

新疆阿克苏地区乌什县二中 2024 年高三 3 月“二诊”模拟考试数学试题

注意事项:

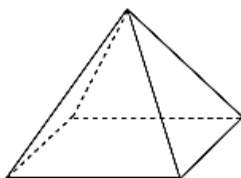
1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 将一块边长为 $a\text{cm}$ 的正方形薄铁皮按如图 (1) 所示的阴影部分裁下, 然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器, 将该容器按如图 (2) 放置, 若其正视图为等腰直角三角形, 且该容器的容积为 $72\sqrt{2}\text{cm}^3$, 则 a 的值为 ()



(1)



(2)

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

2. 已知复数 $z = \frac{(2+ai)i}{1-i}$ 是纯虚数, 其中 a 是实数, 则 z 等于 ()

- A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

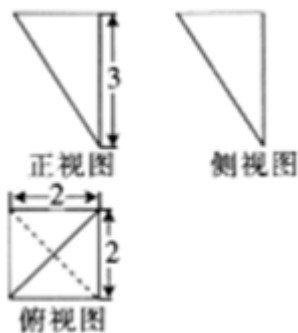
3. 欧拉公式为 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (i 虚数单位) 是由瑞士著名数学家欧拉发现的, 它将指数函数的定义域扩大到复数, 建立了三角函数和指数函数的关系, 它在复变函数论里非常重要, 被誉为“数学中的天桥”. 根据欧拉公式可知, $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 表示的复数位于复平面中的 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$. N 为自然数集, 则下列表示不正确的是 ()

- A. $1 \in M$ B. $M = \{-1, 1\}$ C. $\emptyset \subseteq M$ D. $M \subseteq N$

5. 已知某几何体的三视图如图所示, 其中正视图与侧视图是全等的直角三角形, 则该几何体的各个面中, 最大面的面积为 ()



- A. 2 B. 5 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{22}$

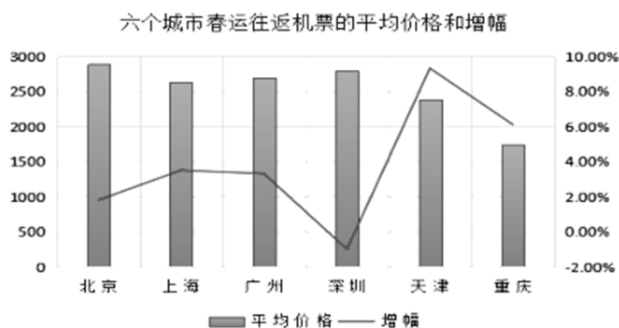
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}n(n+1)$ B. $\frac{1}{2}n(3n-1)$ C. $n^2 - n + 1$ D. $n^2 - 2n + 2$

7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则“ $a_1 < 0$ ”是“ $S_{2021} < 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 下图是民航部门统计的某年春运期间, 六个城市售出的往返机票的平均价格 (单位元), 以及相比于上一年同期价格变化幅度的数据统计图, 以下叙述不正确的是 ()



- A. 深圳的变化幅度最小, 北京的平均价格最高
B. 天津的往返机票平均价格变化最大
C. 上海和广州的往返机票平均价格基本相当
D. 相比于上一年同期, 其中四个城市的往返机票平均价格在增加

9. 已知 P 为圆 $C: (x-5)^2 + y^2 = 36$ 上任意一点, $A(-5, 0)$, 若线段 PA 的垂直平分线交直线 PC 于点 Q , 则 Q 点的轨迹方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \ (x < 0)$

D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \ (x > 0)$

10. 已知某口袋中有 3 个白球和 a 个黑球 ($a \in N^*$)，现从中随机取出一球，再换回一个不同颜色的球 (即若取出的是白球，则放回一个黑球；若取出的是黑球，则放回一个白球)，记换好球后袋中白球的个数是 ξ 。若 $E\xi = 3$ ，则 $D\xi =$ ()

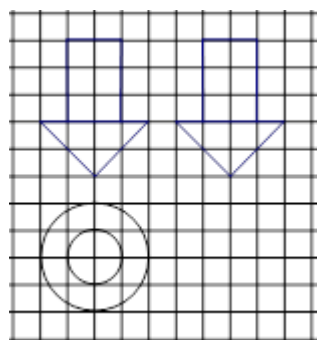
A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

11. 陀螺是中国民间最早的娱乐工具，也称陀罗。如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某个陀螺的三视图，则该陀螺的表面积为 ()



A. $(7 + 2\sqrt{2})\pi$

B. $(10 + 2\sqrt{2})\pi$

C. $(10 + 4\sqrt{2})\pi$

D. $(11 + 4\sqrt{2})\pi$

12. 已知命题 p ：任意 $x \geq 4$ ，都有 $\log_2 x \geq 2$ ；命题 q ： $a > b$ ，则有 $a^2 > b^2$ 。则下列命题为真命题的是 ()

A. $p \wedge q$

B. $p \wedge (\neg q)$

C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

D. $(\neg p) \vee q$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4x - 1, & x \geq 0, \\ 2x^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$ 是偶函数，直线 $y = t$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象自左向右依次交于四个不同点 A, B, C, D 。若 $AB = BC$ ，则实数 t 的值为_____。

14. $(x+1)(x-2)^6$ 展开式中 x^2 的系数为_____。

15. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域是_____。

16. 某校为了解家长对学校食堂的满意情况，分别从高一、高二年级随机抽取了 20 位家长的满意度评分，其频数分布表如下：

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)	合计

高一	1	3	6	6	4	20
高二	2	6	5	5	2	20

根据评分，将家长的满意度从低到高分三个等级：

满意度评分	评分 < 70 分	70 ≤ 评分 < 90	评分 ≥ 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

假设两个年级家长的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.现从高一、高二年级各随机抽取 1 名家长，记事件 A ：“高一家长的满意度等级高于高二家长的满意度等级”，则事件 A 发生的概率为_____.

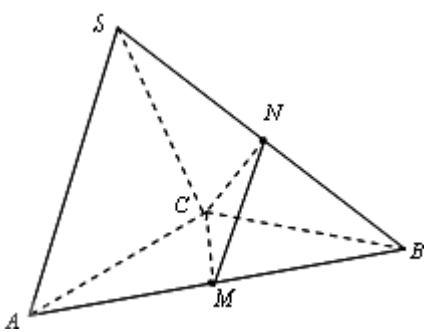
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$ (θ 为参数)，以原点 O 为极点，

x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

- (1) 求曲线 C 的普通方程；
 - (2) 求曲线 l 和曲线 C 的公共点的极坐标.
18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中， M 为直线 $y = x - 2$ 上动点，过点作 M 抛物线 $C: x^2 = y$ 的两条切线 MA ， MB ，切点分别为 A ， B ， N 为 AB 的中点.
- (1) 证明: $MN \perp x$ 轴；
 - (2) 直线 AB 是否恒过定点?若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由.

19. (12 分) 在三棱锥 $S-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，平面 $SAC \perp$ 平面 ABC ， $SA = SC = 2$ ， M 、 N 分别为 AB 、 SB 的中点.



- (1) 证明: $AC \perp SB$ ；
 - (2) 求三棱锥 $B-CMN$ 的体积.
20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 1|$ ($a \in R$).

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(II) 若存在 $x \in \mathbf{R}$ 满足不等式 $f(x) < 4$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \varphi \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数}),$$
 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系

中, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 3 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A, B (A, B 异于原点), 当斜率 $k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ 时, 求 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$ 的最小值.

22. (10 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$), 点 F 为抛物线的焦点, 焦点 F 到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 d_1 ,

焦点 F 到抛物线 C 的准线的距离为 d_2 , 且 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若 x 轴上存在点 M , 过点 M 的直线 l 与抛物线 C 相交于 P, Q 两点, 且 $\frac{1}{|PM|^2} + \frac{1}{|QM|^2}$ 为定值, 求点 M 的坐标.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

推导出 $PM + PN = a$, 且 $PM = PN$, $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $PM = \frac{a}{2}$, 设 MN 中点为 O , 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 由此能表示出该容器的体积, 从而求出参数的值.

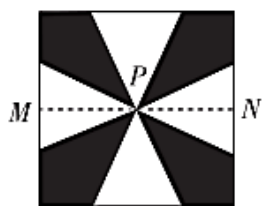
【详解】

解：如图（4）， $\triangle PMN$ 为该四棱锥的正视图，由图（3）可知， $PM + PN = a$ ，且 $PM = PN = \frac{a}{2}$ ，由 $\triangle PMN$ 为等腰直角三角形可知，

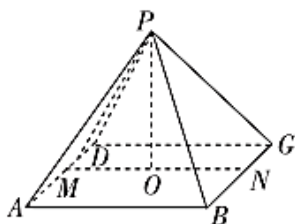
$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 设 } MN \text{ 中点为 } O, \text{ 则 } PO \perp \text{平面 } ABCD, \therefore PO = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a,$$

$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 = 72\sqrt{2}, \text{ 解得 } a = 12.$$

故选：D



(3)



(4)

【点睛】

本题考查三视图和锥体的体积计算公式的应用，属于中档题.

2、A

【解析】

对复数 z 进行化简，由于 z 为纯虚数，则化简后的复数形式中，实部为 0，得到 a 的值，从而得到复数 z .

【详解】

$$z = \frac{(2+ai)i}{1-i} = \frac{-a+2i}{1+i} = \frac{(-a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-a}{2} + \frac{a+2}{2}i$$

因为 z 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{2} = 0$ ，得 $a = 2$

所以 $z = 2i$.

故选 A 项

【点睛】

本题考查复数的四则运算，纯虚数的概念，属于简单题.

3、A

【解析】

$$\text{计算 } e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ 得到答案.}$$

【详解】

根据题意 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，故 $e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，表示的复数在第一象限.

故选：A.

【点睛】

本题考查了复数的计算，意在考查学生的计算能力和理解能力.

4、D

【解析】

集合 $M = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. N 为自然数集，由此能求出结果.

【详解】

解：集合 $M = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. N 为自然数集，

在 A 中， $1 \in M$ ，正确；

在 B 中， $M = \{-1, 1\}$ ，正确；

在 C 中， $\emptyset \subseteq M$ ，正确；

在 D 中， M 不是 N 的子集，故 D 错误.

故选：D.

【点睛】

本题考查命题真假的判断、元素与集合的关系、集合与集合的关系等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

5、D

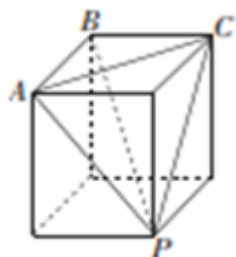
【解析】

根据三视图还原出几何体，找到最大面，再求面积.

【详解】

由三视图可知，该几何体是一个三棱锥，如图所示，将其放在一个长方体中，并记为三棱锥 $P-ABC$.

$S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PAB} = \sqrt{13}$ ， $S_{\triangle PBC} = \sqrt{22}$ ， $S_{\triangle ABC} = 2$ ，故最大面的面积为 $\sqrt{22}$. 选 D.



【点睛】

本题主要考查三视图的识别，复杂的三视图还原为几何体时，一般借助长方体来实现.

6、A

【解析】

利用数列的递推关系式，通过累加法求解即可。

【详解】

数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_n - a_{n-1} = n(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ ，

可得 $a_1 = 1$

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 4$$

...

$$a_n - a_{n-1} = n$$

以上各式相加可得：

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

故选：A。

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用，数列累加法以及通项公式的求法，考查计算能力。

7、C

【解析】

根据等比数列的前 n 项和公式，判断出正确选项。

【详解】

由于数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $S_{2021} = a_1 \cdot \frac{1-q^{2021}}{1-q}$ ，由于 $\frac{1-q^{2021}}{1-q} > 0$ ，所以

$a_1 < 0 \Leftrightarrow S_{2021} < 0$ ，故“ $a_1 < 0$ ”是“ $S_{2021} < 0$ ”的充分必要条件。

故选：C

【点睛】

本小题主要考查充分、必要条件的判断，考查等比数列前 n 项和公式，属于基础题。

8、D

【解析】

根据条形图可折线图所包含的数据对选项逐一分析，由此得出叙述不正确的选项.

【详解】

对于 A 选项，根据折线图可知深圳的变化幅度最小，根据条形图可知北京的平均价格最高，所以 A 选项叙述正确.

对于 B 选项，根据折线图可知天津的往返机票平均价格变化最大，所以 B 选项叙述正确.

对于 C 选项，根据条形图可知上海和广州的往返机票平均价格基本相当，所以 C 选项叙述正确.

对于 D 选项，根据折线图可知相比于上一年同期，除了深圳外，另外五个城市的往返机票平均价格在增加，故 D 选项叙述错误.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查根据条形图和折线图进行数据分析，属于基础题.

9、B

【解析】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ， $\left| |QC| - |QA| \right| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，计算得到答案.

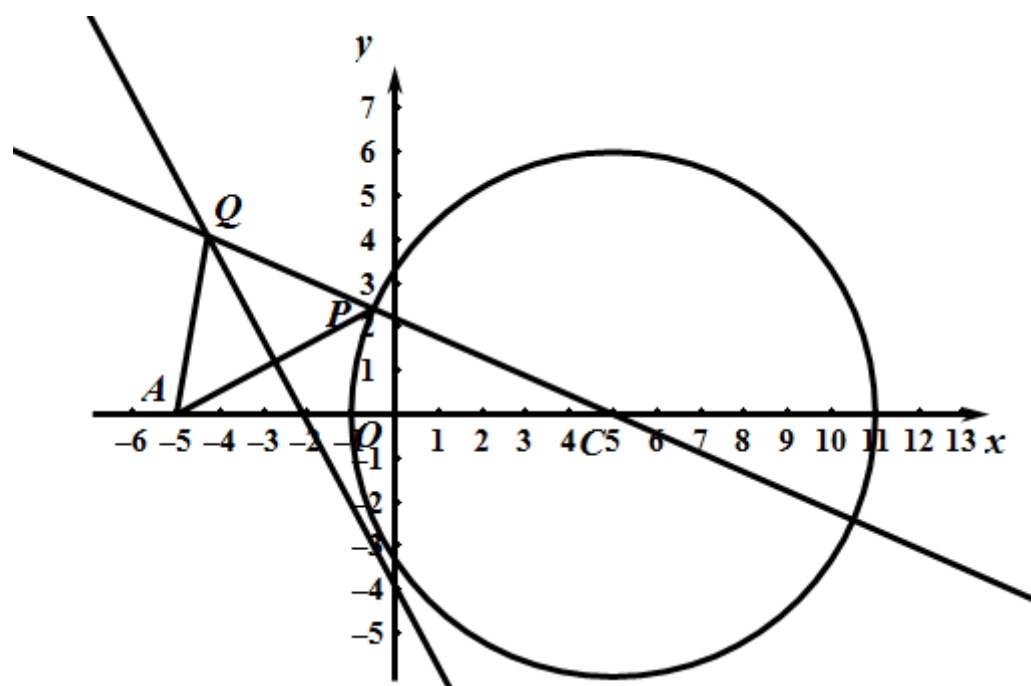
【详解】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ，

故 $\left| |QC| - |QA| \right| = \left| |QC| - |QP| \right| = |PC| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，

$2a = 6$ ， $a = 3$ ， $c = 5$ ，故 $b = 4$ ，故轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

故选：B.



【点睛】

本题考查了轨迹方程，确定轨迹方程为双曲线是解题的关键.

10、B

【解析】

由题意 $\xi = 2$ 或 4 ，则 $D\xi = \frac{1}{2}[(2-3)^2 + (4-3)^2] = 1$ ，故选 B.

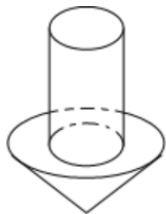
11、C

【解析】

画出几何体的直观图，利用三视图的数据求解几何体的表面积即可，

【详解】

由题意可知几何体的直观图如图：



上部是底面半径为 1，高为 3 的圆柱，下部是底面半径为 2，高为 2 的圆锥，

几何体的表面积为： $4\pi + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 2\sqrt{2} + 2\pi \times 3 = (10 + 4\sqrt{2})\pi$ ，

故选：C

【点睛】

本题考查三视图求解几何体的表面积，判断几何体的形状是解题的关键.

12、B

【解析】

先分别判断命题 p, q 真假，再由复合命题的真假性，即可得出结论.

【详解】

p 为真命题；命题 q 是假命题，比如当 $0 > a > b$ ，

或 $a=1, b=-2$ 时，则 $a^2 > b^2$ 不成立.

则 $p \wedge q$ ， $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ， $(\neg p) \vee q$ 均为假.

故选:B

【点睛】

本题考查复合命题的真假性，判断简单命题的真假是解题的关键，属于基础题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/518005102134007003>