

考点巩固卷 26 分布列及三大分布



考点预览

超几何分布，二项分布及正态分布

考点01 分布列均值和方差的性质

考点02 独立事件的乘法公式

考点03 超几何分布

考点04 二项分布

考点05 二项分布的概率最大问题

考点06 二项分布与超几何分布的综合

考点07 决策问题

考点08 正态分布常考小题

考点09 正态分布的实际应用

考点10 统计概率结合导数

考点11 统计概率结合数列



考点训练

考点01 分布列均值和方差的性质

1. (多选) 已知离散型随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{6}$

若离散型随机变量 Y 满足 $Y=2X+1$ ，则下列说法正确的有 ()

A. $P(|X|=1)=\frac{2}{3}$ B. $E(X)+E(Y)=0$ C. $D(Y)=\frac{10}{9}$ D. $P(Y=1)=\frac{1}{2}$

【答案】 AB

【分析】 先求得 a ，然后根据概率、期望、方差的知识求得正确答案.

【详解】由 $\frac{1}{2} + a + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + a = 1, a = \frac{1}{3}$,

所以 $P(|X|=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, 所以 A 选项正确.

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3},$$

Y	-1	1	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以 $Y \neq 1$, 对应概率为 0, 所以 D 选项错误.

$$E(Y) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

所以 $E(X) + E(Y) = 0$, 所以 B 选项正确.

$$D(Y) = \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{20}{9}, \text{ C 选项错误.}$$

故选: AB

2. (多选) 若随机变量 X 服从两点分布, 其中 $P(X=0) = \frac{1}{3}$, $E(X)$, $D(X)$ 分别为随机变量 X 的均值与方差, 则下列结论正确的是 ()

A. $P(X=1) = E(X)$

B. $E(3X+2) = 4$

C. $D(3X+2) = 4$

D. $D(X) = \frac{9}{4}$

【答案】AB

【分析】根据两点分布可得期望与方差, 再结合期望、方差的性质运算求解.

【详解】由题意可知: $P(X=1) = 1 - P(X=0) = \frac{2}{3}$,

随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

由两点分布可知: $E(X) = \frac{2}{3}, D(X) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, 故 A 正确, D 错误;

所以 $E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 4$, $D(3X+2) = 9D(X) = 2$, 故 B 正确, C 错误;

故选：AB.

3. (多选) 已知随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	m	0.2	0.3

若随机变量 $Y = aX + b (a > 0, b \in \mathbb{R})$, $E(Y) = 10$, $D(Y) = 19$, 则下列选项正确的为 ()

- A. $m = 0.5$ B. $a = 6$ C. $b = 11$ D. $P(Y = 16) = 0.3$

【答案】ACD

【分析】先利用分布列的性质求出 m , 再利用均值和方差的性质求解即可.

【详解】依题意, 由分布列可得 $m + 0.2 + 0.3 = 1$, 解得 $m = 0.5$, A 正确;

$$E(X) = -1 \times 0.5 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 = -0.2,$$

$$D(X) = [-1 - (-0.2)]^2 \times 0.5 + [0 - (-0.2)]^2 \times 0.2 + [1 - (-0.2)]^2 \times 0.3 = 0.76,$$

因为 $Y = aX + b (a > 0, b \in \mathbb{R})$,

$$\text{所以 } E(Y) = aE(X) + b = -0.2a + b = 10, \quad D(Y) = a^2D(X) = 0.76a^2 = 19,$$

解得 $a = 5$, $b = 11$, B 错误, C 正确;

所以随机变量 Y 的分布列为:

Y	6	11	16
P	0.5	0.2	0.3

由分布列可知 D 正确;

故选：ACD

4. (多选) 若随机变量 $X \sim B\left(9, \frac{1}{3}\right)$, 下列说法中正确的是 ()

- A. $P(X = 3) = C_9^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$ B. 期望 $E(X) = 3$
- C. 期望 $E(4X - 1) = 11$ D. 方差 $D(-2X + 5) = 8$

【答案】BCD

【分析】根据已知条件, 结合二项分布的概率公式, 以及期望与方差公式即可求解.

【详解】随机变量 $X \sim B\left(9, \frac{1}{3}\right)$,

则 $P(X=3) = C_9^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$, 故 A 错误;

$E(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$, 故 B 正确;

$E(4X-1) = 4E(X) - 1 = 4 \times 3 - 1 = 11$, 故 C 正确;

因为 $D(X) = 9 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$,

所以 $D(-2X+5) = (-2)^2 D(X) = 4 \times 2 = 8$, 故 D 正确.

故选: BCD

5. 已知随机变量 X 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	m	$\frac{1}{20}$

若 $Y = aX + 3$, 且 $E(Y) = -\frac{11}{2}$, 则 $a =$ _____.

【答案】15

【分析】利用分布列的性质可求得 m , 继而可求 $E(X)$, 再利用期望的性质可求 $E(Y)$.

【详解】由分布列的概率之和为 1 可得: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + m + \frac{1}{20} = 1$, 解得 $m = \frac{1}{6}$,

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{20} = -\frac{17}{30}$$

$$\therefore E(Y) = E(aX+3) = aE(X) + 3 = -\frac{17}{30}a + 3 = -\frac{11}{2},$$

$$\therefore a = 15.$$

故答案为: 15.

6. 已知随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	m	$\frac{1}{20}$

(1) 求 m 的值;

(2) 求 $E(X)$;

(3)若 $Y = 2X - 3$ ，求 $E(Y)$.

【答案】(1) $\frac{1}{6}$

(2) $-\frac{17}{30}$

(3) $-\frac{62}{15}$

【分析】(1) 利用分布列的性质即可得解；

(2) 利用随机变量的期望公式可得答案；

(3) 法一：利用 $E(Y) = aE(X) + b$ 即可得解；法二：利用随机变量的期望公式可得答案.

【详解】(1) 依题意，由分布列得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + m + \frac{1}{20} = 1$ ，解得 $m = \frac{1}{6}$ ，

所以 m 的值为 $\frac{1}{6}$.

(2) 由(1)得 $E(X) = -2 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{20} = -\frac{17}{30}$.

(3) 法一：因为 $Y = 2X - 3$ ，

所以 $E(Y) = 2E(X) - 3 = 2 \times \left(-\frac{17}{30}\right) - 3 = -\frac{62}{15}$.

法二：因为 $Y = 2X - 3$ ，所以 Y 的分布列如下：

Y	-7	-5	-3	-1	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{20}$

所以 $E(Y) = -7 \times \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{3} - 3 \times \frac{1}{5} - 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{20} = -\frac{62}{15}$.

考点 02 独立事件的乘法公式

7. 甲和乙两个箱子中各装有 10 个球，其中甲箱中有 5 个白球，5 个红球，乙箱中有 8 个红球，2 个白球. 掷一枚质地均匀的骰子，如果点数为 5 或 6，从甲箱子随机摸出 1 个球；如果点数为 1, 2, 3, 4，从乙箱子中随机摸出 1 个球. 则在摸到红球的条件下，红球来自甲箱子的概率为_____.

【答案】 $\frac{5}{21}$

【分析】根据概率乘法公式先分别求出从甲、乙箱中摸到红球的概率，然后可得摸到红球的概率，根据比值即可的所求概率.

【详解】从甲箱中摸红球：掷到点数为 5 或 6 的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，再从甲箱中摸到红球的概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，故从

甲箱中摸到红球的概率为 $P_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

从乙箱中摸红球：掷到点数为 1, 2, 3, 4 的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，再从乙箱中摸到红球的概率为 $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ，故从乙

箱中摸到红球的概率为 $P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$;

因此，摸到红球的概率为 $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{6} + \frac{8}{15} = \frac{7}{10}$ ，

\therefore 红球来自甲箱子的概率 $P = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{21}$.

故答案为： $\frac{5}{21}$

8. 某同学在上学的路上要经过 3 个十字路口，在每个路口是否遇到红灯相互独立，设该同学在三个路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$.

(1) 求该同学在上学路上恰好遇到一个红灯的概率；

(2) 若该同学在上学路上每遇到 1 个红灯，到校打卡时间就会比规定打卡时间晚 48 秒，记该同学某天到校打卡时间比规定时间晚 X 秒，求 X 的分布列和数学期望.

【答案】 (1) $\frac{11}{24}$

(2) 分布列见解析，52

【分析】 (1) 利用概率的乘法和加法公式即可求解；

(2) 根据已知条件求出随机变量的取值，再利用概率的乘法和加法公式求出随机变量对应的概率，进而得出随机变量的分布列，再利用随机变量的期望公式即可求解.

【详解】 (1) 记 $A = \{\text{该同学在上学路上恰好遇到一个红灯}\}$,

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

(2) X 的可能取值为 0, 48, 96, 144,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=48) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=96) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=144) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24},$$

X 的分布列为:

X	0	48	96	144
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 48 \times \frac{11}{24} + 96 \times \frac{1}{4} + 144 \times \frac{1}{24} = 52.$$

9. 甲、乙、丙三人进行台球比赛, 比赛规则如下: 先由两人上场比赛, 第三人旁观, 一局结束后, 败者下场作为旁观者, 原旁观者上场与胜者比赛, 按此规则循环下去. 若比赛中有人累计获胜 3 局, 则该人获得最终胜利, 比赛结束, 三人经过抽签决定由甲、乙先上场比赛, 丙作为旁观者. 根据以往经验, 每局比赛中, 甲、乙比赛甲胜概率为 $\frac{1}{2}$, 乙、丙比赛乙胜概率为 $\frac{1}{3}$, 丙、甲比赛丙胜概率为 $\frac{2}{3}$, 每局比赛相互独立且每局比赛没有平局.

(1) 比赛完 3 局时, 求甲、乙、丙各旁观 1 局的概率;

(2) 已知比赛进行 5 局后结束, 求甲获得最终胜利的概率.

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{13}{108}$

【分析】 (1) 根据独立事件的概率公式进行求解即可;

(2) 分析比赛情况, 根据和事件的概率公式进行求解即可.

【详解】 (1) 由题可知, 甲、乙、丙各旁观 1 局的概率即为甲、乙、丙各胜 1 局的概率.

设甲、乙比赛甲胜, 乙、丙比赛乙胜, 丙、甲比赛丙胜分别为事件 A , B , C , 则 A , B , C 相互独立,

设比赛完 3 局时, 甲、乙、丙各胜 1 局为事件 M , 则 $M = AC \cup \overline{AB}$,

$$\text{则 } P(M) = P(AC) + P(\overline{AB}) = P(A)P(C) + P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

所以甲、乙、丙各旁观 1 局的概率为 $\frac{2}{3}$.

(2) 设甲、乙、丙第 i 局比赛获胜分别为事件 A_i , B_i , C_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

设比赛完 5 局甲获得最终胜利为事件 D , 则

$$D = B_1 B_2 A_3 A_4 A_5 + B_1 C_2 A_3 A_4 A_5 + A_1 A_2 B_3 B_4 A_5 + A_1 A_2 B_3 C_4 A_5 + A_1 C_2 C_3 A_4 A_5 + A_1 C_2 B_3 A_4 A_5,$$

$$P(B_1 B_2 A_3 A_4 A_5) = P(B_1)P(B_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72},$$

$$P(B_1 C_2 A_3 A_4 A_5) = P(B_1)P(C_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{54},$$

$$P(A_1A_2B_3B_4A_5) = P(A_1)P(A_2)P(B_3)P(B_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72},$$

$$P(A_1A_2B_3C_4A_5) = P(A_1)P(A_2)P(B_3)P(C_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{54},$$

$$P(A_1C_2C_3A_4A_5) = P(A_1)P(C_2)P(C_3)P(A_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{27},$$

$$P(A_1C_2B_3A_4A_5) = P(A_1)P(C_2)P(B_3)P(A_4)P(A_5) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{54},$$

所以 $P(D) = \frac{1}{72} + \frac{1}{54} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \frac{13}{108}$.

所以，已知比赛进行 5 局后结束，甲获得最终胜利的概率为 $\frac{13}{108}$ 。

10. 手工刺绣是中国非物质文化遗产之一，指以手工方式，用针和线把人的设计和制作添加在任何存在的织物上的一种艺术，大致分为绘制白描图和手工着色、电脑着色，选线、配线和裁布三个环节，简记为工序 A，工序 B，工序 C. 经过试验测得小李在这三道工序成功的概率依次为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{4}$. 现某单位推出一项手工刺绣体验活动，报名费 30 元，成功通过三道工序最终的奖励金额是 200 元，为了更好地激励参与者的兴趣，举办方推出了一项工序补救服务，可以在着手前付费聘请技术员，若某一道工序没有成功，可以由技术员完成本道工序. 每位技术员只完成其中一道工序，每聘请一位技术员需另付费 100 元，制作完成后没有接受技术员补救服务的退还一半的聘请费用.

(1) 若小李聘请一位技术员，求他成功完成三道工序的概率；

(2) 若小李聘请两位技术员，求他最终获得收益的期望值.

【答案】(1) $\frac{17}{24}$ ；

(2) $\frac{115}{12}$.

【分析】(1) 记事件 M 为“小李聘请一位技术员成功完成三道工序”，分别讨论小李完成工序的情况并计算各类情况的概率最后求和即可；

(2) 设小李最终收益为 X ，列出其所有取值，并计算概率求期望值即可.

【详解】(1) 记事件 M 为“小李聘请一位技术员成功完成三道工序”，

当技术员完成工序 A 时，小李成功完成三道工序的概率为： $P_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ，

当技术员完成工序 B 时，小李成功完成三道工序的概率为： $P_2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ ，

当技术员完成工序 C 时，小李成功完成三道工序的概率为： $P_3 = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ ，

当技术员没参与补救时，小李成功完成三道工序的概率为： $P_4 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ，

故小李成功完成三道工序的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{17}{24}$;

(2) 设小李最终收益为 X ，小李聘请两位技术员参与比赛，

有如下几种情况：

两位技术员都参与补救但仍未成功完成三道工序，此时 $X = -230$ ，

$$P(X = -230) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{24};$$

两位技术员都参与补救并成功完成三道工序，此时 $X = -230 + 200 = -30$ ，

$$P(X = -30) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4};$$

只有一位技术员参与补救后成功完成三道工序，此时 $X = -30 - 100 - 50 + 200 = 20$ ，

$$P(X = 20) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{24};$$

技术员最终未参与补救仍成功完成三道工序，此时 $X = -30 - 50 \times 2 + 200 = 70$ ， $P(X = 70) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ；

$$\text{故 } E(X) = (-230) \times \frac{1}{24} + (-30) \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{11}{24} + 70 \times \frac{1}{4} = \frac{115}{12}.$$

11. 某产品在出厂前需要经过质检，质检分为2个过程，第1个过程，将产品交给3位质检员分别进行检验，若3位质检员检验结果均为合格，则产品不需要进行第2个过程，可以出厂；若3位质检员检验结果均为不合格，则产品视为不合格产品，不可以出厂；若只有1位或2位质检员检验结果为合格，则需要进行第2个过程，第2个过程，将产品交给第4位和第5位质检员检验，若这2位质检员检验结果均为合格，则可以出厂，否则视为不合格产品，不可以出厂。设每位质检员检验结果为合格的概率均为 $\frac{3}{4}$ ，且每位质检员的检验结果相互独立。

(1) 求产品需要进行第2个过程的概率；

(2) 求产品不可以出厂的概率。

【答案】 (1) $\frac{9}{16}$

(2) $\frac{67}{256}$

【分析】 (1) 由已知可得产品在进行第1个过程时有1位或2位质检员检验结果为合格，可得概率；

(2) 当第1个过程中3位质检员检验结果均为不合格，或第2个过程中，2位质检员检验结果不全为合格，不可以出厂。

【详解】 (1) 由已知可得产品在进行第1个过程时有1位或2位质检员检验结果为合格，

所以 $P_1 = C_3^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 + C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}$;

(2) 第1个过程中3位质检员检验结果均为不合格, 概率为 $P_2 = C_3^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$,

第2个过程中, 2位质检员检验结果不全为合格, 概率为 $P_3 = P_1 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{9}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{63}{256}$,

所以不可以出厂的概率 $P = P_2 + P_3 = \frac{1}{64} + \frac{63}{256} = \frac{67}{256}$.

12. 挑选空间飞行员可以说是“万里挑一”, 要想通过需要五关: 目测、初检、复检、文考(文化考试)、政审. 若某校甲、乙、丙三位同学都顺利通过了前两关, 根据分析甲、乙、丙三位同学通过复检关的概率分别是0.5, 0.6, 0.75, 能通过文考关的概率分别是0.6, 0.5, 0.4, 由于他们平时表现较好, 都能通过政审关, 若后三关之间通过与否没有影响.

(1) 求甲被录取成为空军飞行员的概率;

(2) 求甲、乙、丙三位同学中恰好有一个人通过复检的概率;

【答案】(1) 0.3

(2) 0.275

【分析】(1)(2) 根据题意, 由相互独立事件的概率计算公式, 代入计算, 即可得到结果;

【详解】(1) 设甲乙丙三位同学分别通过复检为事件 A, B, C , 甲乙丙同学通过文考为事件 D, E, F ,

可得 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(C) = 0.75, P(D) = 0.6, P(E) = 0.5, P(F) = 0.4$,

由题意, 可得甲被录取成为空军飞行员的概率为:

$$P = 1 \times 1 \times P(A) \times P(D) \times 1 = 1 \times 1 \times 0.5 \times 0.6 \times 1 = 0.3.$$

(2) 由题意, 甲乙丙三位同学分别通过复检, 即为事件 $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$,

利用独立事件的概率计算公式, 可得甲、乙、丙三位同学中恰好有一个人通过复检的概率为:

$$\begin{aligned} P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) &= P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) \\ &= 0.5 \times (1 - 0.6) \times (1 - 0.75) + (1 - 0.5) \times 0.6 \times (1 - 0.75) + (1 - 0.5) \times (1 - 0.6) \times 0.75 = 0.275. \end{aligned}$$

考点 03 超几何分布

13. (多选) 某单位推出了10道有关二十大的测试题供学习者学习和测试, 乙能答对其中的6道题, 规定每次测试都是从这10道题中随机抽出4道, 答对一题加10分, 答错一题或不答减5分, 最终得分最低为0分, 则下列说法正确的是 ()

A. 乙得40分的概率是 $\frac{1}{14}$

B. 乙得25分的概率是 $\frac{8}{21}$

C. 乙得10分的概率是 $\frac{3}{7}$

D. 乙得0分的概率是 $\frac{1}{210}$

【答案】 ABC

【分析】 根据古典概型概率公式结合组合数计算即可.

【详解】 设乙的得分为 X , 则由题意 X 的所有可能取值为0, 10, 25, 40,

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_4^4 + C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{5}{42}, \quad P(X=10) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}, \quad P(X=25) = \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}, \quad P(X=40) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14},$$

故选: ABC

14. 某商场为促销组织了一次幸运抽奖活动. 袋中装有18个除颜色外其余均相同的小球, 其中8个是红球, 10个是白球. 抽奖者从中一次抽出3个小球, 抽到3个红球得一等奖, 抽到2个红球得二等奖, 抽到1个红球得三等奖, 抽到0个红球不得奖. 求得一等奖、二等奖和三等奖的概率.

【答案】 得一等奖的概率约为0.0686, 得二等奖的概率约为0.3431, 得三等奖的概率约为0.4412.

【分析】 由题意, 用 X 表示抽到的红球数, 则 $X \sim H(18, 8, 3)$, 根据超几何分布的概率公式得解.

【详解】 解: 从18个小球中抽取3个时, 有 C_{18}^3 种等可能的结果, 用 X 表示抽到的红球数,

则 $X \sim H(18, 8, 3)$, 则

$$P(\text{得一等奖}) = P(X=3) = \frac{C_8^3 C_{10}^0}{C_{18}^3} = \frac{56}{816} \approx 0.0686.$$

$$P(\text{得二等奖}) = P(X=2) = \frac{C_8^2 C_{10}^1}{C_{18}^3} = \frac{280}{816} \approx 0.3431.$$

$$P(\text{得三等奖}) = P(X=1) = \frac{C_8^1 C_{10}^2}{C_{18}^3} = \frac{360}{816} \approx 0.4412.$$

因此, 得一等奖的概率约为0.0686, 得二等奖的概率约为0.3431, 得三等奖的概率约为0.4412.

15. 一个口袋中有4个白球, 2个黑球, 每次从袋中取出一个球

(1) 若不放回的取2次球, 求在第一次取出白球的条件下, 第二次取出的是黑球的概率;

(2) 若不放回的取3次球, 求取出白球次数 X 的分布列及 $E(X)$.

【答案】 (1) $\frac{2}{5}$

(2) 分布列见解析, 2

【分析】 (1) 问题相当于“从3个白球, 2个黑球中取一次球, 求取到黑球的概率”, 进而求得. (2) 不放回的依次取出3个球, 则取到白球次数 X 的可能取值为1, 2, 3, 计算出各自对应的概率, 求得 X 的分布列, 从而利用公式求得.

【详解】(1) 问题相当于“从 3 个白球，2 个黑球中取一次球，求取到黑球的概率”，

所以所求概率 $P = \frac{2}{5}$ ；

(2) 不放回的依次取出 3 个球，则取到白球次数 X 的可能取值为 1, 2, 3，

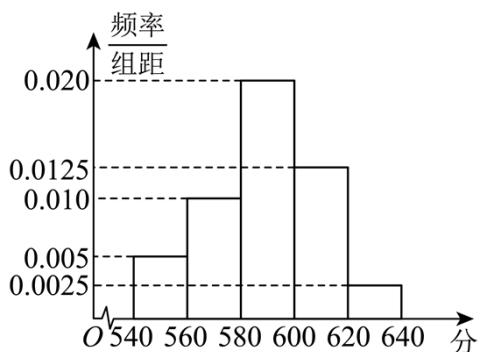
则 $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ ； $P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$ ； $P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ 。

则 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$ 。

16. 某研究小组为研究经常锻炼与成绩好差的关系，从全市若干所学校中随机抽取 100 名学生进行调查，其中有体育锻炼习惯的有 45 人。经调查，得到这 100 名学生近期考试的分数的频率分布直方图。记分数在 600 分以上的为优秀，其余为合格。



(1) 请完成下列 2×2 列联表。根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，分析成绩优秀与体育锻炼有没有关系。

	经常锻炼	不经常锻炼	合计
合格	25		
优秀		10	
合计			100

(2) 现采取分层抽样的方法，从这 100 人中抽取 10 人，再从这 10 人中随机抽取 5 人进行进一步调查，记抽到 5 人中优秀的人数为 X ，求 X 的分布列。

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1)列联表见解析；成绩优秀与是否经常体育锻炼有关联

(2)分布列见解析

【分析】(1) 根据题意，得到 2×2 列联表，求得 χ^2 的值，结合附表，即可得到结论；

(2) 根据题意，求得抽取的 10 人中合格有 7 人，优秀的为 3 人，得到 X 服从超几何分布，得出 X 的可能值，求得相应的概率，列出分布列.

【详解】(1) 解：根据题意，得到 2×2 列联表

	经常锻炼	不经常锻炼	合计
合格	25	45	70
优秀	20	10	30
合计	45	55	100

零假设 H_0 ：成绩是否优秀与是否经常体育锻炼无关，

$$\text{可得 } \chi^2 = \frac{100(25 \times 10 - 45 \times 20)^2}{70 \times 30 \times 45 \times 55} \approx 8.129 > 6.635.$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

所以 99% 的把握认为成绩优秀与是否经常体育锻炼有关联.

(2) 解：根据频率分布直方图，可得大于 600 分的频率为 $(0.0125 + 0.0025) \times 20 = 0.3$ ，

小于 600 分的频率为 $1 - 0.3 = 0.7$ ，

所以由分层抽样知，抽取的 10 人中合格有 $10 \times 0.7 = 7$ 人，优秀的为 $10 \times 0.3 = 3$ 人，

则从这 10 人中随机抽取 5 人，优秀人数 X 服从超几何分布，

由题意 X 的可能值为 0, 1, 2, 3

$$\text{可得 } P(X=0) = \frac{C_7^5 C_3^0}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}, \quad P(X=1) = \frac{C_7^4 C_3^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}, \quad P(X=2) = \frac{C_7^3 C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{5}{12},$$

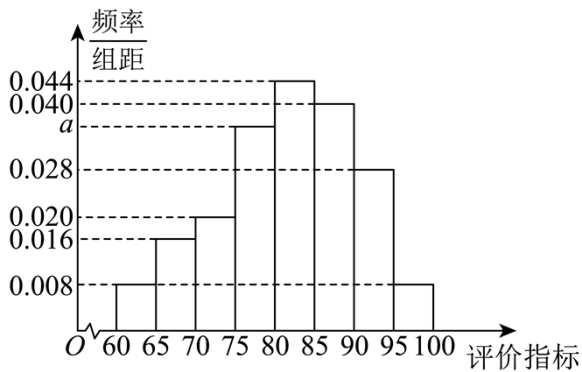
$$P(X=3) = \frac{C_7^2 C_3^3}{C_{10}^5} = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}$$

所以随机变量 X 分布列为

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
-----	----------------	----------------	----------------	----------------

17. 某乒乓球队训练教官为了检验学员某项技能的水平，随机抽取 100 名学员进行测试，并根据该项技能的评价指标，按 $[60,65), [65,70), [70,75), [75,80), [80,85), [85,90), [90,95), [95,100]$ 分成 8 组，得到如图所示的频率分布直方图.



- (1) 求 a 的值，并估计该项技能的评价指标的中位数（精确到 0.1）；
- (2) 若采用分层抽样的方法从评价指标在 $[70,75)$ 和 $[85,90)$ 内的学员中随机抽取 12 名，再从这 12 名学员中随机抽取 5 名学员，记抽取到学员的该项技能的评价指标在 $[70,75)$ 内的学员人数为 X ，求 X 的分布列与数学期望.

【答案】 (1) $a = 0.036$ ，82.3

(2) 分布列见解析；期望为 $\frac{5}{3}$

【分析】 (1) 由频率分布直方图概率之和为 1 求出 a ，再由频率直方图中位数的计算方法求解即可；

(2) 求出 X 的可能取值，及其对应的概率，即可求出分布列，再由数学期望公式即可得出答案.

【详解】 (1) 由直方图可知 $(0.008 + 0.016 + 0.020 + a + 0.044 + 0.040 + 0.028 + 0.008) \times 5 = 1$ ，

解得 $a = 0.036$.

因为 $(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036) \times 5 = 0.4 < 0.5$ ，

$(0.008 + 0.016 + 0.02 + 0.036 + 0.044) \times 5 = 0.62 > 0.5$ ，

所以学员该项技能的评价指标的中位数在 $[80,85)$ 内.

设学员该项技能的评价指标的中位数为 m ，则 $(m - 80) \times 0.044 + 0.4 = 0.5$ ，

解得 $m \approx 82.3$.

(2) 由题意可知抽取的 12 名学员中该项技能的评价指标在 $[70,75)$ 内的有 4 名, 在 $[85,90)$ 内的有 8 名.

由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4.

$$P(X=0) = \frac{C_8^5}{C_{12}^5} = \frac{7}{99}, \quad P(X=1) = \frac{C_8^4 C_4^1}{C_{12}^5} = \frac{35}{99},$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^3 C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{14}{33}, \quad P(X=3) = \frac{C_8^2 C_4^3}{C_{12}^5} = \frac{14}{99},$$

$$P(X=4) = \frac{C_8^1 C_4^4}{C_{12}^5} = \frac{1}{99},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{99} + 1 \times \frac{35}{99} + 2 \times \frac{14}{33} + 3 \times \frac{14}{99} + 4 \times \frac{1}{99} = \frac{5}{3}.$$

18. 某公司生产一种电子产品, 每批产品进入市场之前, 需要对其进行检测, 现从某批产品中随机抽取 9 箱进行检测, 其中有 5 箱为一等品.

(1) 若从这 9 箱产品中随机抽取 3 箱, 求至少有 2 箱是一等品的概率;

(2) 若从这 9 箱产品中随机抽取 3 箱, 记 ξ 表示抽到一等品的箱数, 求 ξ 的分布列和期望.

【答案】(1) $\frac{25}{42}$

(2) 分布列见解析, $E(\xi) = \frac{5}{3}$

【分析】(1) 有古典概型概率计算公式以及组合数的计算即可求解. (2) 利用超几何分布的知识求得分布列以及期望.

【详解】(1) 设从这 9 箱产品中随机抽取的 3 箱产品中至少有 2 箱是一等品的事件为 A , 则

$$P(A) = \frac{C_5^2 C_4^1 + C_5^3 C_4^0}{C_9^3} = \frac{10 \times 4 + 10 \times 1}{84} = \frac{25}{42},$$

因此从这 9 箱产品中随机抽取 3 箱, 求至少有 2 箱是一等品的概率为 $\frac{25}{42}$.

(2) 由题意可知 ξ 的所有可能取值为 0,1,2,3, 由超几何分布概率公式得

$$P(\xi=0) = \frac{C_4^3 C_5^0}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}, \quad P(\xi=1) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}, \quad P(\xi=2) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21},$$

$$P(\xi=3) = \frac{C_4^0 C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42},$$

所以 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
$P(\xi)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

所以 $E(\xi) = \frac{1}{21} \times 0 + \frac{5}{14} \times 1 + \frac{10}{21} \times 2 + \frac{5}{42} \times 3 = \frac{5}{3}$.

考点 04 二项分布

19. 近年来, 国家鼓励德智体美劳全面发展, 舞蹈课是学生们热爱的课程之一, 某高中随机调研了本校 2023 年参加高考的 90 位考生是否喜欢跳舞的情况, 经统计, 跳舞与性别情况如下表: (单位: 人)

	喜欢跳舞	不喜欢跳舞
女性	25	35
男性	5	25

(1) 根据表中数据并依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 分析喜欢跳舞与性别是否有关联?

(2) 用样本估计总体, 用本次调研中样本的频率代替概率, 从 2023 年本市考生中随机抽取 3 人, 设被抽取的 3 人中喜欢跳舞的人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

【答案】(1) 认为喜欢跳舞与性别有关联

(2) 分布列见解析, 1

【分析】(1) 计算出 χ^2 的值, 对照卡方表完成检验;

(2) 分别计算出样本中喜欢跳舞和不喜欢跳舞的概率, 根据二项分布即可求出随机变量的分布列和数学期望.

【详解】(1) 零假设: H_0 : 喜欢跳舞与性别无关联,

由题意, $\chi^2 = \frac{90(25 \times 25 - 35 \times 5)^2}{60 \times 30 \times 30 \times 60} = 5.625 > 3.841$,

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 可推断 H_0 不成立, 即认为喜欢跳舞与性别有关联.

(2) 由题知, 考生喜欢跳舞的概率 $P = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$, 不喜欢跳舞的概率为 $\frac{2}{3}$

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

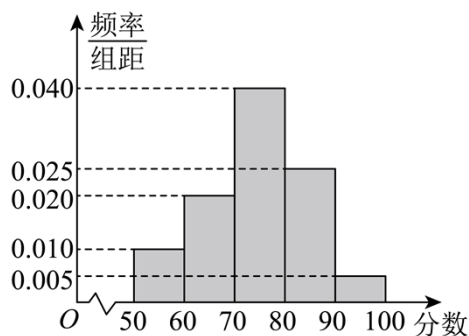
$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

所以 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

由 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

20. 某地区对某次考试成绩进行分析, 随机抽取 100 名学生的 A, B 两门学科成绩作为样本. 将他们的 A 学科成绩整理得到如下频率分布直方图, 且规定成绩达到 70 分为良好. 已知他们中 B 学科良好的有 50 人, 两门学科均良好的有 40 人.



(1) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为这次考试学生的 A 学科良好与 B 学科良好有关;

	B 学科良好	B 学科不够良好	合计
A 学科良好			
A 学科不够良好			
合计			

(2) 用样本频率估计总体概率, 从该地区参加考试的全体学生中随机抽取 3 人, 记这 3 人中 A, B 学科均良好的人数为随机变量 X , 求 X 的分布列与数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001	0.15
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828	2.072

【答案】(1)填表见解析，有 95%把握认为 A 学科良好与 B 学科良好有关

(2)分布列见解析，期望为 $\frac{6}{5}$

【分析】(1) 根据频率分布直方图计算可得出 A 学科良好的人数，进而即可得出 2×2 列联表.根据公式计算得出 K^2 的值，比较即可根据独立性检验得出答案；

(2) 根据 (1) 得出 AB 学科均良好的概率 $P = \frac{2}{5}$ ，可知 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$.然后计算得出 X 取不同值的概率，列出分布列，根据期望公式即可得出答案.

【详解】(1) 由直方图可得 A 学科良好的人数为 $100 \times (0.040 + 0.025 + 0.005) \times 10 = 70$ ，

所以 2×2 列联表如下：

	B 学科良好	B 学科不够良好	合计
A 学科良好	40	30	70
A 学科不够良好	10	20	30
合计	50	50	100

假设 H_0 ： A 学科良好与 B 学科良好无关，

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (30 \times 10 - 40 \times 20)^2}{70 \times 30 \times 50 \times 50} = \frac{100}{21} \approx 4.8 > 3.841,$$

所以有 95%把握认为 A 学科良好与 B 学科良好有关.

(2) AB 学科均良好的概率 $P = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ ，

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$.

$$\text{所以 } P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{36}{125}, \quad P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

因为 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$, 所以 $E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

21. 某数学兴趣小组设计了一个开盲盒游戏: 在编号为 1 到 4 号的四个箱子中随机放入奖品, 每个箱子中放入的奖品个数 ξ 满足 $P(\xi = n) = k \cdot n$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$), 每个箱子中所放奖品的个数相互独立. 游戏规定: 当箱子中奖品的个数超过 3 个时, 可以从该箱中取走一个奖品, 否则从该箱中不取奖品. 每个参与游戏的同学依次从 1 到 4 号箱子中取奖品, 4 个箱子都取完后该同学结束游戏. 甲、乙两人依次参与该游戏.

(1) 求甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率;

(2) 设甲游戏结束时取走的奖品个数为 X , 求 X 的概率分布与数学期望;

(3) 设乙游戏结束时取走的奖品个数为 Y , 求 Y 的数学期望.

【答案】 (1) $\frac{3}{5}$

(2) 分布列见解析; 期望为 $\frac{12}{5}$

(3) $\frac{4}{3}$

【分析】 (1) 先求得 k , 然后求得 ξ 的概率分布, 进而求得甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率.

(2) 根据二项分布的知识求得 X 的概率分布, 进而求得数学期望.

(3) 根据二项分布的期望计算公式求得正确答案.

【详解】 (1) 因为每个箱子中放入的奖品个数 ξ 满足 $P(\xi = n) = k \cdot n$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$),

所以 $k \cdot (1+2+3+4+5) = 1$, 则 $k = \frac{1}{15}$, 所以 ξ 的概率分布为:

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

设事件 A 为甲能从 1 号箱子中取走一个奖品,

则 $P(A) = P(\xi > 3) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = \frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$,

所以甲能从1号箱子中取走一个奖品的概率为 $\frac{3}{5}$.

(2) $X = 0, 1, 2, 3, 4$, 因为甲能从每个箱子中取走一个奖品的概率为 $\frac{3}{5}$, 所以 $X \sim B\left(4, \frac{3}{5}\right)$,

所以 $P(X = k) = C_4^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{4-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, X 的概率分布为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

所以 X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{16}{625} + 1 \times \frac{96}{625} + 2 \times \frac{216}{625} + 3 \times \frac{216}{625} + 4 \times \frac{81}{625} = \frac{12}{5}$.

或 $E(X) = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$.

(3) 乙能从箱子中取到奖品必须箱子中最初有5个奖品, 即乙能从每个箱子中取走一个奖品的概率为

$p = P(\xi = 5) = \frac{1}{3}$, 所以 $Y \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$, 所以 Y 的数学期望为 $E(Y) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

22. 一名学生每天骑车上学, 从家到学校的途中经过6个路口. 假设他在各个路口遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{1}{3}$.

(1) 用 X 表示这名学生在途中遇到红灯的次数, 求 X 的分布;

(2) 求这名学生在途中至少遇到一次红灯的概率.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $\frac{665}{729}$

【分析】(1) 写出随机变量 X 的所有可能取值, 利用二项分布求出对应的概率即可列出对应的分布列;

(2) 利用对立事件求出学生在途中没有遇到一次红灯的概率为 $\frac{64}{729}$, 即可求得结果.

【详解】(1) 根据题意可知, 途中遇到红灯的次数服从二项分布,

易知 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

可知 $P(X = 0) = C_6^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$,

$P(X = 1) = C_6^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{192}{729} = \frac{64}{243}$,

$$P(X=2) = C_6^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{240}{729} = \frac{80}{243},$$

$$P(X=3) = C_6^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729},$$

$$P(X=4) = C_6^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{729} = \frac{20}{243},$$

$$P(X=5) = C_6^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{12}{729} = \frac{4}{243},$$

$$P(X=6) = C_6^6 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729};$$

所以 X 的分布为

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{64}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{4}{243}$	$\frac{1}{729}$

(2) 由 (1) 可知, 这名学生在途中没有遇到一次红灯的概率为 $P(X=0) = \frac{64}{729}$,

所以途中至少遇到一次红灯的概率为 $P = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729}$.

23. 某人准备应聘甲、乙两家公司的高级工程师, 两家公司应聘程序都是: 应聘者先进行三项专业技能测试, 专业技能测试通过后进入面试. 已知该应聘者应聘甲公司, 每项专业技能测试通过的概率均为 $\frac{2}{3}$, 该应聘者应聘乙公司, 三项专业技能测试通过的概率依次为 $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, m , 其中 $0 < m < 1$, 技能测试是否通过相互独立.

(1) 若 $m = \frac{2}{3}$, 分别求该应聘者应聘甲、乙两家公司, 三项专业技能测试恰好通过两项的概率;

(2) 若甲、乙两家公司的招聘在同一时间进行, 该应聘者只能应聘其中一家, 若以专业技能测试通过项目数的数学期望为决策依据, 该应聘者更有可能通过乙公司的技能测试, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$

(2) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【分析】 (1) 根据二项分布和独立事件乘法公式计算求解即可;

(2) 分别求得小明报考甲、乙两公司通过科目数的数学期望, 再进行比较求解即可.

【详解】(1) 若 $m = \frac{2}{3}$, 此时该应聘者应聘乙公司, 三项专业技能测试通过的概率依次为 $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$,

则该应聘者应聘甲公司, 三项专业技能测试恰好通过两项的概率为 $P_{\text{甲}} = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$,

该应聘者应聘乙公司, 三项专业技能测试恰好通过两项的概率为 $P_{\text{乙}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

(2) 设该应聘者应聘甲公司通过的项目数为 X , 应聘乙公司通过的项目数为 Y ,

根据题意可知, $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, 则 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$,

$$P(Y=0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times (1-m) = \frac{1}{18} - \frac{1}{18}m,$$

$$P(Y=1) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times (1-m) + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times (1-m) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times m = \frac{7}{18} - \frac{1}{3}m,$$

$$P(Y=2) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times (1-m) + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times m + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times m = \frac{5}{9} - \frac{1}{6}m,$$

$$P(Y=3) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times m = \frac{5}{9}m,$$

则随机变量 Y 的分布列为:

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18} - \frac{1}{18}m$	$\frac{7}{18} - \frac{1}{3}m$	$\frac{5}{9} - \frac{1}{6}m$	$\frac{5}{9}m$

$$\text{则 } E(Y) = \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{18}m\right) \times 0 + \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{3}m\right) \times 1 + \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{6}m\right) \times 2 + \frac{5}{9}m \times 3 = \frac{3}{2} + m,$$

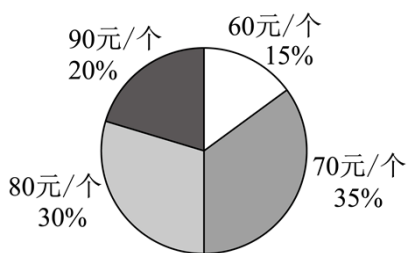
因为应聘者更有可能通过乙公司的技能测试,

$$\text{所以 } \frac{3}{2} + m > 2, \text{ 即 } m > \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < m < 1, \text{ 所以 } \frac{1}{2} < m < 1,$$

所以 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

24. 卡塔尔世界杯的吉祥物“拉伊卜”引发网友和球迷喜爱, 并被亲切地称为“饺子皮”. 某公司被授权销售以“拉伊卜”为设计主题的精制书签. 该精制书签的生产成本为 50 元/个, 为了确定书签的销售价格, 该公司对有购买精制书签意向的球迷进行了调查, 共收集了 200 位球迷的心理价格来估计全部球迷的心理价格分布. 这 200 位球迷的心理价格对应人数比例分布如下图:



若只有在精制书签的销售价格不超过球迷的心理价格时，球迷才会购买精制书签.公司采用常见的饥饿营销的方法刺激球迷购买产品，规定每位球迷最多只能购买一个该精制书签.设每位球迷是否购买该精制书签相互独立，精制书签的销售价格为 x 元/个 ($60 \leq x \leq 90$).

(1) 若 $x = 80$ ，已知某时段有 3 名球迷有购买意向而咨询公司，设 X 为这 3 名球迷中购买精制书签的人数，求 X 的分布列和期望；

(2) 假设共有 Z 名球迷可能购买该精制书签，请比较当精制书签的售价分别定为 70 元和 80 元时，哪种售价对应的总利润的期望最大？

【答案】 (1) 分布列见解析， $\frac{3}{2}$

(2) 当精制书签的销售价格定为 70 元时，对应的总利润的期望最大

【分析】 (1) 先确定购买该精制书签的概率，根据二项分布的概率得分分布列与数学期望；

(2) 根据随机变量之间的关系确定当 $x = 70$ ， $x = 80$ 时的 $E(Y)$ 与 Z 的关系，即可判断得结论.

【详解】 (1) 当 $x = 80$ 时，由样本数据估计球迷购买该精制书签的概率为 $\frac{30+20}{100} = \frac{1}{2}$.

因每位球迷是否购买该精制书签相互独立，

$\therefore X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ ， X 的可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}; P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}; P(X=2) = C_3^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}; P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

其分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

其期望为 $E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(2) 设该公司销售该精制书签所得总利润为 Y 元，

当 $x = 70$ 时，由样本数据估计球迷购买该精制书签的概率为 $\frac{35+30+20}{100} = \frac{17}{20}$ ，

此时 $E(Y) = (70 - 50) \times \frac{17}{20} Z = 17Z$;

当 $x = 80$ 时, 由样本数据估计球迷购买该精制书签的概率为 $\frac{30 + 20}{100} = \frac{1}{2}$.

此时 $E(Y) = (80 - 50) \times \frac{1}{2} Z = 15Z$;

$\therefore 17Z > 15Z$, 所以当精制书签的销售价格定为 70 元时, 对应的总利润的期望最大.

考点 05 二项分布的概率最大问题

25. 已知随机变量 $\xi \sim B(7, 0.5)$, 则概率 $P(\xi = k)$ 最大时, k 的取值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 3 或 4 D. 4 或 5

【答案】C

【分析】 根据二项分布的随机变量取值的概率公式建立不等关系, 可得最大值时的 k .

【详解】 依题意 $P(\xi = k) = C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} = C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^7, k = 0, 1, 2, \dots, 7$,

$$\text{由} \begin{cases} P(X = k) \geq P(X = k + 1) \\ P(X = k) \geq P(X = k - 1) \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq C_7^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ C_7^k \left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq C_7^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \end{cases}, \text{解得 } k = 3 \text{ 或 } k = 4.$$

故选: C.

26. (多选) 已知数轴上一个质点在外力的作用下, 从原点出发, 每次受力质点原地停留或向右移动一个单位, 质点原地停留的概率为 $\frac{1}{10}$, 向右移动的概率为 $\frac{9}{10}$, 且每次是否移动互不影响. 若该质点共受力 7 次, 到达位置的数字记为 X , 则 ()

- A. $P(X = 0) = \left(\frac{1}{10}\right)^7$ B. $P(X = 5) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5$
C. $E(X) = 6.3$ D. $P(X = k) \leq P(X = 6)$

【答案】AC

【分析】 根据二项分布的概率计算即可判断 ACD, 根据二项分布的期望公式即可判断 B.

【详解】 设质点向右移动的次数为 Y , 则 $Y \sim B\left(7, \frac{9}{10}\right)$,

由于 $X = Y$, 所以 $X \sim B\left(7, \frac{9}{10}\right)$, $P(X = 0) = P(Y = 0) = C_7^0 \left(\frac{1}{10}\right)^7 \left(\frac{9}{10}\right)^0 = \left(\frac{1}{10}\right)^7$, 故 A 正确,

$P(X=5) = P(Y=5) = C_7^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5$, 故 B 错误,

由于 $E(Y) = 7 \times \frac{9}{10} = 6.3$, 所以 $E(X) = E(Y) = 6.3$, 故 C 正确,

$$P(X=5) = C_7^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5 > P(X=2) = C_7^2 \left(\frac{1}{10}\right)^5 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2,$$

$$P(X=4) = C_7^4 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \times \left(\frac{9}{10}\right)^4 > P(X=3) = C_7^3 \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3,$$

$$P(X=6) = C_7^6 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^6 > P(X=1) = C_7^1 \left(\frac{1}{10}\right)^6 \times \left(\frac{9}{10}\right)^1,$$

$$P(X=7) = C_7^7 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^7 > P(X=0) = C_7^0 \left(\frac{1}{10}\right)^7 \times \left(\frac{9}{10}\right)^0,$$

$$\frac{P(X=4)}{P(X=5)} = \frac{C_7^4 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \times \left(\frac{9}{10}\right)^4}{C_7^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5} = \frac{C_7^4 \left(\frac{1}{10}\right)}{C_7^5 \left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{C_7^4}{9C_7^5} = \frac{35}{189} < 1, \therefore P(X=5) > P(X=4),$$

$$\frac{P(X=6)}{P(X=5)} = \frac{C_7^6 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^6}{C_7^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5} = \frac{C_7^6 \left(\frac{9}{10}\right)}{C_7^5 \left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{9C_7^6}{C_7^5} = \frac{63}{21} > 1, \therefore P(X=6) > P(X=5),$$

$$\frac{P(X=6)}{P(X=7)} = \frac{C_7^6 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^6}{C_7^7 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^7} = \frac{C_7^6 \left(\frac{1}{10}\right)}{C_7^7 \left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{C_7^6}{9C_7^7} = \frac{7}{9} < 1, \therefore P(X=6) < P(X=7),$$

因此 $P(X=7)$ 最大, 故 $P(X=k) \leq P(X=7)$, 故 D 错误,

故选: AC

27. 在高三的一个班中, 有 $\frac{3}{4}$ 的学生数学成绩合格, 若从班中随机找出 10 名学生, 那么数学成绩合格的学生人数 $\xi \sim B\left(10, \frac{3}{4}\right)$, 则 $P(\xi=k)$ 取最大值时 $k = \underline{\quad}$.

【答案】 8

【分析】 根据题意得到 $P(\xi=k) = C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}}$, 得到 $C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}} \geq C_{10}^{k-1} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^{10}}$ 且 $C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}} \geq C_{10}^{k+1} \cdot \frac{3^{k+1}}{4^{10}}$, 进而求得 k 的值.

【详解】 由数学成绩合格的学生人数 $\xi \sim B\left(10, \frac{3}{4}\right)$, 可得 $P(\xi=k) = C_{10}^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-k} = C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}}$,

则满足 $C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}} \geq C_{10}^{k-1} \cdot \frac{3^{k-1}}{4^{10}}$ 且 $C_{10}^k \cdot \frac{3^k}{4^{10}} \geq C_{10}^{k+1} \cdot \frac{3^{k+1}}{4^{10}}$,

解得 $\frac{29}{4} \leq k \leq \frac{33}{4}$ 且 $k \in \mathbb{N}^*$, 所以 $k = 8$,

所以 $P(\xi=k)$ 取最大值时, 实数 k 的值为 8.

故答案为: 8.

28. 投掷一枚质地并不均匀的硬币, 结果只有正面和反面两种情况, 记每次投掷结果是正面的概率为 p ($0 < p < 1$). 现在连续投掷该枚硬币 10 次, 设这 10 次的结果恰有 2 次是正面的概率为 $f(p)$, 则 $f(p) = \underline{\hspace{2cm}}$; 函数 $f(p)$ 取最大值时, $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $C_{10}^2 p^2 (1-p)^8$ 0.2

【分析】 利用独立重复实验成功次数对应的概率, 求得 $f(p) = C_{10}^2 p^2 (1-p)^8$, 之后对其求导, 利用导数在相应区间上的符号, 确定其单调性, 从而得到其最大值点.

【详解】 10 次的结果恰有 2 次是正面的概率为 $f(p) = C_{10}^2 p^2 (1-p)^8$.

因此 $f'(p) = C_{10}^2 [2p(1-p)^8 - 8p^2(1-p)^7] = 2C_{10}^2 p(1-p)^7(1-5p)$.

令 $f'(p) = 0$, 得 $p = 0.2$.

当 $p \in (0, 0.2)$ 时, $f'(p) > 0$; 当 $p \in (0.2, 1)$ 时, $f'(p) < 0$.

所以 $f(p)$ 在 $(0, 0.2)$ 上单调递增, 在 $(0.2, 1)$ 上单调递减,

当 $p = 0.2$ 时, 函数 $f(p)$ 取最大值.

故答案为: $C_{10}^2 p^2 (1-p)^8$; 0.2.

29. 一质点从平面直角坐标系原点出发, 每次只能向右或向上运动 1 个单位长度, 且每次运动相互独立, 质点向上运动的概率为 $\frac{1}{3}$. 质点运动 5 次后, 所在位置对应的坐标为 $(3, 2)$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 质点运动 2023 次后, 最有可能运动到的位置对应的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{80}{243}$ $(1349, 674)$

【分析】 根据二项分布的概率公式, 以及组合数的对称性质, 可得答案.

【详解】 由运动 5 次后, 所在位置对应坐标为 $(3, 2)$, 则运动中有 3 次向右, 2 次向上, 由题意可得: 其概率

$$P = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{80}{243};$$

设质点运动 2023 次, 所在位置对应的坐标为 $(n, 2023-n)$, 则其概率

$$P' = C_{2023}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2023-n} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 2^n C_{2023}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2023}, \quad \text{令} \begin{cases} 2^{n-1} C_{2023}^{n-1} < 2^n C_{2023}^n \\ 2^{n+1} C_{2023}^{n+1} < 2^n C_{2023}^n \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2^{n-1} \frac{2023!}{(n-1)!(2023-n+1)!} < 2^n \frac{2023!}{n!(2023-n)!} \\ 2^{n+1} \frac{2023!}{(n+1)!(2023-n-1)!} < 2^n \frac{2023!}{n!(2023-n)!} \end{cases}, \quad \text{解得} \frac{4049}{3} > n > \frac{4045}{3},$$

故当 $n=1349$ 时, P' 取得最大值, 此时质点所在位置对应的坐标为 $(1349, 674)$.

故答案为: $\frac{80}{243}; (1349, 674)$.

30. 近年来, 随着智能手机的普及, 网络购物、直播带货、网上买菜等新业态迅速进入了我们的生活, 改变了我们的生活方式. 现将一周网上买菜次数超过 3 次的市民认定为“喜欢网上买菜”, 不超过 3 次甚至从不在网上买菜的市民认定为“不喜欢网上买菜”. 某市 M 社区为了解该社区市民网上买菜情况, 随机抽取了该社区 100 名市民, 得到的统计数据如下表所示:

	喜欢网上买菜	不喜欢网上买菜	合计
年龄不超过 45 岁的市民	40	10	50
年龄超过 45 岁的市民	20	30	50
合计	60	40	100

(1) 是否有 99.9% 的把握认为 M 社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄有关?

(2) M 社区的市民李华周一、周二均在网上买菜, 且周一从 A, B 两个买菜平台随机选择其中一个下单买菜.

如果周一选择 A 平台买菜, 那么周二选择 A 平台买菜的概率为 $\frac{4}{5}$; 如果周一选择 B 平台买菜, 那么周二选择

B 平台买菜的概率为 $\frac{1}{3}$, 求李华周二选择平台 B 买菜的概率;

(3) 用频率估计概率, 现从 M 社区市民中随机抽取 20 名市民, 记其中喜欢网上买菜的市民人数为 X , 事件

“ $X=k$ ”的概率为 $P(X=k)$, 求使 $P(X=k)$ 取得最大值时的 k 的值.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.0	0.005	0.001
-------------------	-----	------	-----	-------	-------

k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	--------

【答案】(1)有 99.9%的把握认为 M 社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄有关.

(2) $\frac{13}{30}$

(3)12

【分析】(1) 根据题意, 计算出 χ^2 的值即可求解;

(2) 根据概率的乘法公式求解;

(3) 利用二项分布求出 $P(X=k)$, 然后计算, 可得结果.

【详解】(1) 零假设 $H_0: M$ 社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄无关,

由题可得,

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (40 \times 30 - 10 \times 20)^2}{50 \times 50 \times 60 \times 40} \approx 16.667 > 10.828,$$

所以零假设不成立,

所以有 99.9%的把握认为 M 社区的市民是否喜欢网上买菜与年龄有关.

(2) 周二选择 B 平台买菜的情况有:

①周一选择 A 平台买菜, 周二选择 B 平台买菜, 概率为 $P_1 = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{4}{5}) = \frac{1}{10}$,

②周一选择 B 平台买菜, 周二选择 B 平台买菜, 概率为 $P_2 = \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$,

所以李华周二选择平台 B 买菜的概率为 $P_1 + P_2 = \frac{13}{30}$.

(3) 由表知, 喜欢网上买菜的频率为 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, 则 $X \sim B(20, \frac{3}{5})$,

所以 $P(X=k) = C_{20}^k \times (\frac{3}{5})^k \times (\frac{2}{5})^{20-k} \quad (k=0,1,2,\dots,20)$.

$$\text{设 } t = \frac{P(x=k)}{P(x=k-1)} = \frac{C_{20}^k \times (\frac{3}{5})^k \times (\frac{2}{5})^{20-k}}{C_{20}^{k-1} \times (\frac{3}{5})^{k-1} \times (\frac{2}{5})^{21-k}} = \frac{3(21-k)}{2k},$$

令 $t = \frac{3(21-k)}{2k} > 1$, 解得 $k < 12.6$, $P(x=k) > P(x=k-1)$;

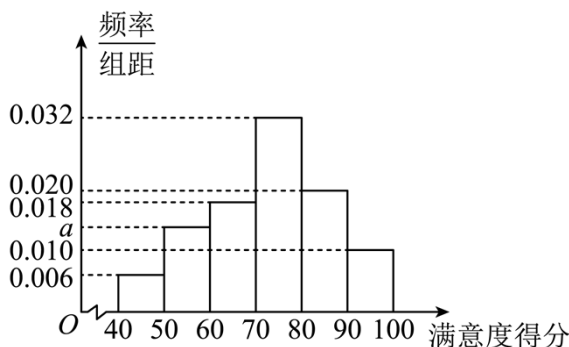
$t = \frac{3(21-k)}{2k} < 1$, 解得 $k > 12.6$, $P(x=k) < P(x=k-1)$

所以当 $k=12$ 时, $P(X=k)$ 最大,

所以使 $P(X=k)$ 取得最大值时的 k 的值为 12.

考点 06 二项分布与超几何分布的综合

31. 为提升本地景点的知名度、美誉度,各地文旅局长纷纷出圈,作为西北自然风光与丝路人文历史大集合的青甘大环线再次引发热议.为了更好的提升服务,某地文旅局对到该地的 5000 名旅行者进行满意度调查,将其分成以下 6 组: $[40,50), [50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100]$, 整理得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 求频率分布直方图中 a 的值;

(2) 若将频率视为概率,从得分在 80 分及以上的旅行者中随机抽取 3 人,用 X 表示这 3 人中得分在 $[90,100]$ 中的人数,求随机变量 X 的分布列及数学期望;

(3) 若将频率视为概率,从得分在 80 分及以上的旅行者中按比例抽取 6 人,再从这 6 人中一次性抽取 3 人,用 Y 表示这 3 人中得分在 $[90,100]$ 中的人数,求随机变量 Y 的分布列及数学期望.

【答案】(1) $a = 0.014$

(2) 分布列见解析; 数学期望 $E(X) = 1$

(3) 分布列见解析; 数学期望 $E(Y) = 1$

【分析】(1) 根据频率和为 1 可构造方程求得 a 的值;

(2) 易知 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 根据二项分布概率公式可得 X 每个取值对应的概率, 由此可得分布列; 根据二项分布期望公式可求得期望值;

(3) 根据比例可得 6 人的分数分布情况, 从而确定 Y 的可能的取值, 根据超几何分布概率公式可求得 Y 每个取值对应的概率, 由此可得分布列; 根据数学期望公式可求得期望值.

【详解】(1) 由题意得: $(0.006 + a + 0.018 + 0.032 + 0.020 + 0.010) \times 10 = 1$, 解得: $a = 0.014$.

(2) 由频率分布直方图知：从得分在80分及以上的旅行者中随机抽取1人，得分在[90,100]的概率为

$$\frac{0.010}{0.010+0.020} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right),$$

$\therefore X$ 所有可能的取值为0,1,2,3,

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}; \quad P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9};$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

(3) 从得分在80分及以上的旅行者中按比例抽取6人，则6人中得分在[80,90]的人数为 $6 \times \frac{2}{3} = 4$ 人，得分在[90,100]的人数为 $6 \times \frac{1}{3} = 2$ 人；

则 Y 所有可能的取值为0,1,2,

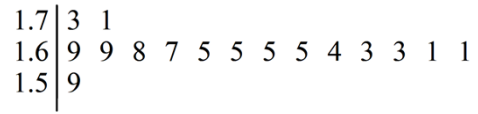
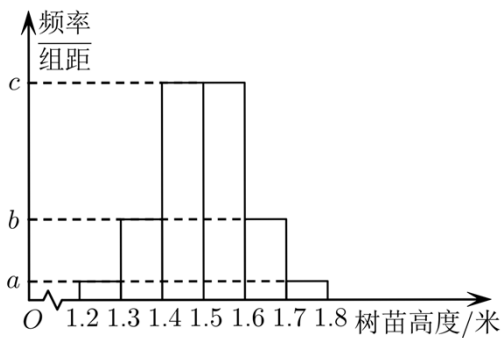
$$P(Y=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad P(Y=1) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}; \quad P(Y=2) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};$$

$\therefore Y$ 的分布列为：

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{数学期望 } E(Y) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$

32. 某公司订购了一批树苗，为了研究其生长规律，从中随机抽测100株树苗的高度，经数据处理后得到如图①的频率分布直方图，其中最高的16株树苗高度的茎叶图如图②所示，以这100株树苗高度的频率估计整批树苗高度的概率。



图②

图①

- (1)求这批树苗的高度高于 1.60 的概率, 并求图①中 a, b, c 的值;
- (2)研究发现高度在 1.65 以上的树苗有特殊的生长规律, 于是从抽测高度在 1.65 以上 (不含1.65) 的树苗中抽取 3 株做研究, 设 X 为高度在 $(1.65, 1.70)$ 的树苗数量, 求 X 的分布列和数学期望.
- (3)为做进一步对比研究, 需从这批订购的树苗中随机选取 3 株, 记 ξ 为高度在 $(1.40, 1.60]$ 的树苗数量, 求 ξ 的分布列和数学期望;

【答案】(1)这批树苗的高度高于 1.60 的概率为 0.15, $a = 0.2, b = 1.3, c = 3.5$

(2)分布列见解析, 数学期望为 2

(3)分布列见解析, 数学期望为 2.1

【分析】(1) 结合茎叶图以及古典概型的概率计算公式计算出所求概率.结合茎叶图以及频率之和为1求得 a, b, c .

(2) 利用超几何分布的分布列计算公式, 计算出分布列并求得数学期望.

(3) 利用二项分布的分布列计算公式, 计算出分布列并求得数学期望.

【详解】(1) 这批树苗的高度高于 1.60 的概率为 $\frac{16-1}{100} = 0.15$,

$$a = \frac{2}{100} \times \frac{1}{0.1} = 0.2, b = \frac{13}{100} \times \frac{1}{0.1} = 1.3,$$

$$(a+b+c) \times 2 \times 0.1 = 1, (1.5+c) \times 2 \times 0.1 = 1 \Rightarrow c = 3.5.$$

(2) 1.65 以上 (不含1.65) 的有 6 株, 其中高度在 $(1.65, 1.70)$ 的树苗数量为 4 株,

$$X = 1, 2, 3,$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}, P(X=3) = \frac{C_2^0 C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3
-----	---	---	---

P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
-----	---------------	---------------	---------------

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2.$$

(3) 依题意 $\xi \sim B(3, 3.5 \times 0.1 \times 2)$, 即 $\xi \sim B(3, 0.7)$,

$$P(\xi = 0) = C_3^0 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^3 = 0.027,$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \cdot 0.7^1 \cdot 0.3^2 = 0.189,$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^1 = 0.441,$$

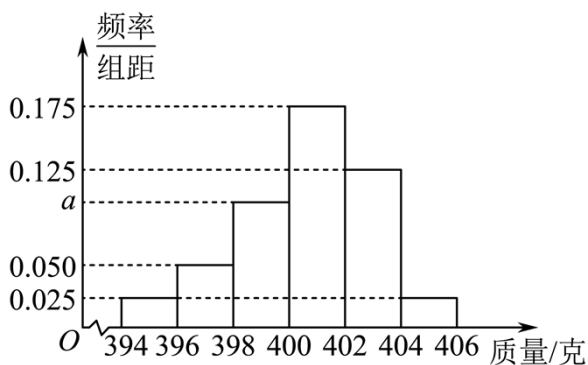
$$P(\xi = 3) = C_3^3 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^0 = 0.343,$$

所以 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

所以 $E(\xi) = 3 \times 0.7 = 2.1$.

33. 某食盐厂为了检查一条自动流水线的生产情况, 随机抽取该流水线上的 100 袋食盐称出它们的质量(单位: 克)作为样本数据, 质量的分组区间为 $[394, 396], (396, 398], \dots, (404, 406]$. 由此得到样本的频率分布直方图如图:



(1) 求 a 的值;

(2) 从该流水线上任取 2 袋食盐, 设 X 为质量超过 402g 的食盐数量, 求随机变量 X 的分布列及数学期望;

(3) 在上述抽取的 100 袋食盐中任取 2 袋, 设 Y 为质量超过 402g 的食盐数量, 求随机变量 Y 的分布列.

【答案】 (1) $a = 0.100$

(2) 分布列见解析, 0.6

(3)分布列见解析

【分析】(1) 利用诸小矩形面积之和为 1 可求 a 的值;

(2) 利用二项分布可求 X 的分布列及数学期望;

(3) 利用超几何分布可求 Y 的分布列;

【详解】(1) 由题意可得: $(0.025 + 0.050 + a + 0.175 + 0.125 + 0.025) \times 2 = 1$,

解得 $a = 0.100$.

(2) 根据样本估计总体的思想, 取一袋食盐,

该食盐的质量超过 402g 的概率为 $(0.125 + 0.025) \times 2 = 0.3$.

从流水线上任取 2 袋食盐互不影响, 该问题可以看成 2 次独立重复试验,

质量超过 402g 的袋数 X 的所有可能取值为 0, 1, 2,

且 X 服从二项分布 $X \sim B(2, 0.3)$,

$$P(X = k) = C_2^k (0.3)^k (1 - 0.3)^{2-k}, k = 0, 1, 2.$$

$$P(X = 0) = C_2^0 (0.3)^0 (1 - 0.3)^2 = 0.49,$$

$$P(X = 1) = C_2^1 (0.3)^1 (1 - 0.3)^1 = 0.42,$$

$$P(X = 2) = C_2^2 (0.3)^2 (1 - 0.3)^0 = 0.09,$$

\therefore 随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	0.49	0.42	0.09

$$E(X) = 2 \times 0.3 = 0.6.$$

(3) 质量超过 402g 的食盐数量为 $(0.125 + 0.025) \times 2 \times 100 = 30$ 袋,

随机变量 Y 的所有可能取值为 0, 1, 2, 且 Y 服从超几何分布.

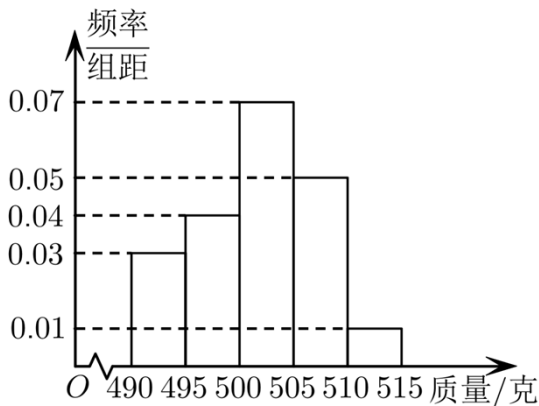
$$P(Y = 0) = \frac{C_{30}^0 C_{70}^2}{C_{100}^2} = \frac{161}{330}, \quad P(Y = 1) = \frac{C_{30}^1 C_{70}^1}{C_{100}^2} = \frac{14}{33},$$

$$P(Y = 2) = \frac{C_{30}^2 C_{70}^0}{C_{100}^2} = \frac{29}{330},$$

\therefore 随机变量 Y 的分布列为:

Y	0	1	2
P	$\frac{161}{330}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{29}{330}$

34. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的质量（单位：克），质量的分组区间为 $(490, 495]$, $(495, 500]$, \dots , $(510, 515]$ ，由此得到样本的频率分布直方图如图。



- (1) 根据频率分布直方图，求质量超过 505 克的产品数量；
- (2) 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 X 为质量超过 505 克的产品数量，求 X 的分布列，并求其均值；
- (3) 从该流水线上任取 2 件产品，设 Y 为质量超过 505 克的产品数量，求 Y 的分布列。

【答案】(1)12 (件)

(2) 分布列见解析， $\frac{3}{5}$

(3) 分布列见解析

【分析】(1) 根据频率分布直方图直接可计算产品数量；

(2) 由已知可知该分布为超几何分布，进而可得分布列与期望；

(3) 由已知可知该分布为二项分布，进而可得分布列。

【详解】(1) 质量超过 505 克的产品的频率为 $5 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 0.3$ ，

\therefore 质量超过 505 克的产品数量为 $40 \times 0.3 = 12$ 。

(2) 质量超过 505 克的产品数量为 12，

则质量未超过 505 克的产品数量为 28， X 服从超几何分布， X 的取值为 0, 1, 2。

$$P(X=0) = \frac{C_{28}^2}{C_{40}^2} = \frac{63}{130}, \quad P(X=1) = \frac{C_{12}^1 C_{28}^1}{C_{40}^2} = \frac{28}{65},$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2}{C_{40}^2} = \frac{11}{130}.$$

∴ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{63}{130}$	$\frac{28}{65}$	$\frac{11}{130}$

解法一： X 的均值为 $E(X) = 0 \times \frac{63}{130} + 1 \times \frac{28}{65} + 2 \times \frac{11}{130} = \frac{3}{5}$.

解法二： X 的均值为 $E(X) = \frac{2 \times 12}{40} = \frac{3}{5}$.

(3) 根据用样本估计总体的思想，取一件产品，该产品的质量超过 505 克的概率为 $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

从流水线上任取 2 件产品互不影响，

该问题可看二项分布，质量超过 505 克的件数 Y 可能的取值为 0, 1, 2，且 $Y \sim B\left(2, \frac{3}{10}\right)$.

$$\therefore P(Y=k) = C_2^k \times \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{2-k}, \quad k=0, 1, 2.$$

$$\therefore P(Y=0) = C_2^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100},$$

$$P(Y=1) = C_2^1 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50},$$

$$P(Y=2) = C_2^2 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}.$$

∴ Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{49}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{100}$

35. 为了引导居民合理用水，某市决定全面实施阶梯水价. 阶梯水价原则上以住宅（一套住宅为一户）的月用水量为基准定价，具体划分标准如表：

阶梯级别	第一阶梯水量	第二阶梯水量	第三阶梯水量
月用水量范围（单位：立方米）	(0,10]	(10,15]	(15,+∞)

从本市随机抽取了 10 户家庭，统计了同一月份的月用水量，得到如图茎叶图：

0	7
1	0 1 2 3 3 4 5
2	0
3	2

(1) 现要在这 10 户家庭中任意选取 3 家，求取到第二阶梯水量的户数 X 的分布列与数学期望；

(2) 用抽到的 10 户家庭作为样本估计全市的居民用水情况，从全市依次随机抽取 10 户，若抽到 n 户月用水量为二阶的可能性最大，求 n 的值.

【答案】(1) 分布列见解析， $\frac{9}{5}$

(2) 6

【详解】(1) 由茎叶图可知抽取的 10 户中用水量为一阶的有 2 户，二阶的有 6 户，三阶的有 2 户.

第二阶段水量的户数 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}.$$

(2) 设 Y 为从全市抽取的 10 户中用水量为二阶的家庭户数，依题意得 $Y \sim B\left(10, \frac{3}{5}\right)$,

所以 $P(Y=k) = C_{10}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}$ ，其中 $k=0, 1, 2, \dots, 10$.

$$\text{设 } t = \frac{P(Y=k)}{P(Y=k-1)} = \frac{C_{10}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}}{C_{10}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{11-k}} = \frac{3(11-k)}{2k},$$

若 $t > 1$ ，则 $k < 6.6$ ， $P(Y=k-1) < P(Y=k)$ ；

若 $t < 1$ ，则 $k > 6.6$ ， $P(Y=k-1) > P(Y=k)$.

所以当 $k=6$ 或 7 ， $P(Y=k)$ 可能最大， $\frac{P(Y=6)}{P(Y=7)} = \frac{C_{10}^6 \left(\frac{3}{5}\right)^6 \left(\frac{2}{5}\right)^4}{C_{10}^7 \left(\frac{3}{5}\right)^7 \left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{7}{6} > 1$ ，所以 n 的取值为 6.

36. 已知条件①采用无放回抽取：②采用有放回抽取，请在上述两个条件中任选一个，补充在下面问题中横线上并作答，选两个条件作答的以条件①评分.

问题：在一个口袋中装有 3 个红球和 4 个白球，这些球除颜色外完全相同，若_____，从这 7 个球中随机抽取 3 个球，记取出的 3 个球中红球的个数为 X ，求随机变量 X 的分布列和期望.

【答案】 分布列答案见解析，数学期望： $\frac{9}{7}$

【分析】 若选①，分别求出随机变量 X 的取值为 0, 1, 2, 3 的概率，即可得到分布列，计算期望；若选②，则随机变量 X 服从二项分布，根据二项分布的概率公式列出分布列，计算期望.

【详解】 若选①，由题意，随机变量 X 的可能值为 0, 1, 2, 3

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35};$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\text{期望 } E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7};$$

若选②，由题意，随机变量 X 的可能值为 0, 1, 2, 3，且 $X \sim B\left(3, \frac{3}{7}\right)$,

$$\therefore P(X=0) = C_3^0 \left(1 - \frac{3}{7}\right)^3 = \frac{64}{343},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{3}{7} \times \left(1 - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{144}{343},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{108}{343},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343},$$

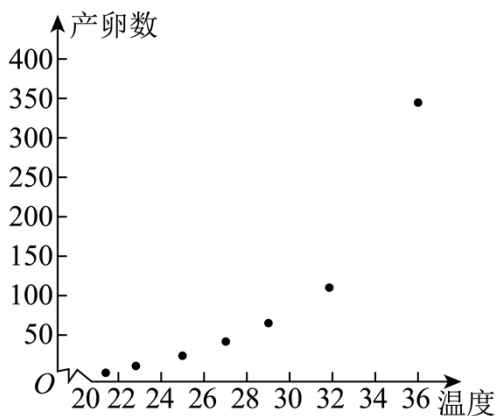
$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{27}{343}$

期望 $E(X) = 3 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$.

考点 07 决策问题

37. 红蜘蛛是柚子的主要害虫之一，能对柚子树造成严重伤害，每只红蜘蛛的平均产卵数 y （个）和平均温度 x （ $^{\circ}\text{C}$ ）有关，现收集了以往某地的 7 组数据，得到下面的散点图及一些统计量的值.



(1) 根据散点图判断， $y = bx + a$ 与 $y = ce^{dx}$ （其中 $e = 2.718 \dots$ 为自然对数的底数）哪一个更适合作为平均产卵数 y （个）关于平均温度 x （ $^{\circ}\text{C}$ ）的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

(2) 由（1）的判断结果及表中数据，求出 y 关于 x 的回归方程.（计算结果精确到 0.1）

附：回归方程中 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

参考数据 ($z = \ln y$)					
$\sum_{i=1}^7 x_i^2$	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i z_i$	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}
5215	17713	714	27	81.3	3.6

(3) 根据以往每年平均气温以及对果园年产值的统计，得到以下数据：平均气温在 22°C 以下的年数占 60%，对柚子产量影响不大，不需要采取防虫措施；平均气温在 22°C 至 28°C 的年数占 30%，柚子产量会下降 20%；平均气温在 28°C 以上的年数占 10%，柚子产量会下降 50%。为了更好的防治红蜘蛛虫害，农科所研发出各种防害措施供果农选择.

在每年价格不变，无虫害的情况下，某果园年产值为 200 万元，根据以上数据，以得到最高收益（收益 =

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/518032073061007027>