

函数的概念与表示-一轮复习考点专练

核心考点 6 分段函数

角度 1 求分段函数的解析式或函数值

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \in [0, 2], \\ 2f(x-2), & x \in (2, +\infty), \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线方程为 ()

A. $4x - y - 28 = 0$ B. $4x + y - 12 = 0$ C. $x - 4y - 12 = 0$ D. $x + 4y - 22 = 0$

2. 设由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1, 1]$ 上,

$f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$, 则 $a+3b$ 的值为_____.

3. 已知曲线 $y = \frac{x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -2)$ 处的切线方程为 $y = kx + b$, 记 $\max\{p, q\} = \begin{cases} p, & p \geq q, \\ q, & p < q, \end{cases}$ 设函

数 $F(x) = \max\{4|x-1|, kx+b\}$, 则 $F(x)$ 的最小值为_____.

角度 2 已知函数值求参数或自变量的值

4. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}, & x < 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) = 1$, 则实数 a 的值为 ()

A. 1 B. 4 C. 1 或 4 D. 2

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 2(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(m) = f(m+1)$, 则 $f(\frac{2}{m}) =$ _____.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \lg(-x), & x < 0 \\ |e^x - 2|, & x \geq 0 \end{cases}$.

(1) 若 $f(a) = 1$, 求 a 的值;

(2) 若关于 x 的方程 $f^2(x) + mf(x) + 2m + 1 = 0$ 恰有 5 个实数根, 求 m 的取值范围.

角度 3 分段函数的定义域

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \{-1, 1\} \\ x, & x \in \{0, 2\} \end{cases}$ 的定义域为 ()

A. $\emptyset$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

8. 德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著，是解析数论的创始人之一，以其命名的

函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ，称为狄利克雷函数，则关于 $f(x)$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$ B. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, f(f(x)) = 1$ D. $f(x)$ 为偶函数

9. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则正数 a 的取值范围是_____.

角度 4 分段函数的值域或最值

10. 设函数 $y = f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ ，对给定正数 M ，定义函数 $f_M(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq M \\ M, & f(x) > M \end{cases}$ 则称

函数 $f_M(x)$ 为 $f(x)$ 的“孪生函数”，若给定函数 $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2^x - 1, & x > 0 \end{cases}$, $M = 1$ ，则

$y = f_M(x)$ 的值域为（ ）

- A. $[-2, 1]$ B. $[-1, 2]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, -1]$

11. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = -f(x)$ ，当 $x \in [0, 8]$ 时，

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in [0, 4) \\ -2x + 16, & x \in [4, 8] \end{cases}$ 若 $x \in [32, 38]$ 时， $f(x) \leq t^2 - 2t - 4$ 恒成立，则实数 t 的取值范围

是_____.

12. 已知函数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$.

(1) 求 $g\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 的值；

(2) $\forall a, b \in \mathbf{R}$ ，定义 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$ ，求 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 的解析式，并求出 $h(x)$

的最小值.

角度 5 根据分段函数的值域（最值）求参数

13. 已知 $f(x) = \begin{cases} (a-1)^x - \frac{1}{4}, & x \leq 1 \\ x + \frac{a}{x} - 1, & x > 1 \end{cases}$ ($a > 1$) 的值域为 D , $D \subseteq [\frac{1}{2}, +\infty)$, 则 a 的取值范围是

()

- A. $[\frac{3}{2}, 2]$ B. $[\frac{5}{4}, \frac{5}{3})$ C. $[\frac{3}{2}, 2)$ D. $[\frac{7}{4}, 2]$

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x < 0, \\ -x^2 + 2x, & x \geq 0, \end{cases}$ 且 $f(-x) = -f(x)$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的

值域为 $[-1, 1]$, 则 ()

- A. $a=2$ B. $f(f(3))=15$
C. $|m-n|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ D. $|m-n|$ 的最大值为 $2+2\sqrt{2}$

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x} - 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$

(1) 当 $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b)$ 时, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值;

(2) 是否存在实数 $a, b (a < b)$, 使得函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域都是 $[a, b]$, 若存在, 则求出 a, b 的值; 若不存在, 请说明理由.

角度 6 分段函数的性质及应用

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \in [0, 2], \\ 2f(x-2), & x \in (2, +\infty), \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线方程为 ()

- A. $4x - y - 28 = 0$ B. $4x + y - 12 = 0$ C. $x - 4y - 12 = 0$ D. $x + 4y - 22 = 0$

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, 下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 中心对称
B. 函数 $f(x)$ 存在极大值点和极小值点
C. 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 $(-1, 1)$
D. 对任意 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2}{e}$ 恒成立

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < -2 \text{ 或 } x > 1 \\ \sqrt{12 - 3x^2}, & -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = f(x) - a$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

①若函数 $g(x)$ 无零点, 则 a 的一个取值为_____;

②若函数 $g(x)$ 有 4 个零点 $x_i (i=1,2,3,4)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ _____.

角度 7 分段函数的单调性

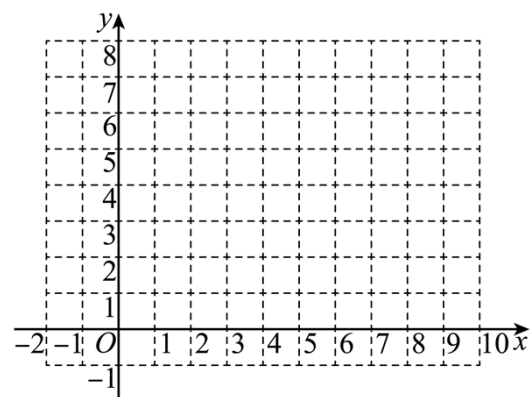
19. 函数 $f(x) = |4-x| \cdot (x-1)$ 在 () 单调递增.

- A. $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ B. $(1, 4)$ C. $(-\infty, 4)$ D. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right), (4, +\infty)$

20. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, & x \leq 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$ 的单调递增区间为_____.

21. 已知 $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2 + 2$. 定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases}$, 设

$$m(x) = \min\{f(|x-t|), g(|x-2t|)\}.$$



(1)若 $t=3$, 画出函数 $m(x)$ 的图象并直接写出函数 $m(x)$ 的单调区间;

(2)定义区间 $A=(p, q)$ 的长度 $L(A)=q-p$. 若

$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq n)$, 则 $L(B) = \sum_{i=1}^n L(A_i)$. 设关于 x 的不等

式 $m(x) < t$ 的解集为 D . 是否存在实数 t , 且 $t \leq 3$, 使得 $L(D) = 6$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

角度 8 根据分段函数的单调性求参数

22. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x-4}, x \leq \frac{3}{4} \\ \log_a(4x) - 1, x > \frac{3}{4} \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0,1)$ B. $(1, \sqrt{3}]$ C. $(1, \sqrt{3})$ D. $(1,3)$

23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_4(x+2), x \leq m \\ 2^x - 3, x > m \end{cases}$, 其中 $m \geq -1$. 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程

$f(x) = b$ 有两个不同的实数根, 则 m 的取值范围是_____.

24. 已知函数 $f(x) = |x(ax+1)| (a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间与最值;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 求 a 的取值范围.

角度 9 解分段函数不等式

25. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{x^2}{2}, x \leq 0 \\ x^3 + 3x^2 - 3, x > 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集为 ()

- A. $\{0\} \cup [1, +\infty)$ B. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
C. $[0, 1]$ D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

26. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^{2-x}, x \geq 2 \\ 4^{x-2}, x < 2 \end{cases}$, 则 $f(2x-2) \geq f(x+1)$ 的解集为_____.

27. 函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x)$ 成立,

$x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$

(1) 当 $x \in (2, 6)$ 时, 求函数 $f(x)$ 的解析式:

(2) 求不等式 $f(x) > -1$ 在区间 $(2, 6)$ 上的解集.

参考答案:

1. B

【分析】根据分段函数结合导函数求出 $f'(5)$ ，再根据点斜式得出直线方程.

【详解】当 $x \in (0, 2]$ 时， $f'(x) = 2x - 3$ ，

当 $x \in (4, 6]$ 时， $f(x) = 2f(x-2) = 4f(x-4)$ ，则 $f'(x) = 4f'(x-4)$ ，

所以 $f(5) = 4f(1) = -8$ ， $f'(5) = 4f'(1) = -4$.

则所求的切线方程为 $y - (-8) = -4(x - 5)$ ，即 $4x + y - 12 = 0$.

故选：B.

2. -10

【分析】根据题意，得到 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2})$ 且 $f(-1) = f(1)$ ，列出方程组，求得 a, b 的值，即可求解.

【详解】由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数，且 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ，

可得 $f(\frac{3}{2}) = f(-\frac{1}{2})$ ，因为 $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$ ，所以 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2})$ ，

可得 $\frac{\frac{1}{2}b+2}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{2}a+1$ ，即 $3a+2b=-2$ ，

又由 $f(-1) = f(1)$ ，可得 $-a+1 = \frac{b+2}{2}$ ，即 $b = -2a$ ，

联立方程组 $\begin{cases} 3a+2b=-2 \\ b=-2a \end{cases}$ ，解得 $a=2, b=-4$ ，所以 $a+3b=-10$.

故答案为：-10.

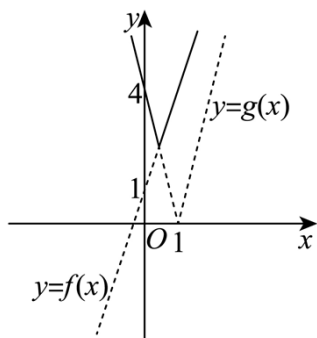
3. $\frac{16}{7}$

【分析】先求出切线方程，再结合函数的新定义和函数图像找到最小值点，代入横坐标即可求出最小值.

【详解】因为 $y = \frac{x-1}{x+2}$ ，所以 $y' = \left(\frac{x-1}{x+2} \right)' = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ ，

所以 $y'(-1) = 3$ ，在点 $(-1, -2)$ 处的切线方程为 $y+2 = 3(x+1) \Rightarrow y = 3x+1$ ，

设 $g(x) = 4|x-1|$, $f(x) = 3x+1$, 由 $\max\{p, q\} = \begin{cases} p, p \geq q, \\ q, p < q, \end{cases}$ 和函数图像可知,



当 $x < 1$ 时, 最小值为两函数的交点,

所以 $3x+1=4(1-x) \Rightarrow x = \frac{3}{7}$, 此时 $f(x) = g(x) = 3 \times \frac{3}{7} + 1 = \frac{16}{7}$,

故答案为: $\frac{16}{7}$

4. B

【分析】分 $a < 1$ 和 $a \geq 1$, 求解 $f(a)=1$, 即可得出答案.

【详解】当 $a < 1$ 时, $f(a) = 2^{a-1} = 1$, 则 $a-1=0$, 解得: $a=1$ (舍去);

当 $a \geq 1$ 时, $f(a) = \frac{\sqrt{a}}{2} = 1$, 则 $\sqrt{a} = 2$, 解得: $a=4$.

故选: B.

5. 14

【分析】解方程求得 m 的值, 进而求得 $f\left(\frac{2}{m}\right)$.

【详解】 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, 0 < x < 1 \\ 2(x-1), x \geq 1 \end{cases}$ 的增区间为 $(0,1), [1,+\infty)$,

由于 $0 < m < m+1$ 且 $f(m) = f(m+1)$,

所以 $\sqrt{m} = 2(m+1-1), 2m = \sqrt{m}, \sqrt{m} = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{2}{m} = 8$.

所以 $f\left(\frac{2}{m}\right) = f(8) = 2(8-1) = 14$.

故答案为: 14

6. (1) a 的值为 0 或 -10 或 $\ln 3$; (2) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

【解析】(1) 根据函数解析式, 分别讨论 $a < 0$ 和 $a \geq 0$ 两种情况, 即可求出结果;

(2) 先作出函数 $f(x)$ 的大致图象, 令 $t = f(x)$, 结合图象, 可将原方程恰有 5 个实数根等价于关于 t 的方程 $t^2 + mt + 2m + 1 = 0$ 有 2 个不相等的实数根 t_1, t_2 , 根据一元二次方程根的分布情况, 即可求出结果.

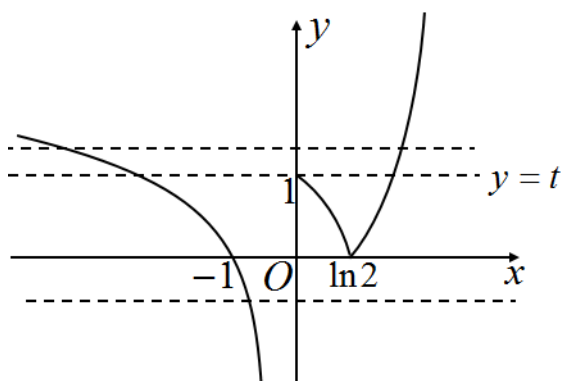
【详解】(1) 若 $a < 0$, 则 $f(a) = \lg(-a) = 1$, 解得 $a = -10$;

若 $a \geq 0$, 则 $f(a) = |e^a - 2| = 1$, 解得 $a = 0$ 或 $\ln 3$.

故 a 的值为 0 或 -10 或 $\ln 3$.

$$(2) \text{ 由题可知 } f(x) = \begin{cases} \lg(-x), & x < 0 \\ -e^x + 2, & 0 \leq x < \ln 2 \\ e^x - 2, & x \geq \ln 2 \end{cases}$$

作出 $f(x)$ 的大致图象如下:



令 $t = f(x)$, 由图像可得, 当 $0 < t \leq 1$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有三个不同实根;

当 $t > 1$ 或 $t = 0$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有两个不同实根;

当 $t < 0$ 时, 方程 $t = f(x)$ 有一个实根;

因此关于 x 的方程 $f^2(x) + mf(x) + 2m + 1 = 0$ 恰有 5 个实数根等价于关于 t 的方程

$t^2 + mt + 2m + 1 = 0$ 有 2 个不相等的实数根 t_1, t_2 , 不妨设 $t_1 > t_2$,

$$\text{则 } \begin{cases} t_1 > 1 \\ 0 < t_2 \leq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} t_2 = 0 \\ 0 < t_1 \leq 1 \end{cases},$$

$$\text{令 } h(t) = t^2 + mt + 2m + 1,$$

$$\text{若 } t_1 > 1, 0 < t_2 < 1, \text{ 则 } \begin{cases} h(0) > 0 \\ h(1) < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 3m+2 < 0 \\ m^2-8m-4 > 0 \end{cases}, \text{ 不等式无解;}$$

$$\text{若 } t_1 > 1, t_2 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} h(0) > 0 \\ h(1) = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 3m+2 = 0 \\ m^2-8m-4 > 0 \end{cases}, \text{ 不等式无解;}$$

$$\text{若 } t_2 = 0, 0 < t_1 \leq 1, \text{ 则 } \begin{cases} h(0) = 0 \\ h(1) \geq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2m+1 = 0 \\ 3m+2 \geq 0 \\ m^2-8m-4 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m = -\frac{1}{2}.$$

故 m 的取值范围是 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

【点睛】方法点睛:

已知函数零点个数(方程根的个数)求参数值(取值范围)常用的方法:

- (1) 直接法: 直接求解方程得到方程的根, 再通过解不等式确定参数范围;
- (2) 分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数的值域问题加以解决;
- (3) 数形结合法: 先对解析式变形, 进而构造两个函数, 然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象, 利用数形结合的方法求解.

7. C

【分析】由对分段函数的定义域的理解可得.

【详解】由 $\{-1, 1\} \cup \{0, 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$,

得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 0, 1, 2\}$.

故选: C.

8. BCD

【分析】根据函数解析式结合函数的定义域、值域和奇偶性逐一判断即可.

【详解】因为函数 $f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 所以函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\{0, 1\}$, 故 A 错误,

B 正确;

因为 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$ 且 0 与 1 均为有理数, 所以 $f(f(x)) = f(0) = 1$ 或 $f(f(x)) = f(1) = 1$,

故 C 正确;

函数 $f(-x) = \begin{cases} 1, & -x \text{ 为有理数} \\ 0, & -x \text{ 为无理数} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, D 正确.

故选: BCD

9. (0,1)

【分析】由题知 $a \leq 3$, 进而讨论得当 $a < 2$, $0 < x \leq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2$ 的值域为 $[(a-2)^2, 4)$, 再分 $(a-2)^2 \leq 3$ 和 $(a-2)^2 > 3$ 两种情况讨论求解即可.

【详解】解: 因为当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^x + 3 \in (3, 4]$,

所以, 要使函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集, 则 $a \leq 3$,

当 $3 \geq a \geq 2$, $0 < x \leq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2$ 值域中有元素 0, 此时不满足题意,

所以, 当 $a < 2$, $0 < x \leq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2$ 的值域为 $[(a-2)^2, 4)$,

下面分两种情况讨论,

当 $(a-2)^2 \leq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $[(a-2)^2, 4]$,

要使条件满足, 则 $\begin{cases} (a-2)^2 \leq 3 \\ a < 2 \\ (a-2)^2 > a \end{cases}$, 解得: $2 - \sqrt{3} \leq a < 1$

当 $(a-2)^2 > 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $(3, 4]$,

要使条件满足, 则 $\begin{cases} (a-2)^2 > 3 \\ a \leq 3 \\ a < 2 \end{cases}$, 解得 $0 < a < 2 - \sqrt{3}$,

综上, 正数 a 的取值范围是 $(0, 1)$

故答案为: $(0, 1)$

10. A

【分析】根据“孪生函数”的定义, 作出函数的图象, 根据图象即可求解.

【详解】根据“孪生函数”定义不难发现其图像特点, 以 $y = M$ 为分界线,

$f(x)$ 图像在 $y = M$ 下方的图像不变, 在 M 上方的图像则为 $y = M$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/518047031023006115>