

2023 届福建省莆田市涵江区莆田七中高三下学期第三次段考数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右顶点为 A ，右焦点为 F ，过点 F 作平行 C 的一条渐近线的直线与 C 交于点 B ，则

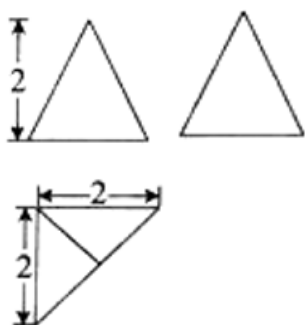
$\triangle AFB$ 的面积为 ()

- A. $\frac{32}{15}$ B. $\frac{64}{15}$ C. 5 D. 6

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & 0 < x \leq 1, \\ -x(x-1)(x-3), & x > 1, \end{cases}$ 函数 $g(x) = f(x) + kx$ 只有 1 个零点，则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ D. $(0, 1)$

3. 已知底面是等腰直角三角形的三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图所示，俯视图中的两个小三角形全等，则 ()



- A. PA, PB, PC 两两垂直 B. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{8}{3}$
- C. $|PA| = |PB| = |PC| = \sqrt{6}$ D. 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $3\sqrt{5}$

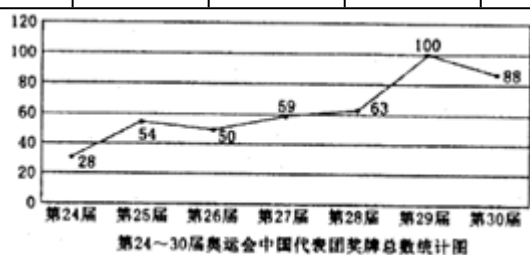
4. 已知复数 $z = a + i, a \in \mathbb{R}$ ，若 $|z| = 2$ ，则 a 的值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. ± 1 D. $\pm\sqrt{3}$

5. 下图是我国第 24~30 届奥运奖牌数的回眸和中国代表团奖牌总数统计图，根据表和统计图，以下描述正确的是 ()。

	金牌	银牌	铜牌	奖牌
	(块)	(块)	(块)	总数

24	5	11	12	28
25	16	22	12	54
26	16	22	12	50
27	28	16	15	59
28	32	17	14	63
29	51	21	28	100
30	38	27	23	88



- A. 中国代表团的奥运奖牌总数一直保持上升趋势
- B. 折线统计图中的六条线段只是为了便于观察图象所反映的变化，不具有实际意义
- C. 第30届与第29届北京奥运会相比，奥运金牌数、银牌数、铜牌数都有所下降
- D. 统计图中前六届奥运会中国代表团的奥运奖牌总数的中位数是54.5

6. 已知函数 $f(x)$ 满足：当 $x \in [-2, 2)$ 时， $f(x) = \begin{cases} x(x+2), & -2 \leq x \leq 0 \\ \log_2 x, & 0 < x < 2 \end{cases}$ ，且对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有

$$f(x+4) = f(x), \text{ 则 } f(2019) = (\quad)$$

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $\log_2 3$

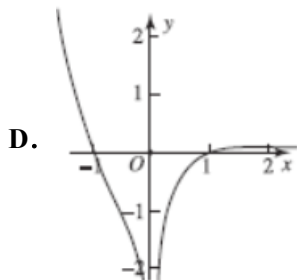
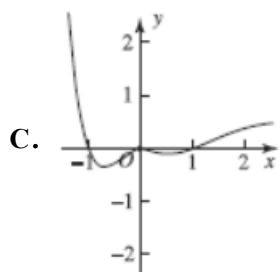
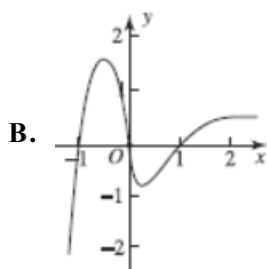
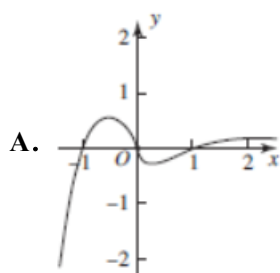
7. 函数 $y = \sin x(3 \sin x + 4 \cos x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最大值为 M ，最小正周期为 T ，则有序数对 (M, T) 为 ()

- A. $(5, \pi)$ B. $(4, \pi)$ C. $(-1, 2\pi)$ D. $(4, 2\pi)$

8. 设 $(1+i)a = 1+bi$ ，其中 a, b 是实数，则 $|a+2bi| = (\quad)$

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

9. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{e^x}$ 的大致图象为 ()



10. 若 i 为虚数单位, 则复数 $z = -\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3}$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

11. 已知集合 $A = \{y | y = |x| - 1, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $-3 \in A$ B. $3 \notin B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup B = B$

12. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则“ $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} - \vec{b}|$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件解:

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 曲线 $y = e^{-5x} + 2$ 在点 $(0, 3)$ 处的切线方程为_____.

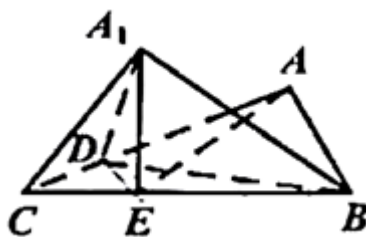
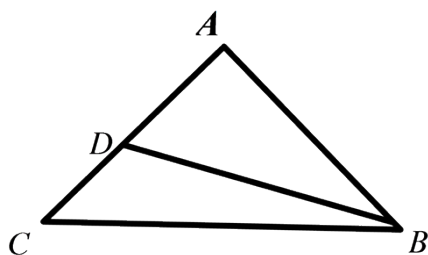
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $3a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0$ 恒成立, 则 a_6 的值为_____.

15. 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 已知复数 $z = \frac{2+i}{2-i}$ (i 为虚数单位), 则 z 的模为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $AB = AC = 3$, D 为 AC 上一点, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 得到三棱锥 $A_1 - BCD$, 且使得 A_1 在底面 BCD 的投影 E 在线段 BC 上, 连接 AE .



(1) 证明: $BD \perp AE$;

(2) 若 $\tan \angle ABD = \frac{1}{2}$, 求二面角 $C - BA_1 - D$ 的余弦值.

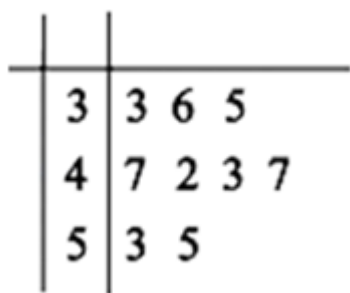
18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho = 4 \cos \theta.$$

(I) 求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 设点 $P(1, 0)$, 直线 l 与曲线 C 相交于 A, B , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

19. (12 分) 某企业为了了解该企业工人组装某产品所用时间, 对每个工人组装一个该产品的用时作了记录, 得到大量统计数据. 从这些统计数据中随机抽取了 9 个数据作为样本, 得到如图所示的茎叶图 (单位: 分钟). 若用时不超过 40 (分钟), 则称这个工人为优秀员工.



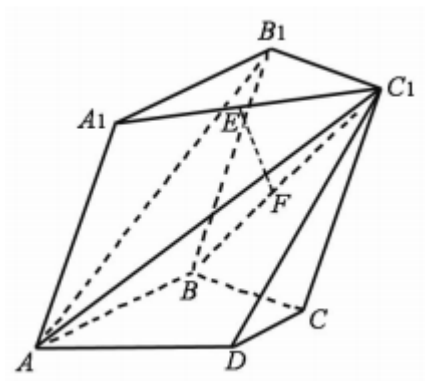
(1) 求这个样本数据的中位数和众数;

(2) 以这 9 个样本数据中优秀员工的频率作为概率, 任意调查 4 名工人, 求被调查的 4 名工人中优秀员工的数量 x 分布列和数学期望.

20. (12 分) 在如图所示的多面体中, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 ABB_1A_1 是边长为 2 的菱形, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, 四边形 BCC_1B_1 为平行四边形, 且 $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $CD = 1$

(1) 若 E, F 分别为 A_1C , BC_1 的中点, 求证: $EF \perp$ 平面 AB_1C_1 ;

(2) 若 $\angle A_1AB = 60^\circ$, AC_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求二面角 $A_1 - AC_1 - D$ 的余弦值.



21. (12 分) 在世界读书日期间，某地区调查组对居民阅读情况进行了调查，获得了一个容量为 200 的样本，其中城镇居民 140 人，农村居民 60 人.在这些居民中，经常阅读的城镇居民有 100 人，农村居民有 30 人.

(1) 填写下面列联表，并判断能否有 99% 的把握认为经常阅读与居民居住地有关？

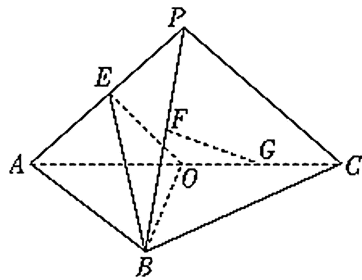
	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			
合计			200

(2) 从该地区城镇居民中，随机抽取 5 位居民参加一次阅读交流活动，记这 5 位居民中经常阅读的人数为 X ，若用样本的频率作为概率，求随机变量 X 的期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (10 分) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $AB = BC$ ， $PA \perp PC$.点 E ， F ， O 分别为线段 PA ， PB ， AC 的中点，点 G 是线段 CO 的中点.



(1) 求证： $PA \perp$ 平面 EBO .

(2) 判断 FG 与平面 EBO 的位置关系，并证明.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据双曲线的标准方程求出右顶点 A 、右焦点 F 的坐标，再求出过点 F 与 C 的一条渐近线的平行的直线方程，通过解方程组求出点 B 的坐标，最后利用三角形的面积公式进行求解即可。

【详解】

由双曲线的标准方程可知中： $a=3, b=4 \therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=5$ ，因此右顶点 A 的坐标为 $(3,0)$ ，右焦点 F 的坐标为 $(5,0)$ ，

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$ ，根据双曲线和渐近线的对称性不妨设点 F 作平行 C 的一条渐近线 $y=\frac{4}{3}x$ 的直线

与 C 交于点 B ，所以直线 FB 的斜率为 $\frac{4}{3}$ ，因此直线 FB 方程为： $y=\frac{4}{3}(x-5)$ ，因此点 B 的坐标是方程组：

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}(x-5) \\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \text{ 的解，解得方程组的解为： } \begin{cases} x=\frac{17}{5} \\ y=-\frac{32}{15} \end{cases}, \text{ 即 } B(\frac{17}{5}, -\frac{32}{15}), \text{ 所以 } \triangle AFB \text{ 的面积为：}$$

$$\frac{1}{2} \times (5-3) \times \left| -\frac{32}{15} \right| = \frac{32}{15}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程的应用，考查了两直线平行的性质，考查了数学运算能力.

2、C

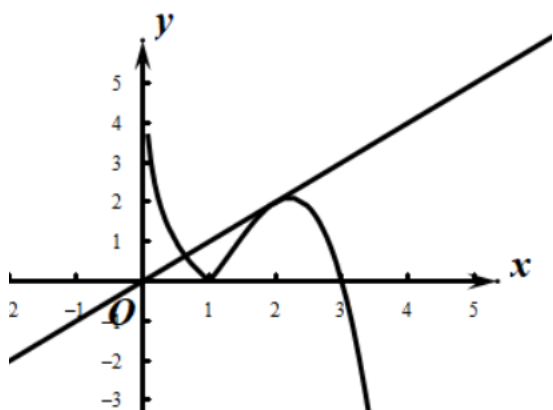
【解析】

转化 $g(x)=f(x)+kx$ 有 1 个零点为 $y=f(x)$ 与 $y=-kx$ 的图象有 1 个交点，求导研究临界状态相切时的斜率，数形结合即得解.

【详解】

$g(x) = f(x) + kx$ 有 1 个零点

等价于 $y = f(x)$ 与 $y = -kx$ 的图象有 1 个交点.



记 $h(x) = -x(x-1)(x-3) (x > 1)$ ，则过原点作 $h(x)$ 的切线，

设切点为 (x_0, y_0) ，

则切线方程为 $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$ ，

又切线过原点，即 $h(x_0) = h'(x_0)x_0$ ，

将 $h(x_0) = -x_0(x_0-1)(x_0-3)$ ，

$$h'(x_0) = -3x_0^2 + 8x_0 - 3$$

代入解得 $x_0 = 2$ 。

所以切线斜率为 $h'(2) = -3 \times 2^2 + 8 \times 2 - 3 = 1$ ，

所以 $k < -1$ 或 $k > 0$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查了导数在函数零点问题中的应用，考查了学生数形结合，转化划归，数学运算的能力，属于较难题.

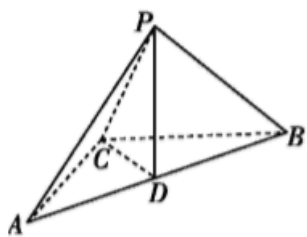
3、C

【解析】

根据三视图，可得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图，然后再计算可得.

【详解】

解：根据三视图，可得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图如图所示，



其中 D 为 AB 的中点, $PD \perp$ 底面 ABC .

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$,

$\therefore |AC| = |BC| = |PD| = 2$, $\therefore |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = 2\sqrt{2}$, $\therefore |DA| = |DB| = |DC| = \sqrt{2}$,

$\therefore |PA| = |PB| = |PC| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$,

Q $|PA|^2 + |PB|^2 \neq |AB|^2$, $\therefore PA$ 、 PB 不可能垂直,

即 PA , PB , PC 不可能两两垂直,

Q $S_{\triangle PBA} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$, Q $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} \times 2 = \sqrt{5}$.

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的侧面积为 $2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$.

故正确的为 C.

故选: C.

【点睛】

本题考查三视图还原直观图, 以及三棱锥的表面积、体积的计算问题, 属于中档题.

4、D

【解析】

由复数模的定义可得: $|z| = \sqrt{a^2 + 1} = 2$, 求解关于实数 a 的方程可得: $a = \pm\sqrt{3}$.

本题选择 D 选项.

5、B

【解析】

根据表格和折线统计图逐一判断即可.

【详解】

A. 中国代表团的奥运奖牌总数不是一直保持上升趋势, 29 届最多, 错误;

B. 折线统计图中的六条线段只是为了便于观察图象所反映的变化, 不表示某种意思, 正确;

C. 30 届与第 29 届北京奥运会相比, 奥运金牌数、铜牌数有所下降, 银牌数有所上升, 错误;

D. 统计图中前六届奥运会中国代表团的奥运奖牌总数按照顺序排列的中位数为 $\frac{54+59}{2} = 56.5$, 不正确;

故选: B

【点睛】

此题考查统计图, 关键点读懂折线图, 属于简单题目.

6、C

【解析】

由题意可知 $f(2019) = f(-1)$, 代入函数表达式即可得解.

【详解】

由 $f(x+4) = f(x)$ 可知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数,

$$\therefore f(2019) = f(-1+4 \times 505) = f(-1) = -1 \times (-1+2) = -1.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了分段函数和函数周期的应用, 属于基础题.

7、B

【解析】

$$\text{函数 } y = \sin x(3 \sin x + 4 \cos x) = 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \sin(2x - \theta) + \frac{3}{2} \quad (\theta \text{ 为辅助角})$$

$$\therefore \text{函数的最大值为 } M = 4, \text{ 最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

故选 B

8、D

【解析】

根据复数相等, 可得 a, b , 然后根据复数模的计算, 可得结果.

【详解】

$$\text{由题可知: } (1+i)a = 1+bi,$$

$$\text{即 } a+ai = 1+bi, \text{ 所以 } a=1, b=1$$

$$\text{则 } |a+2bi| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

故选: D

【点睛】

本题考查复数模的计算, 考验计算, 属基础题.

9、A

【解析】

利用特殊点的坐标代入，排除掉 C，D；再由 $f(-\frac{1}{2}) < 1$ 判断 A 选项正确.

【详解】

$$f(-1.1) = \frac{-1.1 \ln |1.1|}{e^{1.1}} < 0, \text{ 排除掉 C, D;}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} \right|}{e^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{e} \ln \sqrt{2},$$

$$Q \ln \sqrt{2} < \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{e} < 2,$$

$$\therefore f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \ln \sqrt{2} < 1.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了由函数解析式判断函数的大致图象问题，代入特殊点，采用排除法求解是解决这类问题的一种常用方法，属于中档题.

10、B

【解析】

由共轭复数的定义得到 $\bar{z}$ ，通过三角函数值的正负，以及复数的几何意义即得解

【详解】

$$\text{由题意得 } \bar{z} = -\sin \frac{2\pi}{3} - i \cos \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{因为 } -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0, \quad -\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} > 0,$$

所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第二象限.

故选：B

【点睛】

本题考查了共轭复数的概念及复数的几何意义，考查了学生概念理解，数形结合，数学运算的能力，属于基础题.

11、C

【解析】

试题分析：集合 $A = \{y | y \geq -1\}$ $\therefore B \subseteq A \therefore A \cap B = B$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/518047064142006053>