四川省乐山市2023-2024学年高二上学期
期末教学质量检测数学试题

注意事项：

1．答题前先将自己的姓名、准考证号、考场号，座位号填写在试卷和答题卡上，认真核准准考证号条形码上的以上信息，将条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2．请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡的非答题区域均无效．

3．选择题用2B铅笔在答题卡上把所选〖答 案〗的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚．

4．考试结束后，请将试卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题 本大题共8小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 一个几何体，它的轴截面一定是圆面，则这个几何体是（　　）

A. 圆柱　　B. 圆锥　　C. 圆台　　D. 球

〖答 案〗D

〖解 析〗对于A：圆柱的轴截面是矩形，故A不符合题意；

对于B：由于圆锥的轴截面是一个等腰三角形，故B不符合题意；

对于C，圆台轴截面是等腰梯形，故C不符合题意；

对于D：用任意的平面去截球，得到的截面均为圆，故D符合题意．

故选：D．

2. 已知直线l经过两点$P_1\left(-1,1\right)$，$P_2\left(3,-1\right)$，则直线l的斜率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

〖答 案〗C

〖解 析〗直线l的斜率$k=\frac{1-\left(-1\right)}{-1-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$.故选：C．

3. 工人师傅在检测椅子的四个“脚”是否在同一个平面上时，只需连接对“脚”的两条线段，看它们是否相交，就知道它们是否合格.工人师傅运用的数学原理是（　　）

A. 两条相交直线确定一个平面

B. 两条平行直线确定一个平面

C. 四点确定一个平面

D. 直线及直线外一点确定一个平面

〖答 案〗A

〖解 析〗由于连接对“脚”的两条线段，看它们是否相交，就知道它们是否合格，

所以工人师傅运用的数学原理是“两条相交直线确定一个平面”.

故选：A

4. 已知圆 C 的圆心在 x 轴上且经过 $A\left(1,1\right)$，$B\left(2,-2\right)$两点，则圆 C 的标准方程是（　　）

A. $\left(x-3\right)^2+y^2=5$　　　　B. $\left(x-3\right)^2+y^2=17$

C. $\left(x+3\right)^2+y^2=17$　　　　D. $x^2+\left(y+1\right)^2=5$

〖答 案〗A

〖解 析〗因为圆 C 的圆心在 x 轴上，故设圆的标准方程$\left(x-a\right)^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$，

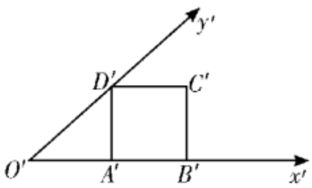
又经过$A\left(1,1\right)$，$B\left(2,-2\right)$两点，

所以$\begin{cases}\left(1-a\right)^2+1^2=r^2\\\left(2-a\right)^2+\left(-2\right)^2=r^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\r=\sqrt{5}\end{cases}$，

所以圆的标准方程$\left(x-3\right)^2+y^2=5$.

故选：A.

5. 如图，正方形 $A'B'C'D'$ 是用斜二测画法画出的水平放置的一个平面四边形 $ABCD$ 的直观图，若 $A'D'=1$，则四边形 $ABCD$ 周长为（　　）



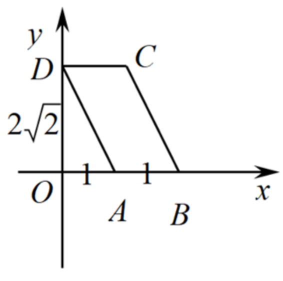
A. $\sqrt{2}$　　　　B. 4　　　　C. $2\sqrt{2}$　　　　D. 8

〖答 案〗D

〖解 析〗根据斜二测画法特点可知 $\angle D'O'A'=45^\circ$，所以$\triangle D'O'A'$ 为等腰直角三角形，

所以 $O'A'=1,O'D'=\sqrt{2}$，所以在原始图形中 $OD=2\sqrt{2}$，根据勾股定理可得 $AD=3$

所以四边形 $ABCD$ 的周长为8.故选：D



6. 已知直线 l_1：$12x+5y-1=0$，直线 l_2 过点$\left(-5,7\right)$，且 $l_1\parallel l_2$，则直线 l_1 与直线 l_2 间的

距离是（　　）

A. $\dfrac{24}{13}$　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. $\dfrac{94}{13}$

〖答 案〗B

〖解 析〗由题意知直线l_1：$12x+5y-1=0$，直线l_2过点$\left(-5,7\right)$，且$l_1 \parallel l_2$，

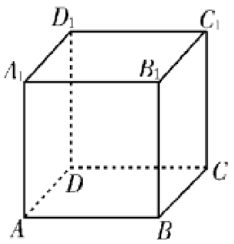
设$l_2:12x+5y+c=0\left(c\neq -1\right)$，代入$\left(-5,7\right)$可得$c=25$，

故l_2的方程为：$12x+5y+25=0$，

故直线l_1与直线l_2间的距离是$d=\dfrac{|25+1|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$，

故选：B

7. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为1，点P是正方体表面上一个动点，满足$BP\perp A_1C$，则点P的轨迹长度为（　　）

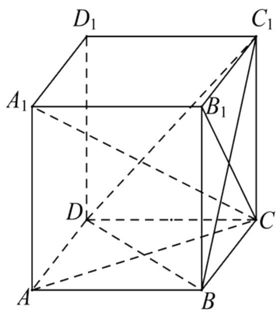


A. 2　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 4　　　　D. $3\sqrt{2}$

〖答 案〗D

〖解 析〗由题意可知，动点P的轨迹为过点B与直线A_1C垂直的截面与正方体的表面的交线.

如图所示：



在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BD\perp AC,BD\perp AA_1$，

又$AC,AA_1\subset$平面AA_1C且$AC\cap AA_1=A$，所以$BD\perp$平面AA_1C，

因为$A_1C\subset$平面AA_1C，所以$BD\perp A_1C$.

又在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BC_1\perp B_1C,BC_1\perp B_1A_1$，

又 $B_1C,B_1A_1\subset$平面B_1CA_1且$B_1C\cap B_1A_1=B_1$，所以$BC_1\perp$平面B_1CA_1，

因为$A_1C\subset$平面B_1CA_1，所以$BC_1\perp A_1C$.

又因为$BD\perp A_1C,BC_1\perp A_1C$，由$BD,BC_1\subset$平面$BDC_1$且$BD\cap BC_1=B$，

所以$A_1C\perp$平面BDC_1.

于是点P的轨迹长度为不包含点B的$\triangle BDC_1$的周长，

即$\triangle BDC_1$周长等于$3\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$.

故选：D.

8. 已知点$P(x,y)$是直线$y=2x+3$上一动点，PM与PN是圆C：$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，M、N为切点，则四边形$PMCN$的最小面积为（　　）

A. 4　　　　B. $2\sqrt{5}$　　　　C. 2　　　　D. 1

〖答 案〗C

〖解 析〗由题意知，圆C：$(x-1)^2+y^2=1$的圆心$C(1,0)$,半径$r=1$，

因为PM与PN是圆C：$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，

所以$PM=PN$，

$|PM|^2=|PC|^2-|MC|^2=|PC|^2-1$，

则$|PM|=\sqrt{|PC|^2-1}$，

当$|PC|$最小时，$|PM|$也最小,

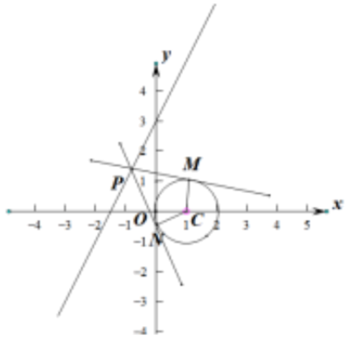
又点$P(x,y)$是直线$y=2x+3$上一动点，

故圆心$C(1,0)$到直线$y=2x+3$的距离$d=\dfrac{|2+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，为$|PC|$的最小值，

此时$|PM|_{\min}=2$，

则此时四边形$PMCN$的面积$S=|PM||MC|=|PM|$也最小，

最小值为$S=2$.



故选：C.

二、多项选择题：本题共 4 小题，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 若两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与任何一个向量都不能构成空间的一个基底，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线

B. 空间的基底有且仅有一个

C. 两两垂直的三个非零向量可以构成空间的一个基底

D. 若 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 是空间的一个基底，则 $\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$ 也是空间的一个基底

〖答 案〗ACD

〖解 析〗对于 A，能构成空间的一个基底的向量必须是不共面的 3 个向量，

由于非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与任何一个向量都不能构成空间的一个基底，

即向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与任何一个向量均共面，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 必共线，A 正确；

对于 B，空间的基底不唯一，不共面的 3 个向量，均可作为空间的一组基底，B 错误；

对于 C，由于两两垂直的三个非零向量不共面，故可以构成空间的一个基底，C 正确；

对于 D，由于 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 是空间的一个基底，故 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，

而 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面，故与 $\vec{c}$ 不共面，且 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$ 不共线，

故 $\left\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}\right\}$ 也是空间的一个基底，D 正确，

故选：ACD

10. 已知直线 l：$x-y-4=0$，圆 C_1：$\left(x-3\right)^2+y^2=9$，与圆 C_2：$x^2+\left(y-1\right)^2=1$．则下列结论正确的是（　　）

A. 直线 l 与圆 C_1 的位置关系是相切

B. 直线 l 与圆 C_2 的位置关系是相离

C. 圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦长是 $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

D. 圆 C_1 上的点到直线 l 的距离为 1 的点有 3 个

〖答 案〗BC

〖解 析〗对于选项 A: 因为圆C_1：$(x-3)^2+y^2=9$，

所以圆心$C_1(3,0)$，半径$r_1=3$，

所以圆心$C_1(3,0)$到直线$x-y-4=0$的距离为$d_1=\dfrac{|3-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$d_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<r_1$，所以直线$l$与圆$C_1$的位置关系是相交，故选项 A 错误；

对于选项 B: 因为圆C_2：$x^2+(y-1)^2=1$，所以圆心$C_2(0,1)$，半径$r_2=1$，

所以圆心$C_2(0,1)$到直线$x-y-4=0$的距离为$d_2=\dfrac{|0-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

因为$d_2=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}>r_2$，所以直线$l$与圆$C_2$的位置关系是相离，故选项 B 正确；

对于选项 C：联立$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=9\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$，相减得公共弦所在得直线方程为：$3x-y=0$，

所以圆心$C_1(3,0)$到$3x-y=0$的距离为$d_3=\dfrac{|3\times3-0|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$，

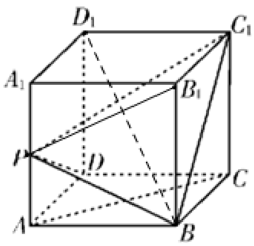
所以公共弦长为$2\sqrt{r_1^2-d_3^2}=2\sqrt{9-\dfrac{81}{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$，故选项 C 正确;

对于选项 D：因为$r_1-d_1=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1$，且$r_1+d_1=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1$，

所以圆C_1上的点到直线l的距离为 1 的点有 4 个（在直线l的两侧各 2 个），故选项 D 错误;

故选：BC.

11. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，点P为线段AA_1上的一动点，则下列结论正确的是（　　）



A. $DP\perp BD_1$

B. 三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为定值

C. 当点 P 与点 A_1 重合时，平面 $PBC_1//$ 平面 ACD_1

D. 当 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{PA}$ 时，直线 PC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

〖答 案〗BCD

〖解 析〗对于 A，连接 AD_1，假设 $DP\perp BD_1$，

又 $DP\perp AB$， $AB\subset$ 平面 ABD_1， $BD_1\subset$ 平面 ABD_1， $AB\cap BD_1=B$，

可得 $PD\perp$ 平面 ABD_1，

由于 $AD_1\subset$ 平面 ABD_1， $PD\perp$ 平面 ABD_1，进而 $PD\perp AD_1$，

事实上，只有当 A_1 和 P 重合时 $PD\perp AD_1$ 才成立，得 $DP\perp BD_1$ 不恒成立；故 A 不正确；

对于 B，因为平面 $AA_1D_1D//$ 平面 BB_1C_1C，根据面面平行的性质，得到 $AA_1//$ 平面 BCC_1B_1，

又点 P 在线段 AA_1 上，所以点 P 到平面 BB_1C_1C 的距离是定值，

同时 $\triangle BB_1C_1$ 的面积是定值，

所以三棱锥 $P-BB_1C_1$ 的体积为定值，即三棱锥 B_1-PBC_1 的体积为定值，故 B 正确；

对于 C，连接 A_1B 、 A_1C_1 和 CD_1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为四边形 A_1BCD_1 是矩形，所以 $A_1B//CD_1$，

因为 $A_1B//CD_1$，且 $A_1B\not\subset$ 平面 ACD_1， $CD_1\subset$ 平面 ACD_1，所以 $A_1B//$ 平面 ACD_1，

同理可得 $A_1C_1//$ 平面 ACD_1

又 $A_1C_1//$ 平面 ACD_1， $A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1， $A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1， $A_1B\cap A_1C_1=A_1$，

所以平面 $A_1BC_1//$ 平面 ACD_1，

所以当点 P 与点 A_1 重合时，可得平面 $PBC_1//$ 平面 ACD_1 成立，故 C 正确；

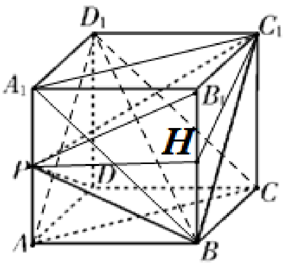
对于 D，取棱 BB_1 中点为 H，连接 PH 和 C_1H，由于 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{PA}$，

可得点 P 即为棱 AA_1 中点，同时 H 为棱 BB_1 的中点，可得 $PH//AB$，且 $PH=AB$，

同时 $PH\perp$ 平面 BB_1C_1C， $\angle PC_1H$ 即为直线 PC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角，

$\tan\angle PC_1H=\frac{PH}{C_1H}=\frac{PH}{\sqrt{(B_1H)^2+(B_1C_1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 正确.

故选：BCD.



.

12. 抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形常被称为阿基米德三角形，该三角形以其深刻的背景、丰富的性质产生了无穷的魅力．设抛物线 $y^2=2px$（$p>0$），弦 AB 过焦点 F，$\triangle ABQ$ 为其阿基米德三角形，则下列结论一定成立的是（　　）

A. 点 Q 在抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上

B. 存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{QB}>0$

C. $|QF|^2=|AF|\cdot|BF|$

D. $\triangle ABQ$ 面积的最小值为 p^2

〖答 案〗ACD

〖解 析〗设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

设直线 AB： $x=my+\frac{p}{2}$，

联立 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2}\\y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-p^2=0$，

则 $y_1+y_2=2pm,y_1y_2=-p^2$，

设过点 A 的切线为 $y-y_1=k(x-x_1)$，

联立 $\begin{cases}y-y_1=k(x-x_1)\\y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2py_1}{k}-y_1^2=0$，

由 $\Delta=\left(-\frac{2p}{k}\right)^2-4\left(\frac{2py_1}{k}-y_1^2\right)=0$，可得 $k=\frac{p}{y_1}$，

同理可得过点 B 的切线斜率为 $\frac{p}{y_2}$，

所以 A,B 处切线方程分别为 $y_1y=p(x+x_1),y_2y=p(x+x_2)$，

联立可得 $Q\left(-\frac{p}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，故 A 正确；

又即 $k_{QA}=\frac{p}{y_1}$， $k_{QB}=\frac{p}{y_2}$，

所以 $k_{QA}\cdot k_{QB}=\frac{p^2}{y_1y_2}=-1$， $QA\perp QB$，

所以 $\triangle QAF\sim\triangle BQF$， $\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|QF|}$，

即 $|QF|^2=|AF|\cdot|BF|$，C 正确；

又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{OF}=\left(\frac{p}{2},0\right),\overrightarrow{FA}=\left(x_1-\frac{p}{2},y_1\right)$，

$\overrightarrow{QF}=\left(p,-\frac{y_1+y_2}{2}\right),\overrightarrow{FB}=\left(x_2-\frac{p}{2},y_1\right)$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{QB}=\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{QF}+\overrightarrow{FB}\right)$

$=x_1x_2+\frac{p}{2}x_1+\frac{y_1y_2}{2}-\frac{y_1^2}{2}$

$=-\frac{p^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}<0$，B 错；

由上述知，$k_{QF}=-\frac{y_1+y_2}{2p}=-m$，

又因为直线 AB 斜率为 $\frac{1}{m}$，

所以 $AB\perp QF$，

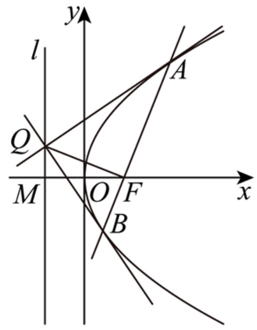
设准线与 x 轴的交点为 M，

则 $\triangle ABQ$ 面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|QF|$，

当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|$ 最短（最短为 $2p$），

$|QF|$ 也最短（最短为 $|MF|=p$），

此时 $\triangle ABQ$ 面积取最小值 p^2，D 正确.



故选：ACD

三、填空题：本大题共 4 小题．

13. 已知向量$\vec{a}=(\lambda,2,3)$，$\vec{b}=(4,3,0)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\lambda=$__________．

〖答 案〗$-\dfrac{3}{2}$

〖解 析〗因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\lambda+2\times3+3\times0=0$，解得$\lambda=-\dfrac{3}{2}$.

故〖答 案〗为：$-\dfrac{3}{2}$.

14. 直线 l 经过点 $A(3,-1)$，且与直线 $x+y+3=0$ 垂直，则直线 l 的一般方程是

______________.

〖答 案〗$x-y-4=0$

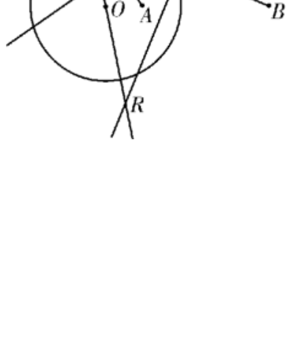
〖解 析〗直线$x+y+3=0$的斜率为-1，设直线l的斜率k，

则$-1\cdot k=-1$，即$k=1$.

由直线的点斜式方程可得：$y-(-1)=1\times(x-3)$，即$x-y-4=0$.

故〖答 案〗为：$x-y-4=0$.

15. 如图，圆 O 的半径为 2，A 是圆内一个定点，且$|AO|=1$，B 是圆外一个定点，且$|BO|=4$，P 是圆 O 上任意一点．线段 AP 的垂直平分线l_1和半径OP相交于点 Q，线段 BP 的垂直平分线l_2和半径 OP 相交于点 R，当点在圆上运动时，点 Q 和点 R 的运动轨迹分别是椭圆和双曲线，设它们的离心率分别为e_1和e_2，则e_1+e_2___________.



〖答 案〗$\dfrac{5}{2}$

〖解 析〗连接QA,RB，因为线段AP的垂直平分线l_1和半径OP相交于点Q，

所以$|QA|=|QP|=2-|OQ|$,即$|QA|+|OQ|=2>|AO|=1$，

所以点Q的轨迹是以O,A为焦点，2为长轴长，焦距为1的椭圆，

所以该椭圆的离心率为$e_1=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{1}{2}$.

因为线段BP的垂直平分线l_2和半径OP相交于点R，

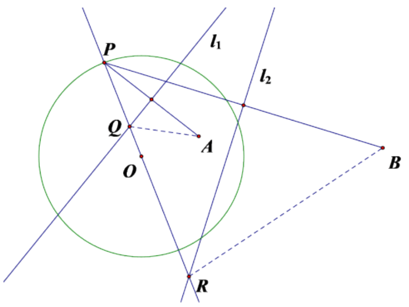
所以$|RB|=|RP|=2+|OR|$,即$|RB|-|OR|=2<|OB|=4$，

所以点R的轨迹是以O,B为焦点，2为实轴长，焦距为4的双曲线，

所以该双曲线的离心率为$e_1=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{4}{2}=2$.

所以$e_1+e_2=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$.

故〖答 案〗为：$\dfrac{5}{2}$.



16. 在多面体$PABCQ$中，$PA=PB=PC=AB=AC=BC=2$，$QA=QB=QC$且QA，QB，QC两两垂直，则该多面体的外接球半径为__________，内切球半径为__________.

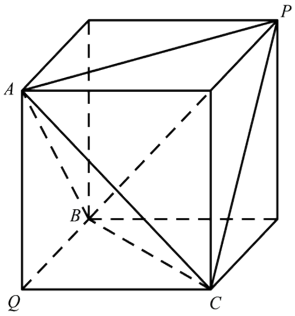
〖答 案〗①$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　②$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

〖解 析〗由$AB=AC=BC=2$，$QA=QB=QC$且QA，QB，QC两两垂直可得：

$QA=QB=QC=AB\times\sin 45^\circ=\sqrt{2}$，

又因为$PA=PB=PC=2$，

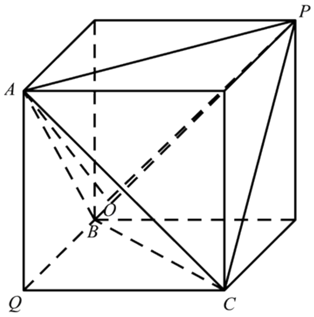
所以该多面体$PABCQ$可看作是棱长为$\sqrt{2}$的正方体一部分，如图所示：



则该多面体的外接球半径与棱长为$\sqrt{2}$正方体外接球的半径相同，故外接球的半径为

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

设$\triangle ABC$的中心为O，连接AO,PO，内切球半径为r.



由$PA=PB=PC=AB=AC=BC=2$及正方体的性质，可得：$PO\perp$平面ABC.

由$AB=AC=BC=2$可得：$AO=\frac{2}{3}\times AB\times\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由$PA=PB=PC=2$可得：$PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3},$$

$$V_{三棱锥P-ABC}=\frac{1}{3}\times PO\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

由$QA=QB=QC=\sqrt{2}$且QA，QB，QC两两垂直可得:

$$S_{\triangle QAB}=S_{\triangle QAC}=S_{\triangle QBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1,$$

$$V_{三棱锥A-QBC}=\frac{1}{3}\times QA\times S_{\triangle QBC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

因为$V_{多面体PABCQ}=V_{三棱锥P-ABC}+V_{三棱锥A-QBC}=\frac{1}{3}\times r\times S_{多面体PABCQ}$，

所以$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{3}\times r\times\left(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QAC}+S_{\triangle QBC}\right)$，

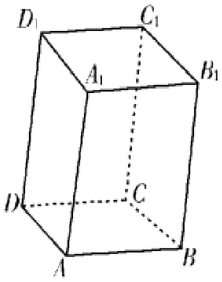
即$\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}\times r\times\left(3\sqrt{3}+3\right)$，解得$r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

故〖答 案〗为：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题：本大题共 6 小题，解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17. 已知斜棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=AA_1=1$，

$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$.



（1）用基底$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$表示向量$\overrightarrow{AC_1}$，并求$\left|\overrightarrow{AC_1}\right|$；

（2）求向量$\overrightarrow{AC_1}$与向量$\overrightarrow{AC}$夹角的余弦值.

解：（1）$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\therefore\left|\overrightarrow{AC_1}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2+\left(\vec{c}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}}$

$=\sqrt{1+1+1+1+1+1}=\sqrt{6}$.

（2）$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$.

$\therefore\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$.

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=1+2\times1\times1\times\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=4$.

$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

18. 已知F_1、F_2分别是双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的两个焦点，若双曲线的一条渐近线与直线$y=\sqrt{2}x+1$恰好平行.

（1）求双曲线 C 的离心率；

（2）若 $|F_1F_2|=6$，M 为双曲线上一点，且 $|MF_1|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，求 $|MF_2|$ 的值．

解：（1）根据题意，双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

因为双曲线的一条渐近线与直线 $y=\sqrt{2}x+1$ 平行，

所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，

即 $b=\sqrt{2}a$．

$\because c^2=a^2+b^2$，

$\therefore c=\sqrt{3}a$．

$\therefore e=\sqrt{3}$．

（2）由 $|F_1F_2|=6$ 得 $2c=6$，即 $c=3$．

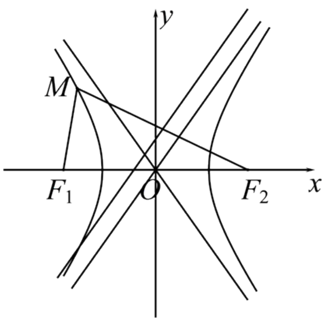
由（1）知，$c=\sqrt{3}a$，得 $a=\sqrt{3}$．

由双曲线的定义可得：$||MF_1|-|MF_2||=2a=2\sqrt{3}$，

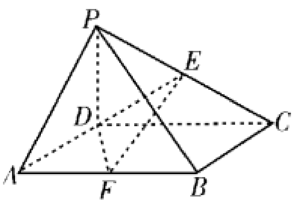
解得 $|MF_2|=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$\because |MF_2|\geqslant c-a=3-\sqrt{3}$，

$\therefore |MF_2|=\frac{9\sqrt{3}}{2}$．



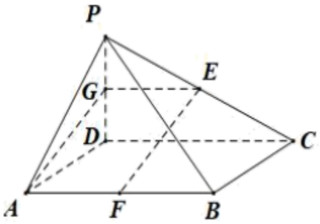
19. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是平行四边形，且 $AB=2\sqrt{3}$，$AD=2$，$PD=2$，$\angle BAD=30°$，E 为 PC 中点，F 为 AB 中点.



（1）证明：$EF//$平面PAD；

（2）求点 B 到平面 DEF 的距离.

解：（1）取 PD 中点 G，连结 AG,EG .



$\because E$，G 分别是 PC,PD 的中点，

$\therefore EG//DC$ 且 $EG=\frac{1}{2}DC$.

$\because F$ 是 AB 中点，$AB//CD$，

$\therefore EG//AF$ 且 $EG=AF$.

$\therefore AFEG$ 为平行四边形.

$\therefore EF//AG$.

又$\because EF\not\subset$平面PAD，$AG\subset$平面PAD，

$\therefore EF//$平面PAD .

（2）$\because E$ 是 PC 中点，$PD\perp$平面$ABCD$

$\therefore$点 E 到平面 $ABCD$ 的距离为$d'=\frac{1}{2}PD=1$.

$\because AD=2$，$\angle BAD=30^\circ$，$AF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，

$\therefore DF=\sqrt{AD^2+AF^2-2AD\cdot AF\cos\angle BAD}=\sqrt{2^2+\sqrt{3}^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$，

且 $DF^2+AF^2=AD^2=4$,即 $\angle DFA=90^\circ$. $\therefore S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BF\cdot DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AFEG$ 为平行四边形，$\therefore EF=AG=\sqrt{AD^2+DG^2}=\sqrt{5}$.

$\because DE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{PD^2+CD^2}=2$，

$\therefore DF^2+DE^2=EF^2=5$，即 $\angle EDF=90^\circ$. $\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot DF=1$.

$\because V_{B-DEF}=V_{E-BDF}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle BDF}\cdot d'$.

$\therefore$点 B 到平面 DEF 的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 已知抛物线 M：$y^2=x$，若 O 为坐标原点，A、B 为抛物线上异于 O 的两点.

（1）若 $C(3,0)$，P 在抛物线上，求 $|PC|$ 的最小值；

（2）若 $k_{OA}\cdot k_{OB}=2$．求证：直线 AB 必过定点.

解：（1）设 $P(x,y)$，

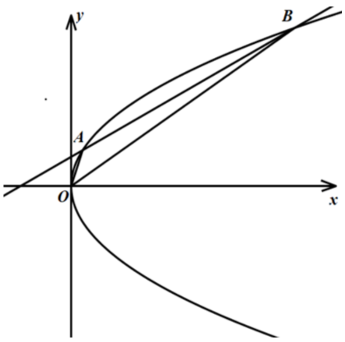
∵ P 在抛物线上，∴ $y^2=x$．

∴ $|PC|^2=(x-3)^2+y^2=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$．

∴当 $x=\frac{5}{2}$，即 $P\left(\frac{5}{2},\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ 时，$|PC|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{11}}{2}$．

（2）显然直线斜率不为零，设直线 AB 的方程为 $x=my+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

如图：



联立 $\begin{cases}y^2=x\\x=my+t\end{cases}$ 得 $y^2-my-t=0$，

有两个交点故 $\Delta=m^2+4t>0$．

∴ $y_1+y_2=m$，$y_1\cdot y_2=-t$．

∵ $k_{OA}\cdot k_{OB}=2$，

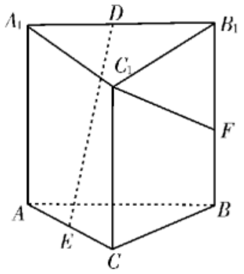
∴ $y_1\cdot y_2=2x_1\cdot x_2$．

∴ $y_1\cdot y_2=2(my_1+t)\cdot(my_2+t)$，得 $2t^2+t=0$，

∴ $t=-\frac{1}{2}$ 或 $t=0$（舍）.

∴直线 AB 过定点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

21. 已知直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$BB_1=2$，$\angle BAC=45°$，D 为线段 A_1B_1 上任一点，E，F 分别为 AC，BB_1 中点.



（1）证明：$DE \perp C_1F$；

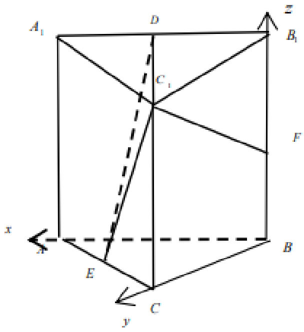
（2）当 B_1D 为何值时，平面 DEC 与平面 BCC_1B_1 的二面角的正弦值最小，并求出最小值．

解：（1）∵ $AB=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$\angle BAC=45°$，

∴ $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos45°=4$．

∵ $AB^2+BC^2=AC^2$．∴ $BC\perp AB$．

建立如图所示空间直角坐标系，



设 $B_1D=a$，则 $C(0,2,0)$，$D(a,0,2)$，$E(1,1,0)$，$F(0,0,1)$，$C_1(0,2,2)$．

∴ $\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，$\overrightarrow{C_1F}=(0,-2,-1)$．

∴ $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{C_1F}=(1-a)\times0+1\times(-2)+(-2)\times(-1)=0$，

∴ $DE\perp C_1F$．

（2）∵ $\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,0)$，

设平面 DEC 的一个法向量为：$\vec{n_1}=(x,y,z)$，

∴ $\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}(1-a)x+y-2z=0\\ x-y=0\end{cases}$，

令 $x=2$，则 $y=2$，$z=2-a$，∴ $\vec{n_1}=(2,2,2-a)$．

∵ $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，

∴取平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\vec{n_2}=(1,0,0)$，

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{2}{\sqrt{a^2-4a+12}} = \frac{2}{\sqrt{(a-2)^2+8}}$，

又 $0 \le a \le 2$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 当 $B_1D = 2$ 时，平面 DEC 与平面 BCC_1B_1 所成的二面角的正弦值最小，最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22. 已知椭圆 T 以坐标原点 O 为对称中心，以坐标轴为对称轴，且过 $M(0,-2)$，$N\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

（1）求椭圆 T 的标准方程；

（2）若 A、B 为椭圆上两点，且以线段 AB 为直径的圆经过 O 点.

①求证：$\frac{|AB|}{|OA|\cdot|OB|}$ 为定值；

②求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.

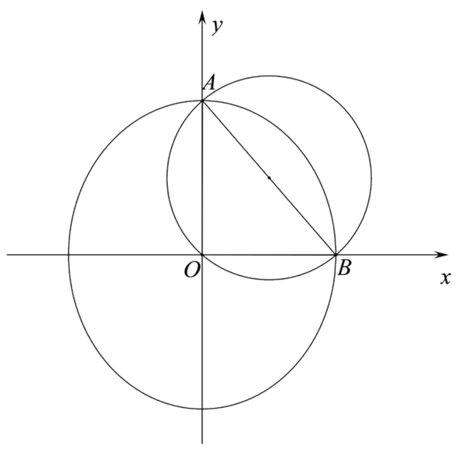
解：（1）设椭圆 T 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，（$m>0$，$n>0$，$m\ne n$），且过 $M(0,-2)$，$N\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

所以 $\begin{cases} m\cdot 0^2+n(-2)^2=1 \\ m\left(\frac{3}{2}\right)^2+n(-1)^2=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=\frac{1}{3} \\ n=\frac{1}{4} \end{cases}$.

则椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

（2）①以线段 AB 为直径的圆经过 O 点，$\therefore OA \perp OB$.

当直线 OA 的斜率不存在时，如下图：



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/517141105160006062