑格，这是因为若S不包含所有黑格，取不属于S的黑格A满足$d(A,S)$最小，这里$d(A,S)=\min\limits_{B\in S}d(A,B)$. 易知$d(A,S)=1$或$2$. 若$d(A,S)=1$，取$S'=S\cup\{A\}$，则$S'$仍是连通的，且$S_b'-S_w'$更大.

若$d(A,S)=2$，则存在与A相邻的白格C，而C与S中某个方格B相邻，取$S'=S\cup\{A,B\}$，则S'仍是连通的，且$S_b'-S_w'$不变. 因而可逐步扩充S，使得S包含所有黑格，保持S的连通性，且S_b-S_w不减.

考虑白格集合$W_k=\{[i,j]\,|\,i+j=k\}$，$k=3,5,\dots,n+1+\varepsilon$，每个$W_k$中至少有一个方格属于$S$，否则不存在从黑格$A=[1,1]\in S$到黑格$B=[3,n-1+\varepsilon]$的$S$中路径.

故$S_w\ge\dfrac{1}{2}(n+\varepsilon)$，而$S_b=\dfrac{1}{2}(3n+\varepsilon)$，故$S_b-S_w\le n$. …………10 分

类似可证$S_w-S_b\le n$. 同上，可不妨设S包含所有白格，从而$S_w=\dfrac{1}{2}(3n-\varepsilon)$.

再考虑黑格集合$B_k=\{[i,j]\,|\,i+j=k\}$，$k=4,6,\dots,n+2-\varepsilon$，每个$B_k$中至少有一个黑格属于$S$，否则不存在从白格$A=[1,2]$到白格$B=[3,n-\varepsilon]$的$S$中路径. 从而

$S_b\ge\dfrac{1}{2}(n-\varepsilon)$，故$S_w-S_b\le n$. …………20 分

下面证明$K=n$具有题述性质，即对任意的染色方案，总存在连通的集合S，使得$|S_b-S_w|\ge n$.

设表格中共有X个黑格和Y个白格，在第二行中有x个黑格和y个白格. 于是$X+Y=3n$，$x+y=n$. 故

$$(X-y)+(Y-x)=(X+Y)-(x+y)=2n.$$

由平均值原理可知$\max\{X-y,Y-x\}\ge n$.

不妨设$X-y\geq n$. 取S为第二行中的y个白格以及所有X个黑格. 由于S包含第二行中所有方格，因而S是连通的. 而$S_b=X$，$S_w=y$，$S_b-S_w=X-y\geq n$.

综上所述，$K_{\max}=n$. ············50 分

四．（本题满分 50 分）设A,B为正整数，S是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

(1) 对任意非负整数k，有$A^k\in S$；

(2) 若正整数$n\in S$，则n的每个正约数均属于S；

(3) 若$m, n \in S$，且m, n 互素，则$mn \in S$；

(4) 若$n \in S$，则 $An+B \in S$.

证明：与B 互素的所有正整数均属于S .

证明：先证明下述引理.

引理：若$n \in S$，则 $n+B \in S$.

引理的证明：对$n \in S$，设 n_1 是n 的与A 互素的最大约数，并设$n = n_1 n_2$，则 n_2 的素因子均整除A，从而$(n_1, n_2) = 1$．由条件(1)及(2)知，对任意素数$p \mid A$ 及任意正整数k，有 $p^k \in S$．因此，将$A^{k-1}n_1$ 作标准分解，并利用(3)知$A^{k-1}n_1 \in S$．又 $n_2 \mid n$，而 $n \in S$，故由(2)知 $n_2 \in S$．因 $(A^{k-1}n_1, n_2) = 1$，故由(3)知 $A^{k-1}n_1 . n_2 \in S$，即$A^{k-1}n \in S$．再由(4)知

$$A^k n + B \in S \text{（对任意正整数}k\text{）}. \qquad ①$$

…………10 分

设$n+B = C.D$，这里正整数C 的所有素因子均整除A，正整数D 与A 互素，从而$(C, D) = 1$．由(1)及(2)知$C \in S$（见上面$A^{k-1}n \in S$ 的证明）.

另一方面，因$(D, A) = 1$，故由欧拉定理知 $D \mid A^{\varphi(D)}-1$．因此

$$A^{\varphi(D)}n + B = (A^{\varphi(D)}-1)n + (n+B) \equiv 0 \pmod{D},$$

但由①知$A^{\varphi(D)}n + B \in S$，故由(2)知$D \in S$．结合$C \in S$ 及$(C, D) = 1$知$CD \in S$，即 $n+B \in S$．引理证毕. …………40 分

回到原问题．由(1)，取 $k = 0$ 知$1 \in S$，故反复用引理知对任意正整数y，有 $1+By \in S$.

对任意$n \in \mathbf{N}^*, (n, B) = 1$，存在正整数$x, y$ 使得$nx = 1+By$，因此$nx \in S$，因 $n \mid nx$，故 $n \in S$．证毕. …………50 分