

## 2023-2024 学年重庆市高一下学期 3 月月考数学模拟试题

注意事项:

1. 作答前,考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卡的规定位置上.
2. 作答时,务必将答案写在答题卡上,写在试卷及草稿纸上无效.
3. 考试结束后,将答题卡交回,试卷自行保存. 试卷满分 150 分,考试时长 120 分钟.

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ , 则  $C =$  ( )

- A.  $\frac{\pi}{4}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足:  $\vec{a} = (1, 3), (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$  ( )

- A. 1                          B. 3                          C.  $\sqrt{10}$                       D. 10

3. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $A = 2B, a = 2\sqrt{2}, b = 2$ , 则  $c =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B. 2                          C.  $2\sqrt{2}$                       D.  $2\sqrt{3}$

4. 在  $\triangle ABC$  中, 动点  $P$  满足  $\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP}$ , 则  $P$  点轨迹一定通过  $\triangle ABC$  的 ( )

- A. 外心                      B. 内心                      C. 重心                      D. 垂心

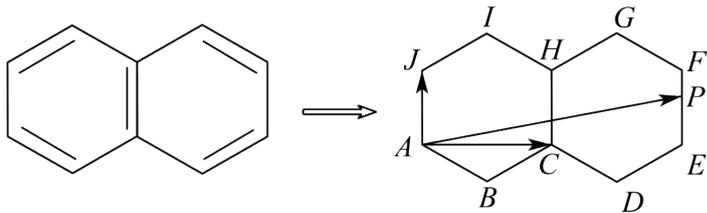
5. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $A = 60^\circ, b = 2$ , 且  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ , 则

$$\frac{b+c}{\sin B + \sin C} =$$
 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$                       C.  $\frac{2\sqrt{7}}{3}$                       D.  $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

6. 键线式可以直观地描述有机物的结构, 在有机化学中广泛使用. 有机物“萘”可以用下左图所示的键线式表示, 其结构简式可以抽象为下右图所示的图形. 已知  $ABCHIJ$  与  $CDEFGH$  为全等的正六边形. 若点  $P$  为右边正六边形  $CDEFGH$  的边界 (包括顶点) 上的动点, 且向量

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AC} + u \overrightarrow{AJ},$$
 则实数  $\lambda + u$  的取值范围为 ( )



- A.  $[0,2]$       B.  $[-1,3]$       C.  $[1,3]$       D.  $[-1,2]$

7. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\frac{5\cos B - 8\cos C}{8c - 5b} = \frac{\cos A}{a}$ , 又  $\triangle ABC$  的面积  $S = 10\sqrt{3}$ , 且  $B + C = 2A$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} =$  ( )

- A. 64      B. 84      C. -69      D. -89

8. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  满足:  $\vec{b}$  为单位向量, 且  $\vec{a} + 2\vec{b}$  和  $\vec{a} - 2\vec{b}$  相互垂直, 又对任意  $\lambda \in R$  不等式

$|\vec{a} - \lambda\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$  恒成立, 若  $\vec{c} = \frac{u+2}{3}\vec{a} + \frac{4-u}{2}\vec{b} (u \in R)$ , 则  $|\vec{c}|$  的最小值为 ( )

- A. 1      B.  $\frac{6\sqrt{3}}{5}$       C.  $\frac{5\sqrt{13}}{13}$       D.  $\frac{6\sqrt{39}}{13}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于同一平面内的任意三个向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 下列四种说法错误的有 ( )

A.  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

B. 若  $\vec{a} // \vec{b}$ , 且  $\vec{b} // \vec{c}$ , 则  $\vec{a} // \vec{c}$

C. 若  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 则  $\vec{a} = \vec{b}$  或  $\vec{a} = -\vec{b}$

D.  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{c}| + |\vec{c} - \vec{b}|$

10. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且已知  $a = 2$ , 则 ( )

A. 若  $A = 45^\circ$ , 且  $\triangle ABC$  有两解, 则  $b$  的取值范围是  $(2, 2\sqrt{2})$

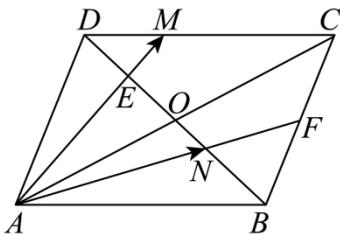
B. 若  $A = 45^\circ$ , 且  $\triangle ABC$  恰有一解, 则  $b$  的取值范围是  $(0, 2]$

C. 若  $c = 3$ , 且  $\triangle ABC$  为钝角三角形, 则  $b$  的取值范围是  $(\sqrt{13}, 5)$

D. 若  $c = 3$ , 且  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 则  $b$  的取值范围是  $(\sqrt{5}, \sqrt{13})$

11. 在等腰  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 4, CA = CB = 8$ , 若  $H, O, G, I$  分别为  $\triangle ABC$  的垂心、外心、重心和





16. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $c = 1, 2\sin A \cos B = a \sin A - b \sin B + \frac{1}{4} b \sin C$ ,

若  $AD$  为  $BC$  边上的中线, 且  $\cos \angle BAD = \frac{1}{8}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积等于\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 第 17 小题 10 分, 其余小题每题 12 分, 共 70 分. 解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知向量  $\vec{OA} = (1, 2), \vec{OB} = (4, 3), \vec{OC} = (3, m)$ .

(1) 若向量  $\vec{OA} \parallel \vec{OC}$ , 求向量  $\vec{AB}$  与向量  $\vec{OC}$  的夹角的大小;

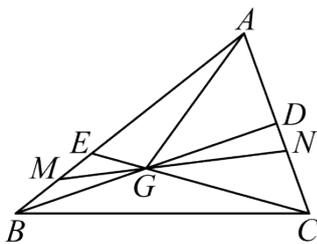
(2) 若向量  $\vec{OB} \perp \vec{OC}$ , 求向量  $\vec{AB}$  在向量  $\vec{OC}$  方向上的投影向量的坐标.

18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a \sin B = b \sin \left( A + \frac{\pi}{3} \right)$ .

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 角  $A$  的平分线与  $BC$  交于点  $D$ , 且  $AD = \sqrt{3}$ , 求边  $a$  的值.

19. 如图: 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\vec{AE} = \frac{2}{3} \vec{AB}, \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AC}, BD$  与  $CE$  交于点  $G$ .



(1) 用向量  $\vec{AB}, \vec{AC}$  表示向量  $\vec{AG}$ ;

(2) 过点  $G$  作直线  $MN$ , 分别交线段  $AB, AC$  于点  $M, N$ , 设  $\vec{AM} = m \vec{AB}, \vec{AN} = n \vec{AC}$ , 若

$|\vec{AB}| = 6, |\vec{AC}| = 4, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 15$ , 当  $m + 2n$  取得最小值时, 求模长  $|\vec{MN}|$ .

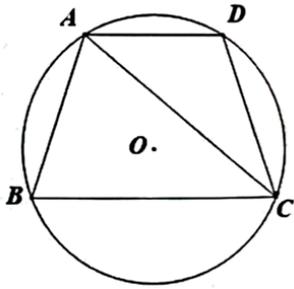
20. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\sqrt{3} a \cos B = b \sin A$ , 又以  $a, b, c$  为边长的三个

正三角形的面积分别为  $S_1, S_2, S_3$ , 且  $S_1 + S_3 - S_2 = 10\sqrt{3}$ .

(1)求  $\triangle ABC$  的面积:

(2)若  $\sin A \sin C = \frac{30}{49}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

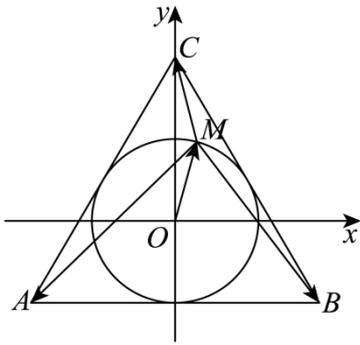
21. 为改进城市旅游景观面貌, 提高市民的生活幸福指数, 城建部拟在以水源  $O$  为圆心空地上, 规划一个四边形形状的动植物园. 如图: 四边形  $ABCD$  内接于圆  $O$  (注: 圆的内接四边形的对角互补),  $\triangle ADC$  为动物园区,  $\triangle ABC$  为植物园区 (为了方便植物园的植物浇水灌溉, 水源  $O$  必须在植物园区  $\triangle ABC$  的内部或边界上). 又根据规划已知  $AB = 4$  千米,  $BC = 6$  千米.



(1)若  $\angle ABC = 60^\circ$ , 且  $\angle DAC = 45^\circ$ , 求边  $DC$  的长为多少千米?

(2)若线段  $CD + DA = 6$  千米, 求动植物园的面积 (即四边形  $ABCD$  的面积) 的最小值为多少平方千米?

22. 定义函数  $f(x) = m \sin x + n \cos x$  的“源向量”为  $\overline{OM} = (m, n)$ , 非零向量  $\overline{OM} = (m, n)$  的“伴随函数”为  $f(x) = m \sin x + n \cos x$ , 其中  $O$  为坐标原点.



(1)若向量  $\overline{OM} = (1, \sqrt{3})$  的“伴随函数”为  $f(x)$ , 求  $f(x)$  在  $x \in [0, \pi]$  的值域;

(2)若函数  $g(x) = \sqrt{3} \sin(x + \alpha)$  的“源向量”为  $\overline{OM}$ , 且以  $O$  为圆心,  $|\overline{OM}|$  为半径的圆内切于正  $\triangle ABC$  (顶点  $C$  恰好在  $y$  轴的正半轴上), 求证:  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$  为定值;

(3)在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若函数  $h(x)$  的“源向量”为  $\overline{OM} = (0, 1)$ , 且已知  $a = 8, h(A) = \frac{3}{5}$ , 求  $|\overline{AB} + \overline{AC}| - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$  的取值范围.



1. B

【分析】

根据余弦定理得到  $\cos C = \frac{1}{2}$ ，求出答案.

【详解】

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } C \in (0, \pi),$$

$$\text{解得 } C = \frac{\pi}{3}.$$

故选: B

2. D

【分析】

根据数量积的运算律，结合模长公式求解即可.

【详解】

$$\text{由 } \vec{a} = (1, 3), \vec{a}^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\text{由 } (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}, \text{ 得 } (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 = 10,$$

故选: D.

3. B

【分析】根据题意，由正弦定理求得  $B = \frac{\pi}{4}$ ，可得  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形，可求得  $b$ .

【详解】由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，得  $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 2B} = \frac{2}{\sin B}$ ，即  $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以  $B = \frac{\pi}{4}$ ，则  $A = \frac{\pi}{2}$ ，则  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形，

所以  $c = b = 2$ ，

故选: B.

4. A

【分析】

由  $\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP}$  变形得  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP}) = 0$ ，设  $AB$  的中点为  $E$ ，推出  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EP}$ ，点  $P$  在线段  $AB$  的中垂线上，再根据外心的性质可得答案.

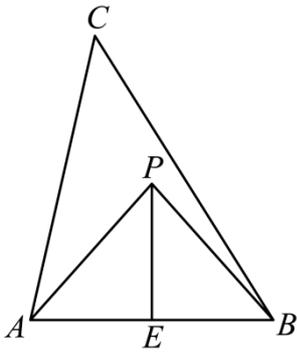
【详解】

因为  $\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{CP}$ ,

所以  $2\overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = (\overline{CB} - \overline{CA}) \cdot (\overline{CB} + \overline{CA}) = \overline{AB} \cdot (\overline{CB} + \overline{CA})$ ,

所以  $\overline{AB} \cdot (2\overline{CP} - \overline{CB} - \overline{CA}) = \overline{AB} \cdot (\overline{BP} + \overline{AP}) = 0$ ,

设  $AB$  的中点为  $E$ , 则  $\overline{BP} + \overline{AP} = 2\overline{EP}$ , 则  $\overline{AB} \cdot 2\overline{EP} = 0$ ,



所以  $\overline{AB} \perp \overline{EP}$ , 所以点  $P$  在线段  $AB$  的中垂线上, 故点  $P$  的轨迹过  $\triangle ABC$  的外心.

故选: A

5. B

【分析】

根据数量积运算先求出  $c$ , 再由正、余弦定理求解.

【详解】

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = bc \cos A = 3$ , 所以  $c = 3$ ,

则  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7$ , 即  $a = \sqrt{7}$ ,

由正弦定理,  $\frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ .

故选: B.

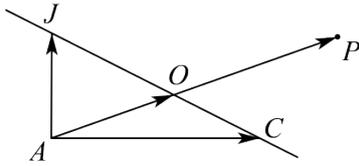
6. C

【分析】由“等和线定理”结合图形分析得解.

【详解】

由平面向量共线定理可得,  $\overline{AO} = x\overline{AC} + y\overline{AJ}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $O, C, J$  三点共线的充要条件是

$x + y = 1$ .



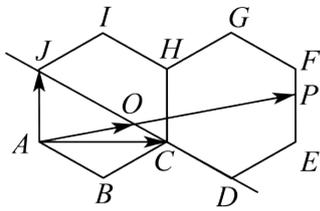
下面先证明“等和线定理”，

如图，设  $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AO}$ ， $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AJ}$ ，

因为  $O, C, J$  三点共线，所以存在  $x, y \in \mathbb{R}$ ，使得  $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AJ}$ 。

$$\therefore \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AO} = k(x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AJ}) = kx\overrightarrow{AC} + ky\overrightarrow{AJ}，$$

$$\therefore \lambda = kx, \mu = ky, \text{ 则 } \lambda + \mu = k(x + y) = k。$$



由“等和线定理”结合图形可知：当点  $P$  在  $CD$  上时，易得  $\lambda + \mu = 1$ ，

当点  $P$  在  $DE$  上时，易得  $1 \leq \lambda + \mu \leq 2$ ，

当点  $P$  在  $EF$  上时，易得  $2 \leq \lambda + \mu \leq 3$ ，

当点  $P$  在  $FG$  上时，易得  $\lambda + \mu = 3$ ，

当点  $P$  在  $GH$  上时，易得  $2 \leq \lambda + \mu \leq 3$ ，

当点  $P$  在  $CH$  上时，易得  $1 \leq \lambda + \mu \leq 2$ ，

综上，可得  $1 \leq \lambda + \mu \leq 3$ 。

故选：C。

7. C

【分析】

利用正弦定理边化角，结合两角和差正弦公式整理可求得  $b, c$  关系，再由三角形面积公式和余弦定理求得三边，再由数量积运算得到结果

【详解】

解法一：由  $\frac{5\cos B - 8\cos C}{8c - 5b} = \frac{\cos A}{a}$ ，得  $\frac{5\cos B - 8\cos C}{8\sin C - 5\sin B} = \frac{\cos A}{\sin A}$ ，

则  $5\sin(A+B) = 8\sin(A+C)$ ，

即  $5\sin C = 8\sin B$ ，即  $5c = 8b$ ；

又  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = 10\sqrt{3}$ ，即  $bc\sin A = 20\sqrt{3}$ ；

又  $B+C=2A$ ，得  $A = \frac{\pi}{3}$ ；

综上  $c=8, b=5$ 。

则  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA = 49$ ，即  $a=7$ 。

由  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ ，

平方知  $c^2 + a^2 + b^2 + 2(\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}) = 0$

所以  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = -69$ 。

解法二： $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot (\overline{AB} + \overline{CA}) - \overline{AC} \cdot \overline{AB}$

$= -a^2 - bccosA = -69$ 。

故选：C。

8. D

【分析】

根据已知由向量垂直可得  $\vec{a}$  的模，再由不等式  $|\vec{a} - \lambda\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$  恒成立，结合图象可得  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，

从而可得  $\vec{a}, \vec{b} = 60^\circ$ ，接下来方法一，直接对  $|\vec{c}|$  进行平方化简，由二次函数最值可解；方法二，

由三点共线基本定理，结合三角形面积公式和余弦定理可解。

【详解】

$\vec{a} + 2\vec{b}$  和  $\vec{a} - 2\vec{b}$  相互垂直，

则  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = 0, |\vec{b}| = 1$ ，则  $|\vec{a}| = 2$ ，

结合图象， $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}, \overline{OB_1} = \lambda\vec{b}$ ，

则  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overline{BA}|, |\vec{a} - \lambda\vec{b}| = |\overline{B_1A}|$ ，

因为  $|\vec{a} - \lambda\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$  恒成立，则  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ ，

即  $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$  , 则  $\vec{a},\vec{b}=60^\circ$  ,

法 (一) :  $|\vec{c}|^2=\frac{u^2+4u+4}{9}\vec{a}^2+\frac{16-8u+u^2}{4}\vec{b}^2+\frac{(u+2)(4-u)}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$   
 $=\frac{4u^2+16u+16}{9}+\frac{16-8u+u^2}{4}+\frac{-u^2+2u+8}{3}=\frac{4u^2+16u+16}{9}+\frac{16-8u+u^2}{4}+\frac{-u^2+2u+8}{3}$   
 $=\frac{13u^2+16u+304}{36}$  对称轴  $u=-\frac{8}{13}$  时:

$|\vec{c}|_{\min}^2=\frac{108}{13}$  , 即  $|\vec{c}|_{\min}=\frac{6\sqrt{39}}{13}$

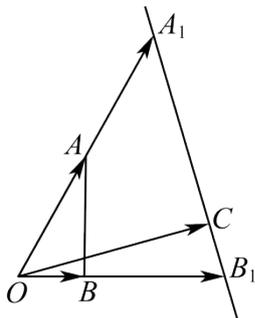
法 (二) :  $\vec{c}=\frac{u+2}{3}\vec{a}+\frac{4-u}{2}\vec{b}=\frac{u+2}{6}\cdot 2\vec{a}+\frac{4-u}{6}\cdot 3\vec{b}$  , 因为  $\frac{u+2}{6}+\frac{4-u}{6}=1$  ,

所以向量  $2\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$  的终点  $A_1, C, B_1$  共线 (起点重合),

则  $2\vec{a}, 3\vec{b}=60^\circ, \triangle OA_1B_1$  的面积  $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$  ,

$|A_1B_1|=\sqrt{4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot \cos 60^\circ}=\sqrt{13}$  , 所以  $|\vec{c}|_{\min}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{39}}{13}$  .

故选: D .



关键点点睛: 数形结合发现,  $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OB_1}=\lambda\vec{b}$  , 则  $|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{BA}|, |\vec{a}-\lambda\vec{b}|=|\overrightarrow{B_1A}|$  , 因为

$|\vec{a}-\lambda\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$  恒成立, 则  $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$  .

## 9. ABC

**【分析】** 对 A, 根据向量的数量积不满足结合律可判断, 对 B, 若  $\vec{b}=\vec{0}$  , 则  $\vec{a}\parallel\vec{c}$  不一定成立, 对 C, 根据向量及向量模的概念可判断, 对 D, 由向量模的三角公式可判断.

**【详解】** 对于 A: 因为向量的数量积不满足结合律, 故选项 A 错误;

对于 B: 若  $\vec{b}=\vec{0}$  , 则  $\vec{a}\parallel\vec{c}$  不一定成立, 故选项 B 错误;

对于 C:  $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$  , 但是  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  不一定是共线同向或反向, 故选项 C 错误;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/517156035044006060>