上海市宝山区上海交大附中2024届高三上学期期末数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．抛物线$y^2=4x$的焦点坐标是____.

2．设集合$A=\{x|0\le x\le 2\}$，集合$B=\{x|x^2-4x+3\ge 0\}$，则$A\cap B=$______.

3．方程$\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(x+1)$的解是$x=$______.

4．设i是虚数单位，则复数$z=2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})$的虚部是______.

5．函数$y=\tan\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为4，则$\omega=$________.

6．已知随机变量X的分布为$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0.16 & 0.44 & 0.40\end{pmatrix}$，则$E(2X+5)=$______.

7．已知空间向量$\overrightarrow{PA}=(1,2,4),\overrightarrow{PB}=(5,-1,3),\overrightarrow{PC}=(m,n,-1)$.若$P,A,B,C$四点共面，则$10m+17n=$______.

8．已知直线$l:y=x-1$与x轴的交点为F，直线l上的动点P满足：点P到直线$x=-1$的距离$d\ge|PF|$恒成立，则动点P所对应轨迹的长度为______.

9．在某次比赛中运动员五轮的成绩互不相等，记为$x_i(i=1,2,3,4,5)$，平均数为$\overline{x}$，若随机删去其中一轮的成绩，得到一组新数据，记为$y_i(i=1,2,3,4)$，平均数为$\overline{y}$，下面说法正确的是______.（写出所有正确选项）

①新数据的极差可能等于原数据的极差.

②新数据的中位数可能等于原数据的中位数.

③若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的方差一定大于原数据方差.

④若 $\overline{x}=\overline{y}$，则新数据的第40百分位数一定大于原数据的第40百分位数.

10．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $(n+1)S_n^2+S_n-n=0$（n 为正整数）.记

$f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i\cdot|x-i|\right)$，若函数 $y=f_{2024}(x)+kx$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围是____

.

11．函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax+b$ 在区间 $[1,3]$ 上存在零点，则 a^2+b^2 的最小值为_____.

12．若对于任意自然数 n，函数 $y=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在每个闭区间 $[2n-1,2n+1]$ 上均有两

个零点，则正实数 ω 的最小值是_____.

二、单选题

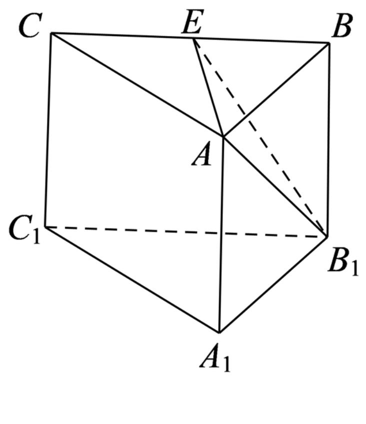
13．$\triangle ABC$ 中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

14．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形，E 是 BC 的中点，

则下列叙述正确的是（　）



A．直线 CC_1 与直线 B_1E 是异面直线　　B．直线 CC_1 与直线 AE 是共面直线

C．直线AE与直线B_1C_1是异面直线　　　D．直线AE与直线BB_1是共面直线

15．甲箱中有5个红球，2个白球和3个黑球；乙箱中有4个红球，3个白球和3个黑球.先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，分别以A_1、A_2、A_3表示由甲箱中取出的是红球、白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以B表示由乙箱中取出的球是红球的事件，则下列结论错误的是（　　）

A．$P\left(B\right)=\frac{2}{5}$　　　B．$P\left(B|A_1\right)=\frac{5}{11}$

C．事件B与事件A_1不相互独立　　　D．A_1、A_2、A_3两两互斥

16．考虑这样的等腰三角形：它的三个顶点都在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$上，且其中恰有两个顶点为椭圆$C$的顶点.关于这样的等腰三角形有多少个，有两个命题：命题①：满足条件的三角形至少有12个.命题②：满足条件的三角形最多有20个.关于这两个命题的真假有如下判断，正确的是（　）

A．命题①正确；命题②错误.　　　B．命题①错误；命题②正确.

C．命题①，②均正确.　　　D．命题①，②均错误.

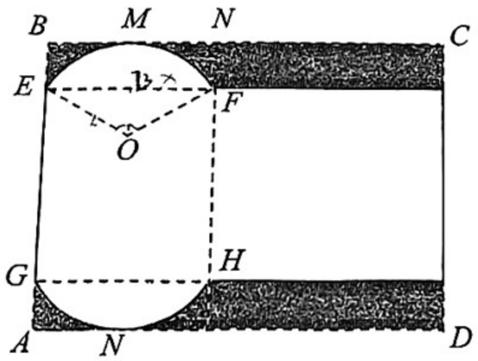
三、解答题

17．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d\neq 0$，a_2是a_1,a_5的等比中项，$S_5=25$.

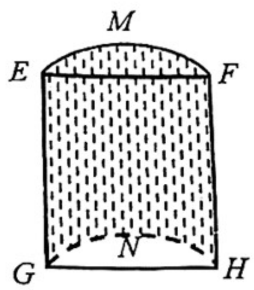
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n+b_{n+1}=S_n$，求b_2-b_{20}.

18．有一矩形硬纸板材料（厚度忽略不计），一边 AB 长为6分米，另一边足够长.现从中截取矩形 $ABCD$（如图甲所示），其中 $OEMF$ 是以 O 为圆心，$\angle EOF=120^{\circ}$ 的扇形，且弧 $\overset{\frown}{EF},\overset{\frown}{GH}$ 分别与边 BC，AD 相切于点 M，N.剪去图中的阴影部分，剩下的部分恰好能折卷成一个底面是弓形的柱体包装盒（如图乙所示，重叠部分忽略不计）.



图甲

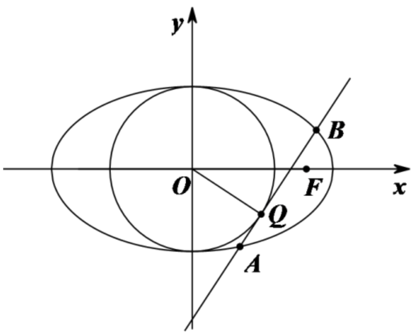


图乙

(1)当 BE 长为1分米时，求折卷成的包装盒的容积；

(2)当 BE 的长是多少分米时，折卷成的包装盒的容积最大？

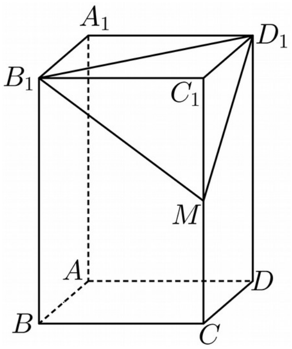
19．已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，右焦点为$F$，动直线$l$与圆$O:x^2+y^2=b^2$相切于点$Q$，与椭圆交于$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$两点，其中点$Q$在$y$轴右侧.



（1）若直线$l:x-y-2=0$过点F，求椭圆方程；

（2）求证：$|AF|+|AQ|$为定值.

20．如图，正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为1，高为2，点M是棱CC_1上一个动点（点M与C，C_1均不重合）.



(1)当点M是棱CC_1的中点时，求证：直线$AM\perp$平面B_1MD_1；

(2)当$D_1M\perp AB_1$时，求点D_1到平面AMB_1的距离；

(3)当平面AB_1M将正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$分割成体积之比为$1:2$的两个部分时，求线段MC的长度.

21．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=f(a_n)$.

(1)若$f(x)=x+A\sin(\frac{\pi}{2}x)$，求最小正数$A$的值，使数列$\{a_n\}$为等差数列；

(2)若$f(x)=\ln x+x+2$，求证：$a_n\le 2^n-1$；

(3)对于（2）中的数列$\{a_n\}$，求证：$[1+\frac{4}{(a_2+1)^2}]\cdot[1+\frac{4}{(a_3+1)^2}]\cdot\cdots\cdot[1+\frac{4}{(a_n+1)^2}]<\mathrm{e}$

参考答案：

1．$\left(1,0\right)$

【分析】根据抛物线的标准方程直接求出焦点坐标即可.

【详解】因为抛物线标准方程为$y^2=4x$，

所以焦点坐标为$\left(1,0\right)$，

故答案为：$\left(1,0\right)$.

2．$\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$

【分析】先求出集合B，再根据交集的定义即可得解.

【详解】$B=\left\{x\middle|x^2-4x+3\ge 0\right\}=\left\{x\middle|x\ge 3\text{或}x\le 1\right\}$，

所以$A\cap B=\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$.

故答案为：$\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}$.

3．6

【分析】根据对数真数大于零和对数函数的单调性可直接构造不等式组求得结果.

【详解】由$\log_3\left(x^2-4x-5\right)=\log_3\left(x+1\right)$得：$\begin{cases}x^2-4x-5>0\\x+1>0\\x^2-4x-5=x+1\end{cases}$，

即$\begin{cases}\left(x+1\right)\left(x-5\right)>0\\x>-1\\x^2-5x-6=\left(x+1\right)\left(x-6\right)=0\end{cases}$，解得：$x=6$.

故答案为：6.

4．2

【分析】根据复数的乘法运算即可得复数z，即可得z的虚部.

【详解】解：复数$z=2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2+2\mathrm{i}$，所以复数$z$的虚部为$2$.

故答案为：2.

5．$\pm\frac{\pi}{4}$

【分析】直接根据三角函数周期公式计算得到答案.

【详解】$y=\tan\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，故$T=\left|\frac{\pi}{\omega}\right|=4$，故$\omega=\pm\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\pm\frac{\pi}{4}$.

【点睛】本题考查了正切函数周期，属于简单题.

6．7.64

【分析】根据期望的计算公式以及性质即可求解.

【详解】由题意可得$E(X)=-2\times0.16+0.44+3\times0.4=1.32$，

所以$E(2X+5)=2E(X)+5=7.64$，

故答案为：7.64

7．-11

【分析】根基空间向量共面定理结合空间向量坐标表示的线性运算即可得解.

【详解】因为P,A,B,C四点共面，所以$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$共面，

所以存在唯一实数对(x,y)，使得$\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，

即$\begin{cases}m=x+5y\\n=2x-y\\-1=4x+3y\end{cases}$，所以$\begin{cases}1+2n=-5y\\1+4m=17y\end{cases}$，

所以$17(1+2n)+5(1+4m)=0$，

所以$10m+17n=-11$.

故答案为：-11.

8．8

【分析】设$P(x,x-1)$，根据$d\geq|PF|$，求出x的范围，再根据两点间的距离公式即可得解.

【详解】因为直线$l:y=x-1$与x轴的交点为F，所以$F(1,0)$

由题意，设$P(x,x-1)$，

由$d\geq|PF|$，

得$|x+1|\geq\sqrt{(x-1)^2+(x-1)^2}$，

即$x^2-6x+1\leq0$，解得$3-2\sqrt{2}\leq x\leq3+2\sqrt{2}$，

所以动点P所对应轨迹为$y=x-1,x\in\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$,

其长度为$\sqrt{\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)-\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[\left(3+2\sqrt{2}-1\right)-\left(3-2\sqrt{2}-1\right)\right]^2}=8$.

故答案为：8.

9．①②③

【分析】根据极差、中位数、平均数和方差的概念，以及百分位数的概念及计算方法，逐项判定，即可求解.

【详解】对于①，若随机删去任一轮的成绩，恰好不是最高成绩和最低成绩，

此时新数据的极差可能等于原数据的极差，所以①正确；

对于②，不妨假设$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$，

当$\frac{1}{2}\left(x_2+x_4\right)=x_3$时，若随机删去的成绩是$x_3$，

此时新数据的中位数等于原数据的中位数，所以②正确；

对于③，若$\overline{x}=\overline{y}$，即删去的数据恰为平均数，

根据方差的计算公式，分子不变，分母变小，所以方差会变大，所以③正确；

对于④，若$\overline{x}=\overline{y}$，即删去的数据恰为平均数，在按从小到大的顺序排列的5个数据中，

因为$5\times 40\%=2$，此时原数据的40%分位数为第二数和第三个数的平均数；

删去一个数据后的4个数据，从小到大的顺序排列，可得$4\times 40\%=1.6$，

此时新数据的40%分位数为第二个数，

显然新数据的40%分位数小于原数据的40%分位数，所以④错误.

故答案为：①②③.

10．$\left(-\infty,-\frac{2024}{2025}\right)\cup\left(\frac{2024}{2025},+\infty\right)$

【分析】利用$a_n=S_n-S_{n-1}$求出数列的通项公式$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，由裂项相消求和法计算可得

$\sum_{i=1}^{2024}a_i=\frac{2024}{2025}$.设函数$g(x)=f_{2024}\left(x\right)+kx=\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i\cdot\left|x-i\right|\right)+kx$，将函数$g(x)$写出分段函数，根据

函数的值域为**R**和极限的思想可得当$k>0$时$k\pm\sum_{i=1}^{2024}a_i>0$、当$k<0$时$k\pm\sum_{i=1}^{2024}a_i<0$，解不等式

即可求解.

【详解】因为$(n+1)S_n^2+S_n-n=0$，所以$\left[(n+1)S_n-n\right]\left(S_n+1\right)=0$，

又因为$\{a_n\}$是正项数列，所以$(n+1)S_n-n=0$，即$S_n=\dfrac{n}{n+1}$，

当$n=1$得$S_1=a_1=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，当$n\geq 2$得$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

经检验$n=1$符合上式，所以$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

所以$\sum\limits_{i=1}^{2024}a_i=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2025}=\dfrac{2024}{2025}$.

设函数$g(x)=f_{2024}(x)+kx=\sum\limits_{i=1}^{2024}\left(a_i\cdot|x-i|\right)+kx$，

当$x\in(-\infty,1]$时，$g(x)=a_1|x-1|+a_2|x-2|+a_3|x-3|+\cdots+a_{2024}|x-2024|+kx$

$=(a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2024a_{2024})-(a_1+a_2+\cdots+a_{2024}-k)x=(k-\sum\limits_{i=1}^{2024}a_i)x+\sum\limits_{i=1}^{2024}(ia_i)$；

同理可得，当$x\in(1,2]$时，$g(x)=k_1x+1$，

当$x\in(2,3]$时，$g(x)=k_2x+2$，

……

当$x\in(2023,2024]$时，$g(x)=k_{2023}x+2023$，

当$x\in(2024,+\infty)$时，$g(x)=(k+\sum\limits_{i=1}^{2024}a_i)x-\sum\limits_{i=1}^{2024}(ia_i)$，

即 $g(x)=\begin{cases}(k-\sum_{i=1}^{2024}a_i)x+\sum_{i=1}^{2024}(ia_i),x\in(-\infty,1]\\ k_1x+1,x\in(1,2]\\ k_2x+2,x\in(2,3]\\ \vdots\\ k_{2023}x+2023,x\in(2023,2024]\\ (k+\sum_{i=1}^{2024}a_i)x-\sum_{i=1}^{2024}(ia_i),x\in(2024,+\infty)\end{cases}$，其中 $k_j\in\mathbf{R}\left(j=1,2,\cdots,2023\right)$，

由函数 $g(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 知，当 $k>0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，

所以 $k\pm\sum_{i=1}^{2024}a_i>0$，即 $k\pm\frac{2024}{2025}>0$，解得 $k>\frac{2024}{2025}$；

当 $k<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$，

所以 $k\pm\sum_{i=1}^{2024}a_i<0$，即 $k\pm\frac{2024}{2025}<0$，解得 $k<-\frac{2024}{2025}$，

综上，实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{2024}{2025})\cup(\frac{2024}{2025},+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-\frac{2024}{2025})\cup(\frac{2024}{2025},+\infty)$

【点睛】关键点睛：本题的难点是将函数 $g(x)=f_{2024}\left(x\right)+kx=\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i\cdot|x-i|\right)+kx$ 转化为分段函数，利用函数的值域确定关于 k 的不等式即可求解，其中涉及到极限思想以及数列的求通项公式和求和知识点，平时练习都要熟练应用.

11．$\frac{e^2}{2}$/$\frac{1}{2}e^2$

【分析】设 t 为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,3\right]$ 上的零点，可得 $\mathrm{e}^t+at+b=0$，转化为点 $\left(a,b\right)$ 在直线

$(t-1)x+y+\mathrm{e}^t=0$ 上，根据 a^2+b^2 的几何意义，可得 $a^2+b^2 \geq \frac{\mathrm{e}^{2t}}{(t-1)^2+1}$ 有解，利用导数求得函数的单调性和最值，即可得答案.

【详解】设 t 为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的零点，可得 $\mathrm{e}^t+at+b=0$，

所以 $ta+b+\mathrm{e}^t=0$，即点 (a,b) 在直线 $tx+y+\mathrm{e}^t=0$，

又 a^2+b^2 表示点 (a,b) 到原点距离的平方，

则 $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{\left|\mathrm{e}^t\right|}{\sqrt{t^2+1}}$ 有解，即 $a^2+b^2 \geq \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t^2+1}$ 有解，

令 $g(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{t^2+1}$，可得 $g'(t)=\frac{2\mathrm{e}^{2t}\left(t^2+1\right)-2t\mathrm{e}^{2t}=}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2\mathrm{e}^{2t}\left(t^2-t+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$，

因为 $\mathrm{e}^{2t}>0$， $t^2-t+1>0$，

所以 $g'(t)>0$ 恒成立，

可得 $g(t)$ 在 $[1,3]$ 上为单调递增函数，

所以当 $t=1$ 时， $g(t)_{\min}=g(1)=\frac{\mathrm{e}^2}{2}$，

所以 $a^2+b^2 \geq \frac{\mathrm{e}^2}{2}$，即 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

故答案为： $\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.

12． $\frac{5\pi}{6}$

【分析】根据整体法可得零点满足$x=\frac{(1+6k)}{6\omega},k\in Z$，即可利用$n=0$时，

$[2n-1,2n+1]=[-1,1]$，求解符合条件的ω,结合周期性验证所求ω,满足其他区间即可.

【详解】令$\omega x+\frac{\pi\pi}{3}=\frac{}{2}+k\pi,k\in Z$,则$\omega x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

函数的零点$x=\frac{(1+6k)}{6\omega},k\in Z$

$\omega>0$，

当$n=0$时，$[2n-1,2n+1]=[-1,1]$，此时符合条件的两个零点为故$x=-\frac{5\pi\pi}{6\omega},x=\frac{}{6\omega}$，

故$-\frac{5\pi}{6\omega}\geq -1$，解得$\frac{5\pi}{6}\leq\omega$，

当 $\frac{5\pi}{6}=\omega$时，$y=\cos\left(\frac{5\pi\pi}{6}x+\frac{}{3}\right)$的零点为$x=\frac{(1+6k)}{5},k\in Z$，

因此零点为$\cdots,-\frac{11}{5},-1,\frac{1}{5},\frac{7}{5},\frac{13}{5},\frac{19}{5},5,\cdots$，结合三角函数的周期性可知：满足每个闭区间

$[-1,1],[1,3],[3,5],\ldots$上恰好有两个零点。

故答案为：$\frac{5\pi}{6}$

13．C

【分析】由正弦定理，大角对大边，大边对大角等证明出充分性和必要性均成立，从而求出答案.

【详解】因为$A>B$，由大角对大边可得$a>b$，