5．1 任意角和弧度制

目录

【题型归纳】

题型一：角的概念

1.（2024·高一·上海·阶段练习）在平面直角坐标系中，给出下列命题：①小于$\frac{\pi}{2}$的角一定是锐角；②钝角一定是第二象限的角；③终边不重合的角一定不相等；④第二象限角大于第一象限角.其中假命题的个数是（　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】B

【解析】因为锐角$\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$，所以小于$\frac{\pi}{2}$的角不一定是锐角，故①不成立；

因为钝角$\beta \in (\frac{\pi}{2},\pi)$，第二象限角$\theta \in (\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi)$，$k \in Z$，所以钝角一定是第二象限角，故②成立；

若两个角的终边不重合，则这两个角一定不相等，故③成立；

例如$\alpha = 120^{\circ}$，$\beta = 390^{\circ}$，但$\alpha < \beta$，故④不成立.

故选：B.

2.（2024·高一·甘肃兰州·期末）下列命题正确的是（　　）

A．终边与始边重合的角是零角

B．终边和始边都相同的两个角一定相等

C．小于$90°$的角是锐角

D．集合$\{\alpha|90° \le \alpha < 180°\}$内的角不一定是钝角

【答案】D

【解析】A选项：终边与始边重合的角为$0°+k\cdot 360°(k \in Z)$，故A错；

B选项：终边和始边都相同的两个角可能相差$360°$的整数倍，故B错误；

C选项：小于$90°$的角可能是$0°$，还可能是负角，所以C错误；

D选项：集合$\{\alpha|90° \le \alpha < 180°\}$内的角包含$90°$直角，所以不一定是钝角，D正确；

故选：D

3.（2024·高一·江西萍乡·期末）下列说法正确的是（　　）

A．$60° = \frac{\pi}{6}$

B．一堂数学考试（120分钟）时针旋转60°

C．1弧度的角大于1°的角

D．三角形内角必为第一或二象限的角

【答案】C

【解析】对于 A，$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$，故 A 错误；

对于 B，一堂数学考试（120 分钟）时针旋转 -60°，故 B 错误；

对于 C，1 弧度 $\approx \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57^\circ 18' > 1^\circ$，故 C 正确；

对于 D，三角形的内角为 90° 时，90° 不在象限内，故 D 错误.

故选：C.

4.（2024·高一·全国·课后作业）已知集合 A={θ| θ 为锐角}，B={θ|θ 为小于 90° 的角}，C={θ|θ 为第一象限角}，D={θ|θ 为小于 90° 的正角}，则下列等式中成立的是（　）

A．$A=B$　　　B．$B=C$　　　C．$A=C$　　　D．$A=D$

【答案】D

【解析】因为 A={θ| θ 为锐角}$=\left\{\theta \middle| 0^\circ < \theta < 90^\circ\right\}$，

D={θ|θ 为小于 90° 的正角}$=\left\{\theta \middle| 0^\circ < \theta < 90^\circ\right\}$，

对于集合 B，小于 90° 的角包括零角与负角，

对于集合 C，C={θ|θ 为第一象限角}$=\left\{\theta \middle| 360^\circ k < \theta < 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbf{Z}\right\}$，

所以 $A=D$，

故选：D

题型二：终边相同的角的表示

5.（2024·高一·全国·随堂练习）在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角：

(1) $-54^\circ 18'$；

(2) $395^\circ 8'$；

(3) $-1190^\circ 30'$；

(4) 1563°.

【解析】（1）$-54^\circ 18' = 305^\circ 42' - 360^\circ$，

所以，在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 $-54^\circ 18'$ 终边相同的角为 $305^\circ 42'$，且 $-54^\circ 18'$ 为第四象限角.

（2）因为 $395^\circ 8' = 35^\circ 8' + 360^\circ$，

所以，在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 $395^\circ 8'$ 终边相同的角为 $35^\circ 8'$，且 $395^\circ 8'$ 为第一象限角.

（3）因为 $-1190^\circ 30' = 249^\circ 30' - 4 \times 360^\circ$，

所以，在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 $-1190^\circ 30'$ 终边相同的角为 $249^\circ 30'$，且 $-1190^\circ 30'$ 为第三象限角.

（4）因为 $1563^\circ = 123^\circ + 4 \times 360^\circ$，

所以，在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 1563° 终边相同的角为 123°，且 1563° 为第二象限角.

6．（2024·高一·江苏·课后作业）下列角中哪些角与30°角的终边相同：

(1)210°；

(2)-330°；

(3)390°；

(4)750°.

【解析】（1）∵与 30°角的终边相同的角为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 30^\circ + k\cdot 360^\circ, k \in Z\right\}$，

当$\alpha = 210^\circ$时，$30^\circ + k\cdot 360^\circ = 210^\circ$，解得$k = \dfrac{1}{2} \notin Z$，

∴210°角与 30°角的终边不相同.

（2）∵与 30°角的终边相同的角为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 30^\circ + k\cdot 360^\circ, k \in Z\right\}$，

当$\alpha = -330^\circ$时，$30^\circ + k\cdot 360^\circ = -330^\circ$，解得$k = -1 \in Z$，

∴-330°角与 30°角的终边相同.

（3）∵与 30°角的终边相同的角为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 30^\circ + k\cdot 360^\circ, k \in Z\right\}$，

当$\alpha = 390^\circ$时，$30^\circ + k\cdot 360^\circ = 390^\circ$，解得$k = 1 \in Z$，

∴390°角与 30°角的终边相同.

（4）∵与 30°角的终边相同的角为$\left\{\alpha \middle| \alpha = 30^\circ + k\cdot 360^\circ, k \in Z\right\}$，

当$\alpha = 750^\circ$时，$30^\circ + k\cdot 360^\circ = 750^\circ$，解得$k = 2 \in Z$，

∴750°角与 30°角的终边相同.

7．（2024·高一·全国·课后作业）写出与下列各角终边相同的角的集合，并找出集合中适合不等式$-720^\circ \le \beta \le 360^\circ$的元素$\beta$：

(1)$1303^\circ 18'$；

(2)-225°.

【解析】（1）根据题意可知$1303^\circ 18' = 223^\circ 18' + 3\times 360^\circ$，

所以与$1303^\circ 18'$终边相同的角的集合为$\left\{\beta \mid \beta = 223^\circ 18' + k\cdot 360^\circ\right\}, k \in Z$，

易知当$k = 0$时，$\beta = 223^\circ 18'$；当$k = -1$时，$\beta = -136^\circ 42'$；当$k = -2$时，$\beta = -496^\circ 42'$；

所以适合不等式$-720^\circ \le \beta \le 360^\circ$的元素$\beta$有：$223^\circ 18'$，$-136^\circ 42'$，$-496^\circ 42'$；

（2）与-225°终边相同的角的集合为$\left\{\beta \mid \beta = -225^\circ + k\cdot 360^\circ\right\}, k \in Z$，

易知当$k = -1$时，$\beta = -585^\circ$；当$k = 0$时，$\beta = -225^\circ$；当$k = 1$时，$\beta = 135^\circ$；

所以适合不等式$-720^\circ \le \beta \le 360^\circ$的元素$\beta$有：$-585^\circ$，$-225^\circ$，$135^\circ$；

8．（2024·高一·全国·课后作业）已知$\alpha_1 = -570^\circ, \alpha_2 = 750^\circ, \beta_1 = 120^\circ$，$\beta_2 = -60^\circ$.

(1)指出α_1，α_2各自终边所在的象限；

(2)在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 内找出与 β_1,β_2 终边相同的所有角.

【解析】（1） $\alpha_1=-570^\circ=-360^\circ-210^\circ$，在第二象限；

$\alpha_2=750^\circ=2\times360^\circ+30^\circ$ 在第一象限；

（2） $\beta_1=120^\circ$，与 β_1 终边相同的角为 $k\cdot360^\circ+120^\circ,k\in Z$，取 $k=-1,-2$

$-720^\circ\sim0^\circ$ 范围内与它们终边相同的所有角有 $-240^\circ,-600^\circ$.

与 $\beta_2=-60^\circ$ 终边相同的角为 $k\cdot360^\circ-60^\circ$，取 $k=-1,0$，

则 $-720^\circ\sim0^\circ$ 范围内与它们终边相同的所有角有 $-420^\circ,-60^\circ$.

题型三：角 $\dfrac{\alpha}{n}$ 所在象限的研究

9．（2024·高一·全国·随堂练习）已知角 α 的终边在第四象限，确定下列各角终边所在的象限：

(1) $\dfrac{\alpha}{2}$；

(2) 2α；

(3) $\dfrac{\alpha}{3}$；

(4) 3α.

【解析】（1）由于 α 为第四象限角，所以 $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2\pi+2k\pi,k\in Z$，

所以 $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\pi+k\pi,k\in Z$，

当 $k=2n$ 时， $\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\pi+2n\pi,n\in Z$，终边在第二象限，

当 $k=2n+1$ 时， $\dfrac{7\pi}{4}+2n\pi<\dfrac{\alpha}{2}<2\pi+2n\pi,n\in Z$，终边在第四象限，

所以 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边在第二或第四象限；

（2）由（1）得 $3\pi+4k\pi<2\alpha<4\pi+4k\pi,k\in Z$，

所以 2α 的终边在第三或第四象限，也可在 y 轴的负半轴上.

（3）由（1）得 $\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{\alpha}{3}<\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot\dfrac{2\pi}{3},k\in Z$，

当 $k=3n$ 时， $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<\dfrac{\alpha}{3}<\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi,n\in Z$，终边在第二象限，

当 $k=3n+1$ 时， $\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi<\dfrac{\alpha}{3}<\dfrac{4\pi}{3}+2n\pi,n\in Z$，终边在第三象限，

当 $k=3n+2$ 时， $\dfrac{11\pi}{6}+2n\pi<\dfrac{\alpha}{3}<2\pi+2n\pi,n\in Z$，终边在第四象限，

所以$\frac{\alpha}{3}$的终边在第二、第三或第四象限；

（4）由（1）得$\frac{9\pi}{2}+6k\pi<3\alpha<6\pi+6k\pi, k\in Z$，即$\frac{\pi}{2}+4\pi+6k\pi<3\alpha<2\pi+4\pi+6k\pi, k\in Z$，

所以3α的终边在第二或三或第四象限，也可在x, y轴的负半轴上.

10.（2024·高一·全国·专题练习）已知角α的终边在第四象限，确定下列各角终边所在的象限：

(1)$\frac{\alpha}{2}$；

(2)$\frac{\alpha}{3}$；

【解析】（1）由于α为第四象限角可知$\frac{3\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2\pi+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$，.

所以$\frac{3\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\pi+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

当$k=2n$时，$\frac{3\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<\pi+2n\pi, n\in \mathbf{Z}$，终边在第二象限，

当$k=2n+1$时，$\frac{7\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<2\pi+2n\pi, n\in \mathbf{Z}$，终边在第四象限，

所以$\frac{\alpha}{2}$的终边在第二或第四象限；

（2）由（1）得$\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, k\in \mathbf{Z}$，

当$k=3n$时，$\frac{\pi}{2}+2n\pi<\frac{\alpha}{3}<\frac{2\pi}{3}+2n\pi, n\in \mathbf{Z}$，终边在第二象限，

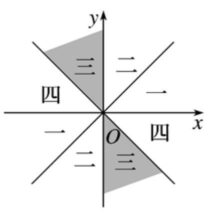
当$k=3n+1$时，$\frac{7\pi}{6}+2n\pi<\frac{\alpha}{3}<\frac{4\pi}{3}+2n\pi, n\in \mathbf{Z}$，终边在第三象限，

当$k=3n+2$时，$\frac{11\pi}{6}+2n\pi<\frac{\alpha}{3}<2\pi+2n\pi, n\in \mathbf{Z}$，终边在第四象限，

所以$\frac{\alpha}{3}$的终边在第二、第三或第四象限.

11.（2024·高一·全国·专题练习）已知角α为第三象限角，求角$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角.

【解析】如图所示，



先将各象限分成2等分，再从x轴正半轴的上方起，按逆时针方向，依次将各区域标上一、二、三、四，

则标有三的区域即为角$\dfrac{\alpha}{2}$的终边所在的区域，

$\therefore$角$\dfrac{\alpha}{2}$为第二或第四象限角.

12．（2024·高一·全国·课后作业）已知角α是第三象限角，求$\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\alpha}{3}$所在的象限.

【解析】角α是第三象限角,即$\pi+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$,

对于$\dfrac{\alpha}{2}$：

$\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in Z$,

当k为偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$在第一象限；当k为奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$在第四象限；

故$\dfrac{\alpha}{2}$在第二或第四象限；

对于$\dfrac{\alpha}{3}$：

$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}k\pi<\dfrac{\alpha}{3}<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}k\pi,k\in Z$,

当$k=3m,m\in Z$时，$\dfrac{\alpha}{3}$在第一象限；当$k=3m+1,m\in Z$时，$\dfrac{\alpha}{3}$在第三象限；当$k=3m+2,m\in Z$时，$\dfrac{\alpha}{3}$在第四象限；

故$\dfrac{\alpha}{3}$在第一，第三或第四象限.

题型四：象限角的判定

13．（2024·高一·江西南昌·阶段练习）2022°角的终边所在的象限是（　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

【答案】C

【解析】$2022^{\circ}=360^{\circ}\times 5+180^{\circ}+42^{\circ}$，所以$2022^{\circ}$的终边所在的象限是第三象限.

故选：C.

14．（2024·高一·河南·阶段练习）已知角α以x轴正半轴为始边，终边经过点$P\left(\sin\dfrac{2\pi}{3},\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$，则$3\pi+\alpha$是（　）

A．第一象限角　B．第二象限角　C．第三象限角　D．第四象限角

【答案】B

【解析】$\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，即$P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,

故点 P 在第四象限，即角 α 的终边在第四象限，

$3\pi+\alpha$ 的终边为角 α 终边的反向延长线，那么 $3\pi+\alpha$ 的终边在第二象限.

故选：B.

15.（2024·高一·重庆铜梁·阶段练习）-2024° 的终边在（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】B

【解析】$\because -2024^\circ=136^\circ-6\times360^\circ$, 且 136° 角是第二象限角，

$\therefore -2024^\circ$ 角的终边在第二象限.

故选：B

16.（2024·高一·河北邢台·阶段练习）$\dfrac{25\pi}{3}$ 是（　）

A．第一象限角　　B．第二象限角　　C．第三象限角　　D．第四象限角

【答案】A

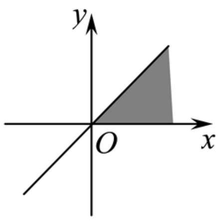
【解析】$\because \dfrac{25\pi}{3}=8\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

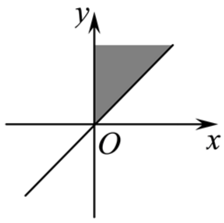
$\therefore \dfrac{25\pi}{3}$ 与 $\dfrac{\pi}{3}$ 终边相同，所以 $\dfrac{25\pi}{3}$ 是第一象限角.

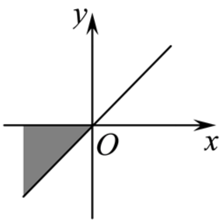
故选：A.

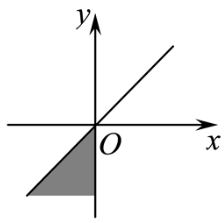
题型五：区域角的表示

17.（2024·高一·全国·专题练习）已知集合 $\{\alpha\,|\,k\cdot360^\circ+45^\circ\le\alpha\le k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，则图中表示角 α 的终边所在区域正确的是（　）

A．


B．


C．


D．


【答案】B

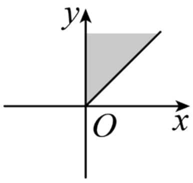
【解析】当 $\alpha=k\cdot360^\circ+45^\circ$， $k\in\mathbf{Z}$ 时，角 α 的终边落在第一象限的角平分线上，

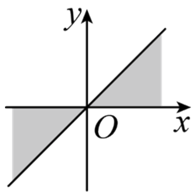
当 $\alpha=k\cdot360^\circ+90^\circ$， $k\in\mathbf{Z}$ 时，角 α 的终边落在 y 轴的非负半轴上，

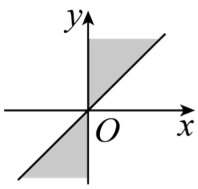
按照逆时针旋转的方向确定范围可得角α的终边所在区域如选项 B 所示．

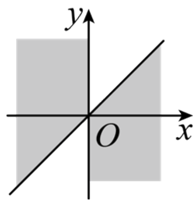
故选：B．

18．（2024·高三·全国·专题练习）集合$\left\{\alpha \middle| k\pi+\frac{\pi}{4}\le\alpha\le k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$中的角所表示的范围(阴影部分)是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

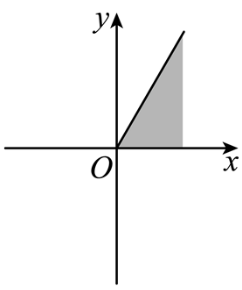
【答案】C

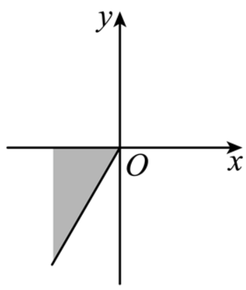
【解析】当$k=2n(n\in Z)$时，$2n\pi+\frac{\pi}{4}\le\alpha\le 2n\pi+\frac{\pi}{2},n\in Z$，此时$\alpha$表示的范围与$\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$表示的范围一样；

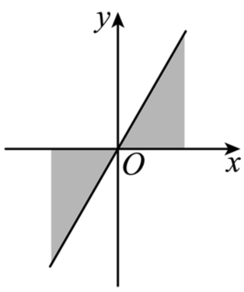
当$k=2n+1(n\in Z)$时，$2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\le\alpha\le 2n\pi+\pi+\frac{\pi}{2},n\in Z$，此时$\alpha$表示的范围与$\frac{\pi}{4}+\pi\le\alpha\le\frac{\pi}{2}+\pi$表示的范围一样，

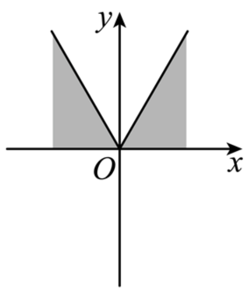
故选：C．

19．（2024·高一·山西朔州·期末）集合$\{\alpha|\ k\cdot 180^\circ\le\alpha\le k\cdot 180^\circ+60^\circ,k\in \mathbf{Z}\}$中的角所表示的范围（阴影部分）是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

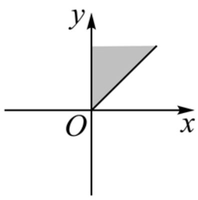
【答案】C

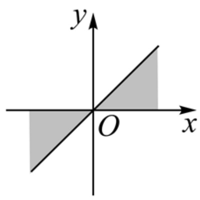
【解析】当$k=2n,n\in\mathrm{Z}$时，$\left\{\alpha \mid n\cdot 360^{\circ}\le\alpha\le n\cdot 360^{\circ}+60^{\circ},k\in\mathrm{Z}\right\}$，

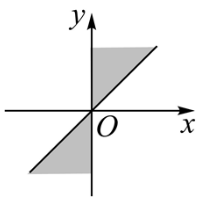
当$k=2n+1,n\in\mathrm{Z}$时，$\{\alpha \mid n\cdot 360^{\circ}+180^{\circ}\le\alpha\le n\cdot 360^{\circ}+240^{\circ},k\in\mathrm{Z}\}$,所以选项 C 满足题意.

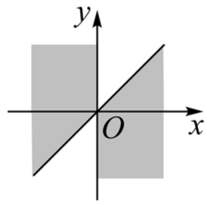
故选：C.

20．（2024·高一·广西钦州·阶段练习）集合$\{\alpha \mid k\cdot 180^{\circ}\le\alpha\le k\cdot 180^{\circ}+45^{\circ},k\in\mathbf{Z}\}$中角表示的范围(用阴影表示)是图中的（　　）

A．

B．

C．

D．

【答案】B

【解析】集合$\{\alpha \mid k\cdot 180^{\circ}\le\alpha\le k\cdot 180^{\circ}+45^{\circ},k\in\mathbf{Z}\}$中，

当k为偶数时，此集合与$\left\{\alpha \mid 0^{\circ}\le\alpha\le 45^{\circ}\right\}$表示终边相同的角，位于第一象限；

当k为奇数时，此集合与$\left\{\alpha \mid 180^{\circ}\le\alpha\le 225^{\circ}\right\}$表示终边相同的角，位于第三象限.

所以集合$\{\alpha \mid k\cdot 180^{\circ}\le\alpha\le k\cdot 180^{\circ}+45^{\circ},k\in\mathbf{Z}\}$中角表示的范围为选项 B 中阴影所示.

故选：B.

题型六：弧度制与角度制的互化

21．（2024·高一·陕西渭南·阶段练习）经过 2 小时，钟表上时针转过的弧度数为________.

【答案】$-\frac{\pi}{3}$

【解析】根据题意，表盘平分为 12 等份，每等份对应的弧度数大小为$\frac{\pi}{6}$，

经过 2 小时，钟表上时针转过的弧度数大小为$\frac{\pi}{3}$，

因为时针按顺时针转动，钟表上时针转过的弧度数为$-\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$-\frac{\pi}{3}$.

22．（2024·高一·上海闵行·阶段练习）将角度化为弧度：$345^{\circ}=$________.

【答案】$\frac{23}{12}\pi$

【解析】$345^{\circ}=\frac{345}{180}\pi=\frac{23}{12}\pi$.

故答案为：$\frac{23}{12}\pi$

23.（2024·高一·陕西渭南·阶段练习）2025°化成弧度是_____.

【答案】$\frac{45\pi}{4}$

【解析】$2025^{\circ}=\frac{2025}{180}\pi=\frac{45\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{45\pi}{4}$

24.（2024·高一·新疆喀什·期末）225°的角化成弧度制为________.

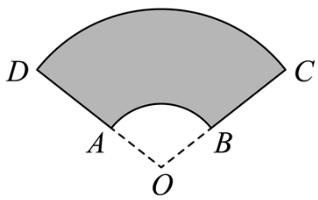
【答案】$\frac{5\pi}{4}$

【解析】因为$180^{\circ}=\pi$，所以$225^{\circ}=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{5\pi}{4}$

题型七：扇形的弧长及面积公式的应用

25.（2024·高一·天津·期末）砖雕是我国古建筑雕刻中的重要艺术形式，传统砖雕精致细腻、气韵生动、极富书卷气.如图所示，一扇环形砖雕，可视为将扇形OCD截去同心扇形OAB所得图形，已知$OA=0.1\text{m}$，$AD=0.4\text{m}$，$\angle AOB=125^{\circ}$，则该扇环形砖雕的面积为_______m^2.



【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析】因为扇形OAB的院校为$\angle AOB=125\times\frac{\pi}{180}=\frac{25\pi}{36}$，

又因为$OA=0.1\text{m}$，$AD=0.4\text{m}$，

所以，该扇环形砖雕的面积为$S=\frac{1}{2}\times\frac{25\pi}{36}\times\left(0.5^2-0.1^2\right)=\frac{\pi}{12}$.

故答案为：$\frac{\pi}{12}$.

26.（2024·高一·江苏扬州·期中）已知扇形的圆心角为2rad，弧长为2cm，则该扇形的面积为_____cm^2.

【答案】1