山东省菏泽市菏泽一中八一路校区2024届高三上学期12月月考数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x-1>0\}$，$B=\{x\mid 0<x<2\}$，则$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$（　）

A．$\{x\mid 0<x\le 1\}$　B．$\{x\mid x\le 2\}$　C．$\{x\mid x\le 1\}$　D．$\{x\mid 1\le x<2\}$

2．已知i为虚数单位，复数$z=\left(2+\mathrm{i}^3\right)\left(1\quad a\mathrm{i}\right)$为纯虚数，则$|z|=$（　）

A．0　B．$\frac{1}{2}$　C．2　D．5

3．给出下列四个命题，其中正确命题为（　）

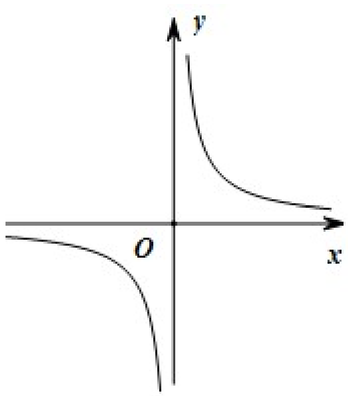
A．$a>b$是$3^a>3^b$的充分不必要条件

B．$\alpha>\beta$是$\cos\alpha<\cos\beta$的必要不充分条件

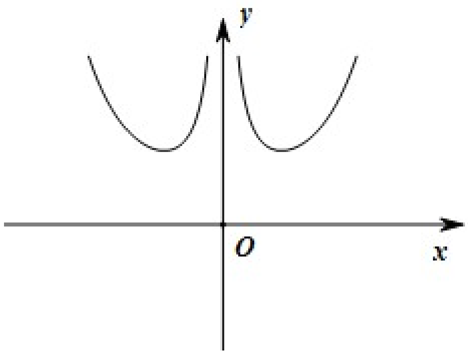
C．$a=0$是函数$f(x)=x^3+ax^2\ (x\in\mathbf{R})$为奇函数的充要条件

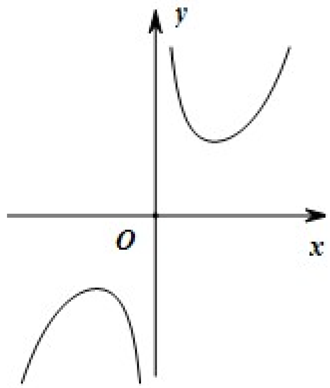
D．$f(2)<f(3)$是函数$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上单调递增的既不充分也不必要条件

4．函数$f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{x^2}$的图象大致为（　）

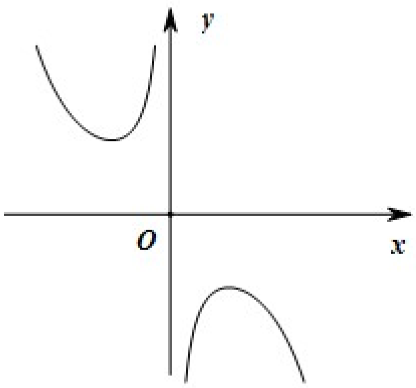
A．

B．



C. 

D.



5．小李在2022年1月1日采用分期付款的方式贷款购买一台价值a元的家电，在购买1个月后的2月1日第一次还款，且以后每月的1日等额还款一次，一年内还清全部贷款（2022年12月1日最后一次还款），月利率为r．按复利计算，则小李每个月应还（　）

A．$\dfrac{ar\left(1+r\right)^{11}}{\left(1+r\right)^{11}-1}$元　　B．$\dfrac{ar\left(1+r\right)^{12}}{\left(1+r\right)^{12}-1}$元

C．$\dfrac{a\left(1+r\right)^{11}}{11}$元　　D．$\dfrac{a\left(1+r\right)^{12}}{11}$元

6．记函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)(\omega>0)$的最小正周期为$T$．若$\pi 4\pi T<$　，且点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$和

直线$x=\dfrac{3\pi}{2}$分别是$y=f\left(x\right)$图像的对称中心和对称轴，则T=（　）

A．$\dfrac{4\pi}{3}$　　B．$\dfrac{5\pi}{3}$　　C．$\dfrac{8\pi}{3}$　　D．$\dfrac{10\pi}{3}$

7．已知$a\ln a=1$，$m=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+a}$，$\mathrm{e}^{n}=3^{a}$，$a^{p}=2^{\mathrm{e}}$，则（　）

A．$n<p<m$　　B．$p<n<m$　　C．$n<m<p$　　D．$m<p<n$

8．在$\triangle ABC$中，已知$A=60°$，$BC=2$，D为BC的中点，则线段AD长度的最大值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

二、多选题

9．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P满足$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1D_1}(0\le\lambda\le 1)$，则（　）

A．若$\lambda=1$，则AP与BD所成角为$\dfrac{\pi}{4}$　　B．若$AP\perp BD$，则$\lambda=\dfrac{1}{2}$

C．$AP\parallel$平面BC_1D　　D．$A_1C\perp AP$

10．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$S_n+a_n=1$对于$\forall n\in N^{*}$恒成立，若定义$S_n^{(1)}=S_n$，

$S_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}S_i^{(k-1)}\left(k\geq 2\right)$，则以下说法正确的是（　）

A．$\{a_n\}$是等差数列　　B．$S_n^{(3)}=\frac{n^2-n+2}{2}-\frac{1}{2^n}$

C．$S_n^{(k+2)}-S_n^{(k)}=\frac{A_{n+k-1}^{k+1}}{(k+1)!}$　　D．存在n使得$S_n^{(2022)}=\frac{n^{2021}}{2022!}$

11．已知实数 a，$b>0$，$2a+b=4$，则下列说法中正确的有（　）

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$有最小值$\frac{3}{2}$　　B．a^2+b^2有最小值$\frac{16}{5}$

C．$4a+2b$ 有最小值 8　　D．$\ln a+\ln b$ 有最小值 ln2

12．高斯是德国著名数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数.例如$[-3.5\ ]=-4,[3.5]=3.$已知函数$f(x)=\cos x+|\cos x|$，函数$g(x)=[f(x)],$则下列说法中正确的有（　）

A．函数$f(x)$在区间$(0,\pi)$ 上单调递增

B．函数$f(x)$图象关于直线$x=k\pi(k\ \in Z\ )$对称

C．函数$g(x)$的值域是$\{0,1,2\}$

D．方程$g(x)=x$只有一个实数根

三、填空题

13．已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，若$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增，则$\omega$的取值范围是_____.

14．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数$f(x)$满足以下两个性质：①$f(-x)=f(x)$，②

$f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=0$，满足①②的一个函数是____.

15．干支纪年是中国古代的一种纪年法.分别排出十天干与十二地支如下：

天干：甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

地支：子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

把天干与地支按以下方法依次配对：把第一个天干“甲”与第一个地支“子”配出“甲子”，把第二个天干“乙”与第二个地支“丑”配出“乙丑”，$\cdots$，若天干用完，则再从第一个天干开始循环使用，若地支用完，则再从第一个地支开始循环使用.已知2022年是壬寅年，则13^8年以后是_____年.

16．在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，斜边为AB，点D在边BC上，设$\angle ADC=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，若$\sin B=\dfrac{\sin\left(\alpha-B\right)}{\sin\alpha}$，则$\dfrac{AB^2+AD^2}{AD\cdot AB}$用$\beta$表示为______.

四、解答题

17．已知在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，且交BC于D.

(1)用正弦定理证明：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$；

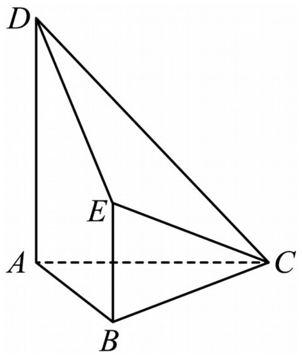
(2)若$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$，求BD.

18．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1(n\in N^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=3^{n-1}$，令$c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

19．如图，在五面体$ABCDE$中，$BE\perp$平面ABC，$AD\parallel BE$，$AD=2BE$，$AB=BC$.



(1)求证：平面$CDE \perp$平面ACD；

(2)若$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，五面体ABCDE的体积为$\sqrt{2}$，求平面CDE与平面$ABED$所成角的余弦值.

20．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$.

(1)若$C=\frac{3\pi}{4}$，求$\tan B$的值；

(2)若$A=B$，$c=2$，求$\triangle ABC$的面积.

21．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_2+a_3+a_4=39$，$a_5=2a_4+3a_3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{n}{a_n}$，求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

22．已知函数$f(x)=me^x-\frac{3}{2}x^2-2x$.

(1)当$m\geq 3$时，证明：$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

(2)若函数$g(x)=f(x)-\cos x$存在两个不同的极值点，求实数m的取值范围.

参考答案：

1．A

【分析】先求$\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)$，然后求$\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B$．

【详解】$A=\{x\mid x-1>0\}=\{x\mid x>1\}$，

$\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)=\{x\mid x\leq 1\}$，$\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B=\{x\mid 0<x\leq 1\}$．

故选：A

2．D

【分析】化简复数，由纯虚数得出参数a的值，化简得到复数，即可求得$|z|$．

【详解】解：由题意，

在$z=\left(2+\mathrm{i}^3\right)\left(1\quad a\mathrm{i}\right)$中，

$z=(2-\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})=2+2a\mathrm{i}-\mathrm{i}+a=2+a+(2a-1)\mathrm{i}$

$\because z$为纯虚数，

$\therefore 2+a=0, 2a-1\neq 0$，

$\therefore a=-2$，

$\therefore z=-5\mathrm{i}$

$\therefore |z|=5$，

故选：D．

3．C

【分析】对于A项，根据$\varphi(x)=3^x$单调性验证充分性和必要性；

对于B项，取特值$\alpha=-\frac{\pi\pi}{3},\beta=\frac{\ }{6}$验证必要性不成立；

对于C项，充分性考察幂函数的奇偶性，必要性求出$f(-x)$和$-f(x)$对应系数相等；

对于D项，必要性根据幂函数的单调性验证.

【详解】对于A项，设函数$\varphi(x)=3^x$，因为$\varphi(x)=3^x$在R上单调递增

则$\varphi(a)=3^a,\varphi(b)=3^b$

因为$\varphi(x)=3^x$在R上单调递增，当$a>b$时$\varphi(a)>\varphi(b)$，即$3^a>3^b$，所以充分性成立；

若$3^a>3^b$即$\varphi(a)>\varphi(b)$，又因为$\varphi(x)=3^x$在R上单调递增，所以$a>b$，必要性成立；

所以“$a>b$”是“$3^a>3^b$”的充要条件，A错.

对于B项，取$\alpha=-\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{6}$满足$\cos\alpha<\cos\beta$，但是不满足$\alpha>\beta$，则“$\alpha>\beta$”不是“

$\cos\alpha<\cos\beta$”的必要条件，B错.

对于C项，$a=0$时，$f(x)=x^3$的定义域为R关于原点对称，又因为

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以$f(x)=x^3$是定义在R奇函数，所以充分性成立；

若$f(x)=x^3+ax^2$为奇函数，则$f(-x)=(-x)^3+a(-x)^2=-x^3+ax^2$

并且$-f(x)=-x^3-ax^2$，又因为$f(-x)=-f(x)$，则$a=0$，所以必要性成立.

故$a=0$是函数$f(x)=x^3+ax^2\ (x\in\mathbf{R})$为奇函数的充要条件，所以C正确.

对于D项，因为函数$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以$f(2)<f(3)$，故必要性成立，

所以D项不正确.

故选:C.

4．C

【解析】分析函数$f(x)$的奇偶性及其在$(0,+\infty)$上的函数值符号，$f(2)$与$f(3)$的大小关系，

由此可得出合适的选项.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\frac{3^{x}-3^{-x}}{x^{2}}$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq 0\right\}$，$f\left(-x\right)=\frac{3^{-x}-3^{x}}{\left(-x\right)^{2}}=-\frac{3^{x}-3^{-x}}{x^{2}}=-f\left(x\right)$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，排除B选项；

当 $x>0$ 时，$3^{x}>3^{-x}$，则 $f\left(x\right)>0$，排除D选项；

$\because f\left(2\right)=\frac{9-\frac{1}{9}}{4}=\frac{20}{9}=3-\frac{7}{9}$，$f\left(3\right)=\frac{3^{3}-\frac{1}{3^{3}}}{9}=3-\frac{1}{243}$，则 $f\left(2\right)<f\left(3\right)$，所以，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2,3\right)$ 上不是减函数，排除A选项.

故选：C.

【点睛】思路点睛：函数图象的辨识可从以下方面入手：

（1）从函数的定义域，判断图象的左右位置；

（2）从函数的值域，判断图象的上下位置.

（3）从函数的单调性，判断图象的变化趋势；

（4）从函数的奇偶性，判断图象的对称性；

（5）函数的特征点，排除不合要求的图象.

5．A

【分析】小李的还款 x 元每月要产生复利，小李的贷款 a 元每月也要产生复利.这是本题的关键所在.

【详解】设每月还 x 元，按复利计算，则有

$$x\left[1+\left(1+r\right)+\left(1+r\right)^{2}+\cdots+\left(1+r\right)^{10}\right]=a\left(1+r\right)^{11}$$

即 $\frac{1\times\left[1-\left(1+r\right)^{11}\right]}{1-\left(1+r\right)}x=a\left(1+r\right)^{11}$

解之得 $x=\dfrac{ar\left(1+r\right)^{11}}{\left(1+r\right)^{11}-1}$，

故选：A

6．A

【分析】求出对称中心和对称轴之间的距离关系，根据周期的取值范围即可确定周期的值

【详解】解：由题意

在 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)(\omega>0)$ 中，

设对称点和与对称轴在 x 轴上的交点间的距离为 x

对称中心：$\omega x_1+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$

对称轴：$\omega x_2+\varphi=k\pi\left(k\in Z\right)$

由几何知识得，$x=\left|x_1-x_2\right|$

解得：$x=\dfrac{T}{4}+K\cdot\dfrac{T}{2}$（$K$ 为属于 $\mathbf{N}^*$ 的参数）

∵ $\pi<T<4\pi$，且点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 和直线 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 分别是 $y=f\left(x\right)$ 图像的对称中心和对称轴

∴ $x=\dfrac{T}{4}+K\cdot\dfrac{T}{2}=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi$

解得：$T=\dfrac{4\pi}{2K+1}\left(K\in \mathrm{N}^*\right)$

∵ $\pi<T<4\pi$

∴ $K=1$，$T=\dfrac{4\pi}{3}$

故选：A.

7．A

【分析】对$f(x)$求导，得出$f(x)$的单调性，可知$a\in(1,\mathrm{e})$，可求出m,n的大小，对$a^{p}=2^{\mathrm{e}}$

两边取对数，则$p=a\mathrm{e}\ln 2$，可得$p>n$，最后比较$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+a}$与$a\mathrm{e}\ln 2$大小，即可得出答案.

【详解】$f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1=0$，$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

令$f'(x)>0$，解得：$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$；令$f'(x)<0$，解得：$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上单调递增，

$f\left(1\right)=0<1$，$f\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}>1$，$a\ln a=1$，则$a\in(1,\mathrm{e})$，$m=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+a}\in\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\mathrm{e}}\right)$，

$n=a\ln 3\in(\ln 3,\mathrm{e}\ln 3)$，$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}>\mathrm{e}\ln 3$，$\therefore$ $m>n$，排除D.

$p\ln a=\mathrm{e}\ln 2$，则$\frac{p}{a}=\mathrm{e}\ln 2$，$p=a\mathrm{e}\ln 2$，$\mathrm{e}\ln 2>\ln 3$，$\therefore$ $p>n$，排除B.

比较$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+a}$与$a\mathrm{e}\ln 2$大小，先比较$\mathrm{e}^{a-\frac{1}{2}}$与$a\ln 2$大小，

$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}}-x-\frac{1}{2},x\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}}-1,x\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，

因为$x\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，所以$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}}-1>0$

所以$f\left(x\right)$在$\left(1,\mathrm{e}\right)$上单调递增，$f\left(x\right)_{\min}>f\left(1\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}>0$，

所以$e^{a-\frac{1}{2}}>a+\frac{1}{2}$，所以$e^{a-\frac{1}{2}}>a+\frac{1}{2}>a\ln 2+\frac{1}{2}>a\ln 2$，

∴$m>p$，综上$m>p>n$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题涉及三个量的大小比较，关键点在于构造函数$f(x)=x\ln x$，运用函数的单调性可求出a的大小，即可判断m,n的大小，p,n的大小，最后构造函数$f\left(x\right)=e^{x-\frac{1}{2}}-x-\frac{1}{2},x\in\left(1,e\right)$，比较$p$与$m$的大小即可得出答案.

8．C

【分析】由余弦定理得到$b^2+c^2=4+bc$，再利用基本不等式得到$bc\le 4$，然后由$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$求解.

【详解】解：由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$，

即$4=b^2+c^2-bc$，即$b^2+c^2=4+bc$，

所以$4=b^2+c^2-bc\ge bc$，

∴$bc\le 4$，当且仅当$b=c$时等号成立.

因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(b^2+c^2+bc\right)$，

$=\frac{1}{4}(4+bc+bc)\le\frac{1}{4}(4+8)=3$，

$\therefore|\overrightarrow{AD}|\le\sqrt{3}$，

故选：C.

9．BCD

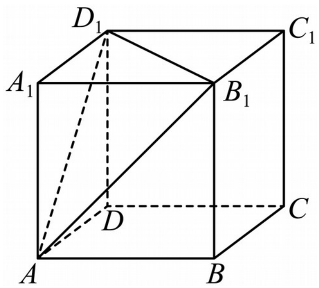
【分析】AD_1与BD所成角为AD_1与B_1D_1所成角，为$60°$，A错误，建系得到

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}=-\lambda+1-\lambda=0$，B正确，故面$AD_1B_1$//面$C_1BD$，C正确，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，D正确，

得到答案.

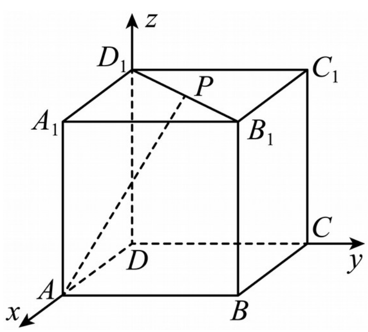
【详解】对选项A：$\lambda=1$时P与D_1重合，AD_1与BD所成角为AD_1与B_1D_1所成角，$\triangle AB_1D_1$

为等边三角形，则AP与BD所成角为$60°$，错误；



对选项B：如图建立空间直角坐标系，令$AD=1$，$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1D_1}$，$P(1-\lambda,1-\lambda,1)$，

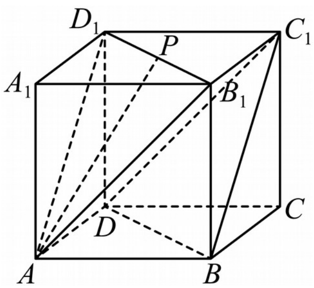
$\overrightarrow{AP}=(-\lambda,1-\lambda,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}=-\lambda+1-\lambda=0$，$\lambda=\frac{1}{2}$，正确；



对选项C：$D_1B_1 // BD$，$D_1B_1 \not\subset$平面BDC_1，$BD \subset$平面BDC_1，故$D_1B_1 //$平面BDC_1，同理

可得$AD_1 //$平面C_1BD，$AD_1 \cap B_1D_1 = D_1$，故面$AD_1B_1 //$面C_1BD，$AP \subset$平面AD_1B_1，$AP //$

平面C_1BD，正确；



对选项D：$\overrightarrow{A_1C} = (-1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AP} = \lambda + 1 - \lambda - 1 = 0$，$A_1C \perp AP$，正确.

故选：BCD

10．BC

【分析】利用退位相减法可得数列的通项及S_n即可判断A选项，按照给出的定义求出$S_n^{(3)}$即可判断B选项，数学归纳法和累加法即可判断C、D选项.

【详解】当$n=1$时，$a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$，

当$n \geq 2$时，由$S_n + a_n = 1$，得$S_{n-1} + a_{n-1} = 1$，故$a_n + a_n - a_{n-1} = 0$，即$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$为等比数列，首项$a_1 = \frac{1}{2}$，公比$q = \frac{1}{2}$，故$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，

A选项错误；

则$S_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以$S_n^{(1)} = S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$S_n^{(2)}=\sum_{i=1}^{n}S_n^{(1)}=S_1^{(1)}+S_2^{(1)}+\cdots+S_n^{(1)}=1-\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S_n{}^{(3)}=\sum_{i=1}^{n}S_n^{(2)}=0+\frac{1}{2}+1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(0+n-1)n}{2}+1-\frac{1}{2^n}=\frac{n^2-n+2}{2}-\frac{1}{2^n}$，B选项正确；

当$k=1$时，$S_n^{(3)}-S_n^{(1)}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{\mathrm{A}_n^2}{2!}$，

假设当$k=m$时，$S_n{}^{(m+2)}-S_n{}^{(m)}=\frac{\mathrm{A}_{n+m-1}^{m+1}}{(m+1)!}=\mathrm{C}_{n+m-1}^{m+1}$成立，

当$k=m+1$时，由$S_n{}^{(k)}=S_1{}^{(k-1)}+S_2{}^{(k-1)}+\cdots+S_{n-1}{}^{(k-1)}+S_n{}^{(k-1)}=S_{n-1}{}^{(k)}+S_n{}^{(k-1)}$可得

$S_n{}^{(m+3)}-S_n{}^{(m+1)}=S_{n-1}{}^{(m+3)}+S_n{}^{(m+2)}-\left(S_{n-1}{}^{(m+1)}+S_n{}^{(m)}\right)=S_{n-1}{}^{(m+3)}-S_{n-1}{}^{(m+1)}+S_n{}^{(m+2)}-S_n{}^{(m)}$

$=S_{n-1}{}^{(m+3)}-S_{n-1}{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{n+m-1}^{m+1}$，则$S_{n-1}{}^{(m+3)}-S_{n-1}{}^{(m+1)}=S_{n-2}{}^{(m+3)}-S_{n-2}{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{n+m-2}^{m+1}$，

$S_{n-2}{}^{(m+3)}-S_{n-2}{}^{(m+1)}=S_{n-3}{}^{(m+3)}-S_{n-3}{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{n+m-3}^{m+1}$，└，$S_3{}^{(m+3)}-S_3{}^{(m+1)}=S_2{}^{(m+3)}-S_2{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}$，

$S_2{}^{(m+3)}-S_2{}^{(m+1)}=S_1{}^{(m+3)}-S_1{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}$，将上式相加可得

$S_n{}^{(m+3)}-S_n{}^{(m+1)}=S_1{}^{(m+3)}-S_1{}^{(m+1)}+\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+m-2}^{m+1}+\mathrm{C}_{n+m-1}^{m+1}$，又$S_1{}^{(k)}=S_1{}^{(k-1)}=S_1{}^{(1)}$，则

$S_1{}^{(m+3)}-S_1{}^{(m+1)}=0$，故

$S_n{}^{(m+3)}-S_n{}^{(m+1)}=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+m-2}^{m+1}+\mathrm{C}_{n+m-1}^{m+1}=\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+m-2}^{m+1}+\mathrm{C}_{n+m-1}^{m+1}$