专题27 数列求和

【考点预测】

一．公式法

（1）等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n+1)}{2}d$，推导方法：倒序相加法．

（2）等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\begin{cases}na_1，q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}，q\neq 1\end{cases}$，推导方法：乘公比，错位相减法．

（3）一些常见的数列的前n项和：

①$\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；$\sum\limits_{k=1}^{n}2k=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

②$\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$；

③$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

④$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$

二．几种数列求和的常用方法

（1）分组转化求和法：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减．

（2）裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得前n项和．

（3）错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么求这个数列的前n项和即可用错位相减法求解．

（4）倒序相加法：如果一个数列$\{a_n\}$与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前n项和即可用倒序相加法求解．

【方法技巧与总结】

常见的裂项技巧

积累裂项模型1：等差型

（1）$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

（2）$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$

（3）$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

（4）$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

（5）$\frac{1}{n(n^2-1)}=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)})$

（6）$\frac{n^2}{4n^2-1}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\right]$

（7）$\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{4(n+1)-(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=4(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

（8）$n(n+1)=\frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\right].$

（9）$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$

（10）$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

（11）$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

（12）$\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$

积累裂项模型 2：根式型

（1）$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（2）$\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

（3）$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

（4）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

（5）$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$

$=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}(\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1})=\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{2}$

（6）$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sqrt{n}\right]^2-(n\sqrt{n+1})^2}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

积累裂项模型 3：指数型

（1）$\dfrac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\dfrac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

（2）$\dfrac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1})$

（3）$\dfrac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^n}=\dfrac{2(n+1)-n}{n(n+1)\cdot 2^n}=\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

（4）$\dfrac{(4n-1)\cdot 3^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{9}{(n+2)}-\dfrac{1}{n}\right]\cdot 3^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3^{n+1}}{n+2}-\dfrac{3^{n-1}}{n}\right)$

（5）$\dfrac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}=\dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

（6）$a_n\ =\ n\cdot 3^{n-1}$，设 $a_n=(an+b)3^n-[a(n-1)+b]\cdot 3^{n-1}$，易得 $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{4}$，

于是 $a_n=\dfrac{1}{4}(2n-1)3^n-\dfrac{1}{4}(2n-3)\cdot 3^{n-1}$

（7）$\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n(n^2+4n+2)}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n\left[n^2+n+2(n+1)+n\right]}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}$

$=\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+(-1)^n\left[\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2})^n+\left[\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}-\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$

积累裂项模型 4：对数型

$\log_a\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log_a^{a_{n+1}}-\log_a a_n$

积累裂项模型 5：三角型

（1）$\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{1}{\sin(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)$

（2）$\dfrac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\dfrac{1}{\sin 1^\circ}\left[\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ\right]$

（3）$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)-1$

（4）$a_n=\tan\cdot\tan(n-1);\tan 1=\tan\left[n-(n-1)\right]=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{1+\tan n\cdot\tan(n-1)}$，

则 $\tan n\cdot\tan(n-1)=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1,a_n=\dfrac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1$

积累裂项模型 6：阶乘

（1）$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

（2）$\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\dfrac{n+2}{n!(n+2)^2}=\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{n+1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

常见放缩公式：

（1）$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\left(n\geq 2\right)$；

（2）$\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

（3）$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

（4）$T_{r+1}=C_n^r\cdot\frac{1}{n^r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n^r}<\frac{1}{r!}<\frac{1}{r(r-1)}=\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}\left(r\geq 2\right)$；

（5）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<3$；

（6）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（7）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$；

（8）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)$；

（9）$\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)^2}=\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-1\right)}<\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)}=\frac{2^{n-1}}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\ \left(n\geq 2\right)$；

（10）$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left[\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$

$<2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（11）$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{2}{\sqrt{n^2\cdot n}+\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{2}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{(n-1)n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}$

$=\frac{-2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)n}}=\frac{2}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\left(n\geq 2\right)$；

（12）$\frac{1}{2^n-1}=\frac{1}{(1+1)^n-1}<\frac{1}{C_n^0+C_n^1+C_n^2-1}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$；

（13）$\frac{1}{2^n-1}<\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}-1\right)\left(2^n-1\right)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\left(n\geq 2\right)$．

（14）$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

【题型归纳目录】

题型一：通项分析法

题型二：公式法

题型三：错位相减法

题型四：分组求和法

题型五：裂项相消法

题型六：倒序相加法

题型七：并项求和

题型八：先放缩后裂项求和

题型九：分段数列求和

【典例例题】

题型一：通项分析法

例 1．（2023·全国·高三专题练习）求和 $S_n=\left(3+2\right)+\left(3^2+3\cdot 2+2^2\right)+\cdots+\left(3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 2^2+\cdots+2^n\right)$.

例 2．数列 9，99，999，…的前 n 项和为(　　)

A．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)+n$　　B．10^n-1　　C．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)$　　D．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)-n$

例 3．求数列 1，$(1+2)$，$(1+2+2^2)$，…，$(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})$，…的前 n 项之和.

【方法技巧与总结】

先分析数列通项的特点，再选择合适的方法求和是求数列的前 n 项和问题应该强化的意识.

题型二：公式法

例 4．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=9$，$a_5=21$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

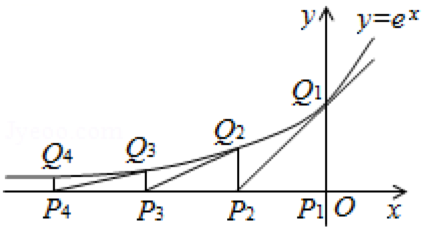
（2）令 $b_n=2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

例 5．如图，从点 $P_1(0,0)$ 做 x 轴的垂线交曲线 $y=e^x$ 于点 $Q_1(0,1)$，曲线在 Q_1 点处的切线与 x 轴交于点 P_2，再从 P_2 做 x 轴的垂线交曲线于点 Q_2，依次重复上述过程得到一系列点：P_1，Q_1；P_2，Q_2…；P_n，Q_n，记 P_k

点的坐标为$(x_k，0)(k=1，2，…，n)$．

（Ⅰ）试求x_k与x_{k-1}的关系$(2,,\ k,,\ n)$；

（Ⅱ）求$|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\ldots+|P_nQ_n|$．

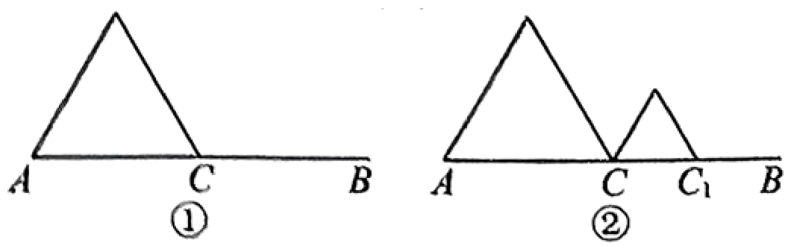


【方法技巧与总结】

针对数列的结构特征，确定数列的类型，符合等差或等比数列时，直接利用等差、等比数列相应公式求解．

题型三：错位相减法

例6．（2023·全国·高三专题练习）“一尺之棰，日取其半，万世不竭”出自我国古代典籍《庄子·天下》，其中蕴含着等比数列的相关知识.已知长度为4的线段AB，取AB的中点C，以AC为边作等边三角形（如图①），该等边三角形的面积为S_1，在图①中取CB的中点C_1，以CC_1为边作等边三角形（如图②），图②中所有的等边三角形的面积之和为S_2，以此类推，则$S_3=$____________；$\sum_{i=1}^{n} iS_i=$____________.



例7．（2023·内蒙古·海拉尔第二中学模拟预测（理））已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{4n^3-n}{3}$，记$b_n=\dfrac{\sqrt{a_n}}{2^n}$，则数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n=$_______.

例8．（2023·全国·高三专题练习）在平面四边形$ABCD$中，$\triangle ABD$的面积是$\triangle BCD$面积的2倍，又数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，当$n\geq 2$时，恒有$\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，设$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则所有正确结论的序号是____________.

①$\{a_n\}$为等比数列；②$\{a_n\}$为递减数列；③$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列；④$S_n=(5-2n)2^{n+1}-10$

例9．（2023·云南师大附中高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=2a_n-1$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$a_n \cdot b_n = \log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n．

例 10．（2023·全国·模拟预测（文））若数列$\{a_n\}$满足$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$，$a_1 = 3$，$a_2 a_3 = 243$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n = \log_3 a_n$，求数列$\{a_n b_n\}$的前n项和S_n．

例 11．（2023·全国·模拟预测）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，数列$\{b_n\}$为等比数列，且$a_1 = b_1 = 1$，$S_3 = 3b_2 = 12$．

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n = a_n b_{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和T_n．

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_2 = 3$，$a_{14} = 3a_5$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，且满足$2S_n = 3b_n - 1$．

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n = a_n \cdot b_n$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为T_n，且$T_n - n \cdot 3^n < (-1)^n \cdot m$对$n \in \mathbf{N}^*$恒成立，求实数 m 的取值范围．

【方法技巧与总结】

错位相减法求数列$\{a_n\}$的前 n 项和

（1）适用条件

若$\{a_n\}$是公差为$d(d \neq 0)$的等差数列，$\{b_n\}$是公比为$q(q \neq 1)$的等比数列，求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前 n 项和S_n．

（2）基本步骤

展开　$S_n = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + a_n \cdot b_n$　①

乘公比　$qS_n = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_n + a_n \cdot b_{n+1}$　②

错位相减

①−②：得$(1-q)S_n = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + a_n \cdot b_n$

$-(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_n + a_n \cdot b_{n+1})$

$= a_1 \cdot b_1 + d(b_2 + b_3 + \cdots + b_n) - a_n \cdot b_{n+1}$　③

求和　$S_n = \dfrac{a_1 \cdot b_1 + d(b_2 + b_3 + \cdots + b_n) - a_n \cdot b_{n+1}}{1-q}$

（3）注意事项

①在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应特别注意将两式“错位对齐”，以便下一步准确写出 S_n-qS_n；

②作差后，应注意减式中所剩各项的符号要变号．

等差乘等比数列求和，令 $c_n=\left(An+B\right)\cdot q^n$，可以用错位相减法．

$T_n=(A+B)q+(2A+B)q^2+(3A+B)q^3+\ldots+(An+B)q^n$ ①

$qT_n=(A+B)q^2+(2A+B)q^3+(3A+B)q^4+\ldots+(An+B)q^{n+1}$ ②

①－② 得：$(1-q)T_n=(A+B)q-(An+B)q^{n+1}+A(q^2+q^3+\ldots+q^n)$．

整理得：$T_n=(\frac{An}{q-1}+\frac{B}{q-1}-\frac{A}{(q-1)^2})q^{n+1}-(\frac{B}{q-1}-\frac{A}{(q-1)^2})q$．

题型四：分组求和法

例 13．（2023·广西柳州·模拟预测（理））已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$．

(1)证明$\{a_n+1\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n+n+1]$的前 n 项和 S_n．

例 14．（2023·青海·海东市第一中学模拟预测（文））已知正项数列$\left\{a_n\right\}$满足

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2+2n$，且 $b_n=\frac{a_n}{n+1}+\frac{\left(n+2\right)\left(n-1\right)}{n}$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和 S_n．

例 15．（2023·上海松江·二模）在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_2=10$，$a_3+a_4+a_5=30$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

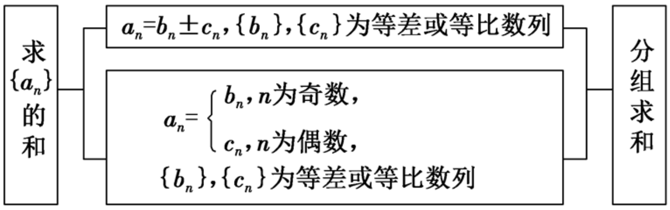
(2)若数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

【方法技巧与总结】

（1）分组转化求和

数列求和应从通项入手，若无通项，则先求通项，然后通过对通项变形，转化为等差数列或等比数列或可求前 n 项和的数列求和．

（2）分组转化法求和的常见类型



题型五：裂项相消法

例 16．（2023·全国·高三专题练习）记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知$a_1=1,\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$．

例 17．（2023·全国·高三专题练习）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，且$S_n=a_{n+1}-3$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知数列$\{c_n\}$满足________，记T_n为数列$\{c_n\}$的前n项和，证明：$T_n<2$．

从①$c_n=\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}$ ②$c_n=\dfrac{\log_2 a_{n+2}}{a_{n+1}}$两个条件中任选一个，补充在第（2）问中的横线上并作答.

例 18．（2023·全国·高三专题练习（理））已知正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n是其前 n 项和，且满足$S_{n+1}=\left(\sqrt{S_n}+S_1\right)^2$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式：

(2)已知数列$\{b_n\}$满足$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a_n+1}{a_na_{n+1}}$，设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，求T_n的最小值.

例 19．（2023·浙江·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的首项为正数，其前n项和S_n满足$2S_n=3a_n-\dfrac{8}{4S_n-3a_n}$．

(1)求实数λ的值，使得$\{S_n^2+\lambda\}$是等比数列；

(2)设$b_n=\dfrac{3^n}{S_nS_{n+1}}$，求数列$\{b_n^2\}$的前$n$项和.

例 20．（2023·湖南·一模）已知等差数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，$a_1=1$，$\{b_n\}$为等比数列且各项均为正数，$b_1=1$，且满足$b_2+S_2=7$，$b_3+S_3=22$．

(1)求a_n与b_n；

(2)设$c_n=\frac{b_n}{2^{n-3}}$，$d_n=(-1)^n\frac{(a_n+2a_{n+1})}{a_n(a_n+1)c_n}$，求$d_n$的前$2n$项和$T_{2n}$.

例21．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，且$2S_n=n(n+1)$，记$b_n=(-1)^n\frac{2a_n+1}{a_n^2+a_n}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求T_{2021}.

例22．（2023·河南·洛宁县第一高级中学一模（文））已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_2+a_4=14$，且a_1，a_2，a_6成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

例23．（2023·山西大同·高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n+2=2a_n\left(n\in\mathrm{N}^+\right)$.

(1)证明：数列$\{S_n+2\}$是等比数列；

(2)设数列$\left\{\frac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$\frac{2}{3}\le T_n<1$.

例24．（2023·江西九江·三模（理））已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=2$，$a_{n+1}+4a_n=3S_n+6$.

(1)求a_n；

(2)求数列$\left\{\frac{n+2}{n(n+1)a_n}\right\}$的前$n$项和.

例25．（2023·广东·大埔县虎山中学高三阶段练习）已知各项均不相等的等差数列$\{a_n\}$的前4项和为10，且a_1,a_2,a_4是等比数列$\{b_n\}$的前3项.

(1)求a_n,b_n；

(2)设$c_n=b_n+\frac{2n+1}{a_n^2\cdot a_{n+1}^2}$，求$\{c_n\}$的前$n$项和$S_n$.

例26．（2023·全国·高三专题练习）等比数列$\{a_n\}$中，首项$a_1=1$，前n项和为S_n，且满足$4(a_1+a_3)=S_4$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=(n+1)\cdot\log_3 a_{n+1}$，求数列$\left\{\dfrac{4n+2}{b_n^2}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

例 27．（2023·全国·高三专题练习）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$S_5=S_2+12$；数列$\{b_n\}$的前n项和T_n，且$b_1=1$，数列$\{b_n\}$的$b_{n+1}=T_n+1$，$\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

(1)求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{c_n\}$满足：$c_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_n+2a_{n+1}}{4a_n\left(a_n+1\right)b_n}$，当$n\geq 2$时，求证：$c_1+c_2+\cdots+c_{2n}<\dfrac{1}{2}$．

例 28．（2023·广东惠州·高三阶段练习）记S_n是公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_3=6$，a_3是a_1和a_9的等比中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前 20 项和.

例 29．（2023·河北衡水·高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$2S_n=4a_n-4$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，$b_{n+1}-b_n=a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n=\dfrac{b_n+1}{(a_n+n)(a_{n+1}+n+1)}$，且数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$k>T_n$，恒成立，求常数$k$的最小值.

例 30．（2023·全国·高三专题练习）已知等比数列$\{a_n\}$公比为正数，其前n项和为S_n，且$a_4=4a_2,S_4=30$.数列$\{b_n\}$满足：$b_1=\dfrac{5}{2},a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n+2n+3,n\in N^*$.

(1)求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式：

(2)求证：$\dfrac{b_1}{1\times 2}+\dfrac{b_2}{2\times 3}+\dfrac{b_3}{3\times 4}+\ldots..+\dfrac{b_{n-1}}{(n-1)\times n}+\dfrac{b_n}{n\times(n+1)}<2$．

例 31．（2023·广东佛山·二模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$nS_{n+1}-(n+1)S_n=n(n+1),n\in\mathrm{N}^*,a_3=5$

(1)求a_1、a_2的值及数列$\{a_n\}$的通项公式a_n：

(2)设$b_n=a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n

例 32．（2023·全国·高三专题练习）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$a_2=3$，

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，数列$\{c_n\}$满足$2^2c_1+3^2c_2+4^2c_3+\cdots+(n+1)^2c_n=n$.

(1)求出$\{a_n\}$，$\{c_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\dfrac{c_{n+1}\cdot(n+1)}{\left[\log_2(a_n+1)\right]^2}\right\}$的前 n 项和为T_n，求证：$T_n<\dfrac{5}{16}$.

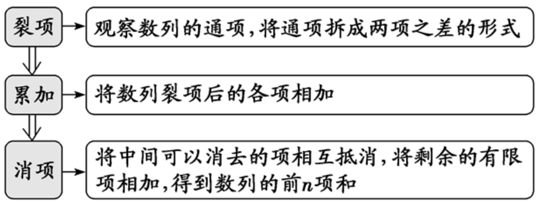
例 33.（2023·天津南开·三模）已知数列$\{a_n\}$是公比$q>1$的等比数列，前三项和为 13，且a_1，a_2+2，a_3恰好分别是等差数列$\{b_n\}$的第一项，第三项，第五项.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)已知$k\in\mathbf{N}^*$，数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{b_nb_{n+2}}, & n=2k-1\\ a_nb_n, & n=2k\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和S_{2n}；

(3)设$d_n=\dfrac{(8n-10)a_n-1}{(2a_n+1)(2a_{n+2}+1)}$，求数列$\{d_n\}$的前 n 项和T_n.

【方法技巧与总结】

裂 **相** **法** **和**	（1）基本步骤  （2）裂项原则 一般是前边裂几项，后边就裂几项，直到发现被消去项的规律为止. （3）消项规律 消项后前边剩几项，后边就剩几项，前边剩第几项，后边就剩倒数第几项.

题型六：倒序相加法

例 34.（2023·河北·高三阶段练习）德国大数学家高斯年少成名，被誉为数学届的王子，19 岁的高斯得到了一个数学史上非常重要的结论，就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》. 在其年幼时，对$1+2+3+\ldots\ldots+100$的求和运算中，提出了倒序相加法的原理，该原理基于所给数据前后对应项的和呈现一定的规律生成，因此，此方法也称之为高斯算法，现有函数$f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$，设数列$\{a_n\}$满足

$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，若$b_n=2^{n+1}a_n$，则$\{b_n\}$的前 n 项和$S_n=$

________.

例 35．（2023·黑龙江齐齐哈尔·三模（文））已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2n}{n+1}$，设函数$f(x)=\cos\pi x+\frac{1}{2}$，则$f\left(\frac{a_1}{2022}\right)+f\left(\frac{a_2}{2022}\right)+f\left(\frac{a_3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_{2021}}{2022}\right)=$______.

例 36．（2023·全国·高三专题练习（文））已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=\frac{1}{18}$，$2a_{n+1}-a_n=16a_{n+1}a_n$，$b_n=\frac{1}{a_n}-16$.

（1）证明$\{b_n\}$为等比数列，并求$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_7b_7$.

例 37．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，点$(n,S_n)\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$均在函数$f(x)$的图象上，函数$g(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$g(x)+g(1-x)$的值；

(3)令$b_n=g\left(\frac{a_n}{2021}\right)\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，求数列$\{b_n\}$的前 2020 项和$T_{2020}$.

例 38．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=\frac{3^x}{3^x+1}$，$(x\in R)$，正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{50}=1$，则$f(\ln a_1)+f(\ln a_2)+\ldots+f(\ln a_{99})$值是多少？.

例 39．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)$对任意的$x\in \mathbf{R}$，都有$f(x)+f(1-x)=1$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$.求数列$\{a_n\}$的通项公式.

例 40．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，点$(n,S_n)\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$均在函数$f(x)$的图象上.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）若函数$g\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，令$b_n=g\left(\dfrac{a_n}{2021}\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前 2020 项和$T_{2020}$.

【方法技巧与总结】

将一个数列倒过来排列，当它与原数列相加时，若有规律可循，并且容易求和，则这样的数列求和时可用倒序相加法（等差数列前n项和公式的推导即用此方法）.

题型七：并项求和

例 41．（2023·全国·高三专题练习）已知$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\left(-1\right)^n\cdot n$，求$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和$S_n$.

例 42．（2023·福建·厦门一中模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，$a_1=1$，$a_n>0$，$a_na_{n+1}=4S_n-1$.

(1)计算a_2的值，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=(-1)^na_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

例 43．（2023·河北·沧县中学模拟预测）已知数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列，S_n为其前n项和，若$a_3+2a_4=\dfrac{2}{3},S_{10}=\dfrac{25}{3}$.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\left(a_n+1\right)^2\cos\dfrac{2n\pi}{3}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前 18 项和$T_{18}$.

例 44．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$.

(1)求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)在a_k和$a_{k+1}\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$中插入$k$个相同的数$\left(-1\right)^{k+1}\cdot k$，构成一个新数列$\left\{b_n\right\}$：$a_1$，1，$a_2$，$-2$，$-2$，$a_3$，3，3，3，$a_4$，$\cdots$，求$\left\{b_n\right\}$的前$21$项和$T_{21}$.

例 45．（2023·河南·汝州市第一高级中学模拟预测（理））在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=5$，且$a_{n+1}=2a_n-1\left(n\in N^*\right)$.

(1)证明：$\left\{a_n-1\right\}$为等比数列，并求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)令$b_n=(-1)^n\cdot a_n$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和S_n.

例 46．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=5$，$a_{n+1}=4a_n-3n^2+2n+1$.

(1)证明：数列$\left\{a_n-n^2\right\}$为等比数列.

(2)求数列$\left\{\left(-1\right)^na_n\right\}$的前$n$项和$S_n$.

【方法技巧与总结】

两两并项或者四四并项

题型八：先放缩后裂项求和

例 47．（2023·天津市宝坻区第一中学二模）已知$\left\{a_n\right\}$为等差数列，前 n 项和为$S_n\left(n\in N^*\right),\left\{b_n\right\}$是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12,b_3=a_4-2a_1,S_{11}=11b_4$．

(1)$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{a_{2n}\cdot b_n\right\}$的前 8 项和$T_8$；

(3)证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{\left(b_i-1\right)^2}<\dfrac{25}{9}$．

例 48．（2023·浙江·效实中学模拟预测）设各项均为正数的数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，满足$S_n^2-\left(n^2+n-3\right)S_n-3\left(n^2+n\right)=0,n\in N^*$．

(1)求a_1的值；

(2)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(3)证明：对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1\sqrt{a_1+2}}+\dfrac{1}{a_2\sqrt{a_2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_n\sqrt{a_n+2}}\le\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$．

例 49．（2023·广东汕头·一模）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，$3a_n=2S_n+2n\left(n\in N^*\right)$．

(1)证明：数列$\left\{a_n+1\right\}$为等比数列，并求数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n；

(2)设$b_n=\log_3\left(a_{n+1}+1\right)$，证明：$\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n^2}<1$．

例 50．（2023·浙江绍兴·模拟预测）已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的首项为$a_1=1$，且$a_1+a_5=a_3+3$，数列$\left\{b_n\right\}$满足$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\dfrac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{2},n\in\mathbf{N}^*$．

(1)求a_n和b_n；

(2)设$c_n=b_n-a_n^2$，记$T_n=\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}+\cdots+\dfrac{1}{c_n}$，证明：当$n\in\mathbf{N}^*$时，$4T_n+\dfrac{6}{3b_n-a_{n+1}^2}\le 7$．

例 51．（2023·天津·一模）已知数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，其前 n 项和为A_n，$a_7=15$，$A_7=63$；数列$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和为B_n，$2B_n=3b_n-3\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{A_n}\right\}$的前 n 项和S_n；

(3)求证：$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{B_k}<2$.

例 52．（2023·全国·高三专题练习）求证: $\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3\times2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}+1}<\dfrac{4}{7}$.

【方法技巧与总结】

先放缩后裂项，放缩的目的是为了“求和”，这也是凑配放缩形式的目标.

题型九：分段数列求和

例 53．（2023·全国·高三专题练习）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且满足$S_n=2a_n-2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a_n}{2}},n=2k+1,k\in\mathrm{N}\\ \dfrac{2}{\sqrt{\log_2 a_n}+\sqrt{\log_2 a_{n+2}}},n=2k,k\in\mathrm{N}^*\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前 15 项的和.

例 54．（2023·山东师范大学附中模拟预测）已知S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且$a_1=1,a_n+a_{n+1}=2n+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记$b_n=\begin{cases}2^{a_n},n\text{为奇数}\\ a_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_n$.

例 55．（2023·湖南·长郡中学模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1,n\text{为奇数}\\ 2a_n+2,n\text{为偶数}\end{cases}$.

(1)记$b_n=a_{2n-1}$，证明：数列$\{b_n\}$为等比数列，并求出数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和S_{2n}.

例 56．（2023·辽宁·抚顺市第二中学三模）已知数列$\{a_n\}$中，满足$a_1=a,a_2=b,a_{n+1}=k\left(a_n+a_{n+2}\right)$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n.

(1)若$\{a_n\}$是等差数列，求 k 的值；

(2)若$a=b=1$，且$\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列，求 k 的值，并求S_n.

例 57．（2023·湖南·高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$，令$b_n=a_{2n}$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{b_n}{2}},n\text{为奇数}\\ \dfrac{2}{\sqrt{\log_2 b_n}+\sqrt{\log_2 b_{n+2}}},n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前 14 项和.

例 58．（2023·全国·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n,n\text{为奇数},\\ 2a_n,n\text{为偶数}.\end{cases}$

(1)令$b_n=a_{2n}$，求b_1，b_2及$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 $2n$ 项和S_{2n}.

例 59．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_n=\begin{cases}2n,n\text{为奇数}\\ n,n\text{为偶数}\end{cases}$

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_n+a_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前 20 项和T_{20}.

例 60．（2023·重庆·高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+\lambda n\left(\lambda\in R\right)$，且$a_3=6$，正项等比数列$\{b_n\}$满足：$b_1=a_1$，$b_2+b_3=a_2+a_4$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$c_n=\left|b_n-2021\right|$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【方法技巧与总结】

（1）分奇偶各自新数列求和

（2）要注意处理好奇偶数列对应的项：

①可构建新数列；②可“跳项”求和

【过关测试】

一、单选题

1.（2023·全国·高三专题练习）数列$\left\{(-1)^n(2n-1)\right\}$的前 2022 项和等于（　　）

A．-1010　　B．2022　　C．-2018　　D．2019

2.（2023·江西·临川一中模拟预测（文））已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\cos(n-1)\pi,S_n$为数列的前 n 项和，

$S_{2021}=$（　　）

A．1008　　B．1009　　C．1010　　D．1011

3．（2023·四川·射洪中学模拟预测（文））已知首项为1的等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，满足$\frac{S_{2022}}{2022}-\frac{S_{2021}}{2021}=\frac{1}{2}$，则$\sum_{i=1}^{2020}\frac{1}{S_i}=$（　　）

A．$\frac{2020}{2021}$　　B．$\frac{4040}{2021}$　　C．$\frac{2021}{2022}$　　D．$\frac{4042}{2022}$

4．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=n$，在a_n,a_{n+1}之间插入n个1，构成数列$\left\{b_n\right\}$：$a_1,1,a_2,1,1,a_3,1,1,1,a_4,\cdots$，则数列$\left\{b_n\right\}$的前100项的和为（　　）

A．178　　B．191　　C．206　　D．216

5．（2023·河南·南阳中学高三阶段练习（文））已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1=2$，$a_4=16$，数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=a_n+(-1)^n\log_2 a_n$，则数列$\left\{b_n\right\}$的前2021项的和$S_{2021}$为（　　）

A．$2^{2022}-2025$　　B．$2^{2022}+1007$

C．$2^{2022}+1008$　　D．$2^{2022}-1013$

6．（2023·全国·高三专题练习）已知公比为2的等比数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_3=8$，记b_m为$\left\{a_n\right\}$在区间$\left(0,m\right]$（m为正整数）中的项的个数，则数列$\{b_m\}$的前100项的和S_{100}为（　　）

A．360　　B．480　　C．600　　D．100

7．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，用$\left[x\right]$表示不超过x的最大整数，则$\left[\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{201}+1}\right]=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．（2023·全国·哈师大附中模拟预测（文））已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_n=1+2+4+\cdots+2^{n-1}$，则数列$\left\{\frac{2^n}{a_na_{n+1}}\right\}$的前5项和为（　　）

A．$\frac{1}{31}$　　B．$\frac{1}{63}$　　C．$\frac{30}{31}$　　D．$\frac{62}{63}$

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）已知下图的一个数阵，该阵第n行所有数的和记作a_n，$a_1=1$，$a_2=1+\frac{1}{2}+1$，$a_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$，$\cdots$，数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和记作$S_n$，则下列说法正确的是（　　）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \frac{1}{2} & 1 & & & \\
 & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & & \\
 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}
$$

A．$a_n = 4 - \frac{3}{2^{n-1}}$　　B．$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2^n}$

C．$S_5 = \frac{227}{16}$　　D．$S_n = 4n - 6 + \frac{3}{2^n}$

10．（2023·全国·高三专题练习）已知正项数列$\{a_n\}$的首项为2，前n项和为S_n，且$\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)}{2} + S_n + a_n = S_{n+1} + 1$，$b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1} - 2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$T_n < 16$，则$n$的值可以为（　　）

A．543　　B．542

C．546　　D．544

11．（2023·全国·高三专题练习）我们把$F_n = 2^{2^n} + 1$（$n = 0,1,2,\cdots$）叫作“费马数”(费马是十七世纪法国数学家).设$a_n = \log_2(F_n - 1)$，$n = 1,2,\cdots$，S_n表示数列$\{a_n\}$的前n项和，则使不等式$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n > 2021 - 2n$成立的正整数$n$的值可以是（　　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

12．（2023·河北·模拟预测）将数列$\{3n-2\}$与$\{2^n\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则下列说法正确的有（　　）

A．数列$\{a_n\}$为等差数列　　B．数列$\{a_n\}$为等比数列

C．$a_n = 4^{n+1}$　　D．数列$\{(3n-2)a_n\}$的前n项和为$(n-1)4^{n+1} + 4$

三、填空题

13．（2023·四川成都·模拟预测（理））杨辉三角，是二项式系数在三角形中的一种几何排列.在欧洲，这个表叫做帕斯卡三角形.帕斯卡（1623-1662）是在1654年发现这一规律的，比杨辉要迟393年，比贾宪迟600年.这是我国数学史上的又一个伟大成就.其实，中国古代数学家在数学的许多重要领域中处于遥遥领先的地位.中国古代数学史曾经有自己光辉灿烂的篇章，而杨辉三角的发现就是十分精彩的一页.下图的表在我国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书里就出现了.该表中，从上到下，第n次出现某行所有数都是奇数的行号记为a_n，比如$a_1 = 1, a_2 = 3$，则数列$\{a_n\}$的前10项和为___________.

第1行　　1　1

第2行　　1　2　1

第 3 行　　　1　3　3　1

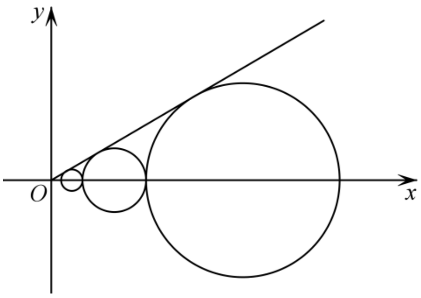
第 4 行　　1　4　6　4　1

第 5 行　1　5　10　10　5　1

第 6 行　1　6　15　20　15　6　1

14．（2023·四川省内江市第六中学模拟预测（理））已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3$，则数列$\{a_n\}$的前 20 项和为___________.

15．（2023·上海·模拟预测）设C_1、C_2、$\cdots$、C_n、$\cdots$是坐标平面上的一列圆，它们的圆心都在x轴的正半轴上，且都与直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$相切，对每一个正整数n，圆C_n都与圆C_{n+1}相互外切，以r_n表示圆C_n的半径，已知$\{r_n\}$为递增数列，若$r_1=1$，则数列$\{n\cdot r_n\}$的前n项和为_________.



16．（2023·全国·高三专题练习）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=2,a_{n+2}+(-1)^{n-1}a_n=2$，则$S_{60}=$_________.

四、解答题

17．（2023·湖北·模拟预测）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=0$，$b_1=3$，且$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}$，$b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{5}{6}b_{n-1}$.

(1)若$\{\lambda a_n+b_n\}$为等比数列，求λ值；

(2)在（1）的条件下，求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18．（2023·广东·深圳市光明区高级中学模拟预测）已知各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$，$a_1=1$　.

(1)若$b_n=a_n-2^n$，求证：$\{b_n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

19．（2023·山东·肥城市教学研究中心模拟预测）已知数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，其前n项和为S_n，$a_1+a_7=12$，$S_5=25$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$c_n=[\log_2 a_n]$，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，求$c_1+c_2+\cdots+c_{20}$的值.

20．（2023·江西萍乡·三模（理））已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n=2a_n-a_1(n\in\mathrm{N}_+)$，且$a_1, a_2+1, a_3$成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_n)\cdot(\log_2 a_{n+2})}(n\in\mathrm{N}_+)$，求证：数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n<\dfrac{3}{4}$.

21．（2023·宁夏·银川一中模拟预测（文））已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且$b_2=2$，$b_3=4$，$a_1=b_1$，$a_8+1=b_5$.

(1)求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=\dfrac{a_n+1}{b_{n+1}}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求$S_n$.

22．（2023·浙江·杭师大附中模拟预测）数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，数列$\{b_n\}$满足$b_n=na_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，且数列$\{b_n\}$的前 n 项和为$(n-1)S_n+2n$.

(1)求a_1, a_2，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)抽去数列$\{a_n\}$中点第 1 项，第 4 项，第 7 项，…，第$3n-2$项，余下的项顺序不变，组成一个新数列

$\left\{c_n\right\}$，数列$\left\{c_n\right\}$的前 n 项和为T_n，求证：$\frac{12}{5}<\frac{T_{n+1}}{T_n}\le\frac{11}{3}$.

专题 27 数列求和

【考点预测】

一．公式法

（1）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n+1)}{2}d$，推导方法：倒序相加法．

（2）等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\begin{cases}na_1，q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}，q\neq 1\end{cases}$，推导方法：乘公比，错位相减法．

（3）一些常见的数列的前 n 项和：

①$\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；$\sum\limits_{k=1}^{n}2k=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

②$\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$；

③$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

④$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$

二．几种数列求和的常用方法

（1）分组转化求和法：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减．

（2）裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得前 n 项和．

（3）错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么求这个数列的前 n 项和即可用错位相减法求解．

（4）倒序相加法：如果一个数列$\{a_n\}$与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解．

【方法技巧与总结】

常见的裂项技巧

积累裂项模型 1：等差型

（1）$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

（2）$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$

（3）$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$

（4）$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

（5）$\dfrac{1}{n(n^2-1)}=\dfrac{1}{n(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)})$

（6）$\dfrac{n^2}{4n^2-1}=\dfrac{1}{4}\left[1+\dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}\right]$

（7）$\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{4(n+1)-(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=4(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3})-(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$

（8）$n(n+1)=\dfrac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\right].$

（9）$n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$

（10）$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

（11）$\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

（12）$\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]$

积累裂项模型 2：根式型

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

（4）$\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\dfrac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

（5）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$

$=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}(\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1})=\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{2}$

（6）$\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)\sqrt{n}\right]^2-(n\sqrt{n+1})^2}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

积累裂项模型 3：指数型

（1）$\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

（2）$\frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$

（3）$\frac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)\cdot 2^n}=\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$

（4）$\frac{(4n-1)\cdot 3^{n-1}}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{9}{(n+2)}-\frac{1}{n}\right]\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}}{n+2}-\frac{3^{n-1}}{n}\right)$

（5）$\frac{(2n+1)\cdot(-1)^n}{n(n+1)}=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

（6）$a_n = n\cdot 3^{n-1}$，设 $a_n=(an+b)3^n-[a(n-1)+b]\cdot 3^{n-1}$，易得 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}$，

于是 $a_n=\frac{1}{4}(2n-1)3^n-\frac{1}{4}(2n-3)\cdot 3^{n-1}$

（7）$\frac{(-1)^n(n^2+4n+2)2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\frac{(-1)^n(n^2+4n+2)}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}=\frac{(-1)^n\left[n^2+n+2(n+1)+n\right]}{n\cdot(n+1)2^{n+1}}$

$=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+(-1)^n\left[\frac{1}{n\cdot 2^n}+\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n+\left[\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$

积累裂项模型 4：对数型

$\log_a\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_a^{a_{n+1}}-\log_a a_n$

积累裂项模型 5：三角型

（1）$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)$

（2）$\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\frac{1}{\sin 1^\circ}\left[\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ\right]$

（3）$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}(\tan\alpha-\tan\beta)-1$

（4）$a_n=\tan\cdot\tan(n-1);\tan 1=\tan\left[n-(n-1)\right]=\frac{\tan n-\tan(n-1)}{1+\tan n\cdot\tan(n-1)}$，

则 $\tan n\cdot\tan(n-1)=\frac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1,a_n=\frac{\tan n-\tan(n-1)}{\tan 1}-1$

积累裂项模型 6：阶乘

（1）$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

（2） $\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\dfrac{n+2}{n!(n+2)^2}=\dfrac{1}{n!(n+2)}=\dfrac{n+1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

常见放缩公式：

（1） $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\left(n\geq 2\right)$；

（2） $\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

（3） $\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}=2\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

（4） $T_{r+1}=C_n^r\cdot\dfrac{1}{n^r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\dfrac{1}{n^r}<\dfrac{1}{r!}<\dfrac{1}{r(r-1)}=\dfrac{1}{r-1}-\dfrac{1}{r}\left(r\geq 2\right)$；

（5） $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<1+1+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}<3$；

（6） $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（7） $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$；

（8） $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)$；

（ 9 ） $\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)^2}=\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-1\right)}<\dfrac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)}=\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}=\dfrac{1}{2^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2^n-1}$ $\left(n\geq 2\right)$；

（10） $\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}<\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left[\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$

$<2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（11） $\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2\cdot n}+\sqrt{n\cdot n^2}}<\dfrac{2}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{(n-1)n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}$

$=\dfrac{-2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(n\geq 2\right)$；

（12） $\dfrac{1}{2^n-1}=\dfrac{1}{(1+1)^n-1}<\dfrac{1}{C_n^0+C_n^1+C_n^2-1}=\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}$；

（13）$\dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}-1\right)\left(2^n-1\right)}=\dfrac{1}{2^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2^n-1}\left(n\geq 2\right)$．

（14）$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$．

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：通项分析法

例 1．（2023·全国·高三专题练习）求和

$S_n=\left(3+2\right)+\left(3^2+3\cdot 2+2^2\right)+\cdots+\left(3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 2^2+\cdots+2^n\right)$．

【解析】$\because a_n=3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 2^2+\cdots+2^n=3^n\left[1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

$=3^n\cdot\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{3}}\right]=3^{n+1}-2^{n+1}$，

$\therefore S_n=\left(3^2+3^3+\cdots+3^{n+1}\right)-\left(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}\right)=\dfrac{9(1-3^n)}{1-3}-(2^{n+2}-4)$．

$S_n=\dfrac{3^{n+2}}{2}-2^{n+2}-\dfrac{1}{2}$

例 2．数列 9，99，999，…的前 n 项和为(　　)

A．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)+n$　　B．10^n-1　　C．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)$　　D．$\dfrac{10}{9}(10^n-1)-n$

【解析】解Q 数列通项 $a_n=10^n-1$，

$\therefore S_n=(10+10^2+10^3++10^n)-n$

$=\dfrac{10(1-10^{n})}{1-10}-n$

$=\dfrac{10}{9}(10^{n}-1)-n$.

故选：D.

例 3． 求数列 1，$(1+2)$，$(1+2+2^{2})$，…，$(1+2+2^{2}+\ldots+2^{n-1})$，…的前 n 项之和．

【解析】解：由于 $a_{n}=1+2^{1}+2^{2}+\ldots+2^{n-1}=\dfrac{2^{n}-1}{2-1}=2^{n}-1$，

所以前 n 项之和 $T_{n}=(2^{1}-1)+(2^{2}-1)+\ldots+(2^{n}-1)$

$=(2^{1}+2^{2}+2^{3}+\ldots+2^{n})-(1+1+\ldots+1)$

$=\dfrac{2\times(2^{n}-1)}{2-1}-n$

$=2^{n+1}-n-2$.

【方法技巧与总结】

先分析数列通项的特点，再选择合适的方法求和是求数列的前 n 项和问题应该强化的意识．

题型二：公式法

例 4． 已知等差数列 $\{a_{n}\}$ 中，$a_{2}=9$，$a_{5}=21$.

（1）求 $\{a_{n}\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_{n}=2^{a_{n}}$，求数列 $\{b_{n}\}$ 的前 n 项和 S_{n}.

【解析】解：（1）设数列 $\{a_{n}\}$ 的公差为 d，由题意得

$\begin{cases}a+d=9\\a_{1}+4d\end{cases}=21$

解得 $a_{1}=5$，$d=4$，

$\therefore\{a_{n}\}$ 的通项公式为 $a_{n}=4n+1$.

（2）由 $a_{n}=4n+1$ 得

$b_{n}=2^{4n+1}$，

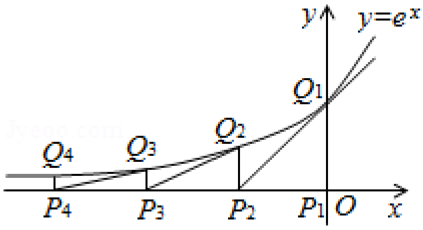
$\therefore\{b_{n}\}$ 是首项为 $b_{1}=2^{5}$，公比 $q=2^{4}$ 的等比数列．

$\therefore S_{n}=\dfrac{2^{5}(2^{4n}-1)}{2^{4}-1}=\dfrac{32\times(2^{4n}-1)}{15}$.

例 5． 如图，从点 $P_{1}(0,0)$ 做 x 轴的垂线交曲线 $y=e^{x}$ 于点 $Q_{1}(0,1)$，曲线在 Q_{1} 点处的切线与 x 轴交于点 P_{2}，再从 P_{2} 做 x 轴的垂线交曲线于点 Q_{2}，依次重复上述过程得到一系列点：P_{1}，Q_{1}；P_{2}，$Q_{2}\ldots$；P_{n}，Q_{n}，记 P_{k} 点的坐标为 $(x_{k}$，$0)(k=1$，2，…，$n)$.

（Ⅰ）试求 x_k 与 x_{k-1} 的关系 $(2,, k,, n)$；

（Ⅱ）求 $|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\ldots+|P_nQ_n|$.



【解析】解：（Ⅰ）设 $P_{k-1}(x_{k-1}，\ 0)$，

由 $y=e^x$ 得 $Q_{k-1}(x_{k-1},e^{x_{k-1}})$

点 Q_{k-1} 处切线方程为 $y-e^{x_{k-1}}=e^{x_{k-1}}(x-x_{k-1})$

由 $y=0$ 得 $x_k=x_{k-1}-1(2,, k,, n)$.

（Ⅱ）$x_1=0$，$x_k-x_{k-1}=-1$，得 $x_k=-(k-1)$，

$|P_kQ_k|=e^{x_k}=e^{-(k-1)}$

$S_n=|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\ldots+|P_nQ_n|$

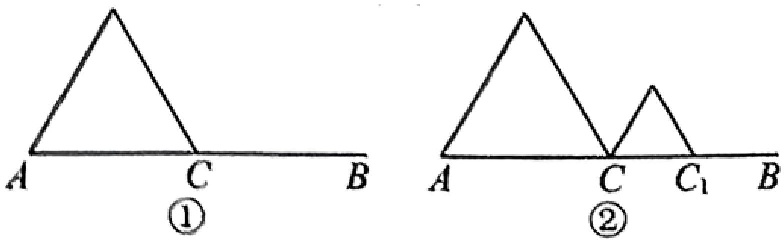
$=1+e^{-1}+e^{-2}+\ldots+e^{-(n-1)}=\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-e^{1-n}}{e-1}$

【方法技巧与总结】

针对数列的结构特征，确定数列的类型，符合等差或等比数列时，直接利用等差、等比数列相应公式求解.

题型三：错位相减法

例 6.（2023·全国·高三专题练习）“一尺之棰，日取其半，万世不竭”出自我国古代典籍《庄子·天下》，其中蕴含着等比数列的相关知识.已知长度为 4 的线段 AB，取 AB 的中点 C，以 AC 为边作等边三角形（如图①），该等边三角形的面积为 S_1，在图①中取 CB 的中点 C_1，以 CC_1 为边作等边三角形（如图②），图②中所有的等边三角形的面积之和为 S_2，以此类推，则 $S_3=$ ____________；$\sum\limits_{i=1}^{n} iS_i=$ ____________.



答案：$\dfrac{21\sqrt{3}}{16}$；$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{4}{9}-\left(\dfrac{n}{3}+\dfrac{4}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$.

【解析】依题可知，各等边三角形的面积形成等比数列，公比为$\frac{1}{4}$，首项为$\sqrt{3}$，所以

$$S_n=\frac{\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$，即$S_3=\frac{21\sqrt{3}}{16}$；

$$\sum_{i=1}^{n}iS_i=\sum_{i=1}^{n}i\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{4^i}\right)\right]$$，而$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$，设

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{4^i}\right)=1\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$，

$$\frac{1}{4}T_n=0+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$，作差得：

$$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}-\left(n+\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$，所以$T_n=\frac{4}{9}-\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}iS_i=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{9}-\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$.

故答案为：$\frac{21\sqrt{3}}{16}$；$\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{9}-\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

例 7.（2023·内蒙古·海拉尔第二中学模拟预测（理））已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{4n^3-n}{3}$，记$b_n=\frac{\sqrt{a_n}}{2^n}$，则数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n=$_______.

答案：$3-\frac{2n+3}{2^n}$

【解析】当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{4-1}{3}=1$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{4n^3-n}{3}-\frac{4(n-1)^3-(n-1)}{3}=4n^2-4n+1$，

当$n=1$时，$4n^2-4n+1=0-0+1=1$，

综上：$a_n=4n^2-4n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以$b_n=\frac{\sqrt{a_n}}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$，

所以$T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$①，①$\times\frac{1}{2}$得：

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$②，

两式相减得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，

所以 $T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$

故答案为：$3-\frac{2n+3}{2^n}$

例 8.（2023·全国·高三专题练习）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 面积的 2 倍，又数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，当 $n\geq 2$ 时，恒有 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}$，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则所有正确结论的序号是___________.

①$\{a_n\}$ 为等比数列；②$\{a_n\}$ 为递减数列；③$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列；④$S_n=(5-2n)2^{n+1}-10$

答案：②③④

【解析】设 AC 与 BD 交于点 E，$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBC}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot AE\sin\angle SEB}{\frac{1}{2}BD\cdot CE\sin\angle CEB}=\frac{AE}{CE}=2$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

B，E，D 共线，所以存在实数 $\lambda(\lambda\neq 0)$，使得 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BE}$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_n+2^n\right)\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{BC}$，

所以 $\begin{cases}a_{n-1}-2^{n-1}=\frac{1}{3}\lambda\\ a_n+2^n=\frac{2}{3}\lambda\end{cases}$，所以 $a_n+2^n=2\left(a_{n-1}-2^{n-1}\right)$，$a_n=2a_{n-1}-2^{n+1}$，

所以 $a_1=2$，$a_2=-4$，$a_3=-24$，$\{a_n\}$ 不是等比数列，①错；

因为 $a_n=2a_{n-1}-2^{n+1}$，所以 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-2$，即 $\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=-2$，所以 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列，③正确;

又因为 $a_1=2$，则 $\frac{a_1}{2}=1$，即 $\frac{a_n}{2^n}=1-2(n-1)=3-2n$，$a_n=(3-2n)\cdot 2^n$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=(3-2n)\cdot 2^n-[3-2(n-1)]\cdot 2^{n-1}=(1-2n)\cdot 2^{n-1}<0$，即 $a_n<a_{n-1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是递减数列，②正确；

因为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1\times 2+(-1)\times 2^2+(-3)\times 2^3+\cdots+(3-2n)\times 2^n$，

$2S_n=1\times 2^2+(-1)\times 2^3+\cdots+(5-2n)\times 2^n+(3-2n)\times 2^{n+1}$，

所以两式相减得 $-S_n=2+(-2)\times 2^2+(-2)\times 2^3+\cdots+(-2)\times 2^n-(3-2n)\times 2^{n+1}$

$=2+(-2)\times\frac{2^2\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}-(3-2n)\times 2^{n+1}=10-(5-2n)\times 2^{n+1}$，

所以 $S_n=(5-2n)\times 2^{n+1}-10$，④正确.

故答案为：②③④.

例 9.（2023·云南师大附中高三阶段练习）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_n=2a_n-1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$a_n\cdot b_n=\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

【解析】(1)因为$S_n=2a_n-1$，所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-1\left(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，所以

$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}\left(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以$a_n=2a_{n-1}\left(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，当$n=1$时，$a_1=S_1=2a_1-1$，$a_1=1$，

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公比$q=2$的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$；

(2)由$a_n\cdot b_n=\log_2 a_n$得$b_n=\dfrac{\log_2 a_n}{a_n}=\dfrac{\log_2 2^{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$，所以$T_n=\dfrac{0}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{0}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-1}}+\dfrac{n-1}{2^n}$，

两式相减，得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n-1}{2^n}$，$=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n-1}{2^n}=1-\dfrac{n+1}{2^n}$，所以$T_n=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$.

例 10.（2023·全国·模拟预测（文））若数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$，$a_1=3$，$a_2a_3=243$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\log_3 a_n$，求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和S_n.

【解析】(1)因为数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$，$a_1=3$，$a_2a_3=243$，所以$a_n\ne 0$.

所以数列$\{a_n\}$为等比数列，设其公比为q（$q\ne 0$）.

所以$a_2a_3=a_1q\times a_1q^2=3^2\times q^3=243$，解得：$q=3$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=3^n$.

即$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^n$.

(2)由（1）可知：$b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^n=n$，所以$a_nb_n=n\cdot 3^n$，

所以$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^n$ ①

①×3 得：$3S_n=1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n+1}$ ②

①-②得：$(1-3)S_n=1\cdot 3^1+1\cdot 3^2+1\cdot 3^3+\cdots+1\cdot 3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$$(1-3)S_n=\frac{3^1-3\cdot 3^n}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$$

所以 $S_n=\dfrac{3+(2n-1)3^{n+1}}{4}$

例 11．（2023·全国·模拟预测）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，数列$\{b_n\}$为等比数列，且$a_1=b_1=1$，$S_3=3b_2=12$．

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=a_nb_{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和T_n．

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由题意得：$3a_1+3d=12$，解得：$d=3$，

所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$，

由$3b_2=12$得：$b_2=4$，所以$q=\dfrac{a_2}{a_1}=4$，

所以$b_n=4^{n-1}$

(2)$c_n=a_nb_{n+1}=(3n-2)\cdot 4^n$，

则$T_n=4+4\times 4^2+7\times 4^3+\cdots+(3n-2)4^n$①，

$4T_n=4^2+4\times 4^3+7\times 4^4+\cdots+(3n-2)4^{n+1}$②，

两式相减得：$-3T_n=4+3\times 4^2+3\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+3\times 4^n-(3n-2)4^{n+1}$

$=4+3\times\dfrac{16-4^{n+1}}{1-4}-(3n-2)4^{n+1}=-12+(3-3n)4^{n+1}$，

所以$T_n=4+(n-1)4^{n+1}$

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_2=3$，$a_{14}=3a_5$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，且满足$2S_n=3b_n-1$．

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=a_n\cdot b_n$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为T_n，且$T_n-n\cdot 3^n<(-1)^n\cdot m$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数 m 的取值范围．

【解析】(1)解：等差数列$\{a_n\}$中，设公差为 d，

则$\begin{cases}a_2=3\\a_{14}=3a_5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+d=3\\a_1+13d=3a_1+12d\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1+d=3\\2a_1=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}\Rightarrow a_n=2n-1\left(n\in N_+\right)$

数列$\{b_n\}$中的前 n 项和为S_n，且$2S_n=3b_n-1$①

当$n=1$时，$b_1=1$

当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=3b_{n-1}-1$ ②

②－①得：$b_n=3b_{n-1}(n\ge 2)$

故数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $b_n=3^{n-1}\left(n\in N_+\right)$.

(2)解：数列 $\{c_n\}$ 中，$c_n=a_n\cdot b_n=\left(2n-1\right)\cdot 3^{n-1}$.

则 $T_n=1\times 3^0+3\times 3^1+\cdots+\left(2n-3\right)\cdot 3^{n-2}+\left(2n-1\right)\cdot 3^{n-1}$

所以 $3T_n=1\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+\left(2n-3\right)\cdot 3^{n-1}+\left(2n-1\right)\cdot 3^n$

故 $-2T_n=1+2\left(3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}\right)-\left(2n-1\right)\cdot 3^n=-1+2\left(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}\right)$

$-\left(2n-1\right)\cdot 3^n=-1+2\cdot\dfrac{1-3^n}{1-3}-\left(2n-1\right)\cdot 3^n=\left(2-2n\right)\cdot 3^n-2$

所以 $T_n=\left(n-1\right)\cdot 3^n+1$

$\because \left(-1\right)^n\cdot m>T_n-n\cdot 3^n=1-3^n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

当 n 为奇数时，$\left(-1\right)^n\cdot m=-m>1-3^n\Rightarrow m<3^n-1\Rightarrow m<\left(3^n-1\right)_{\min}=3^1-1=2$，

当 n 为偶数时，$\left(-1\right)^2\cdot m=m>1-3^n\Rightarrow m>\left(1-3^n\right)_{\max}=1-3^2=-8$

综上：实数 m 的取值范围为 $m\in\left(-8,2\right)$.

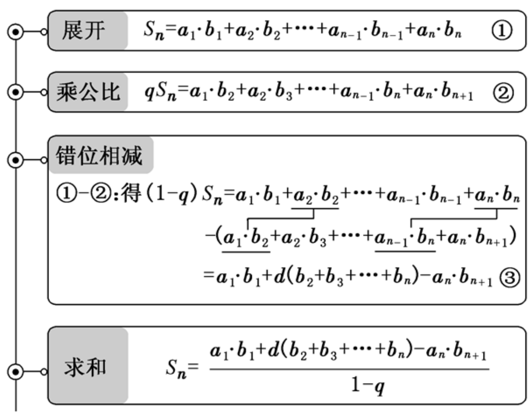
【方法技巧与总结】

错位相减法求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

（1）适用条件

若 $\{a_n\}$ 是公差为 $d(d\ne 0)$ 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 $q(q\ne 1)$ 的等比数列，求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

（2）基本步骤



（3）注意事项

①在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应特别注意将两式“错位对齐”，以便下一步准确写出 S_n-qS_n；

②作差后，应注意减式中所剩各项的符号要变号.

等差乘等比数列求和，令 $c_n=(An+B)\cdot q^n$，可以用错位相减法.

$T_n=(A+B)q+(2A+B)q^2+(3A+B)q^3+...+(An+B)q^n$ ①

$qT_n=(A+B)q^2+(2A+B)q^3+(3A+B)q^4+...+(An+B)q^{n+1}$ ②

①－② 得：$(1-q)T_n=(A+B)q-(An+B)q^{n+1}+A(q^2+q^3+...+q^n)$.

整理得：$T_n=(\frac{An}{q-1}+\frac{B}{q-1}-\frac{A}{(q-1)^2})q^{n+1}-(\frac{B}{q-1}-\frac{A}{(q-1)^2})q$.

题型四：分组求和法

例 13．（2023·广西柳州·模拟预测（理））已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

(1)证明$\{a_n+1\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n+n+1]$的前 n 项和S_n.

【解析】(1)由题意可得：$a_1+1=2\neq0$

$\because\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=\frac{2a_n+1+1}{a_n+1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+1}=2$

所以$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列

则$a_n+1=2^n$，即$a_n=2^n-1$

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n-1$

(2)由（1）知$a_n=2^n-1$，令$b_n=a_n+n+1$则$b_n=2^n+n$

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(2^1+1)+(2^2+2)+\cdots+(2^n+n)$.

$=(2^1+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+\ldots+n)$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(1+n)}{2}$

$=2^{n+1}+\frac{n(1+n)}{2}-2$.

综上$S_n=2^{n+1}+\frac{n(1+n)}{2}-2$.

例 14．（2023·青海·海东市第一中学模拟预测（文））已知正项数列$\{a_n\}$满足

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2+2n$，且$b_n=\frac{a_n}{n+1}+\frac{(n+2)(n-1)}{n}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

【解析】(1)解：因为$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2+2n$，①

当$n\ge 2$时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)^2+2(n-1)$．②

①−②得$na_n=2n+1$，所以$a_n=\dfrac{2n+1}{n}$．

当$n=1$时，$a_1=3$，也满足上式，

所以$a_n=\dfrac{2n+1}{n}$．

(2)解：因为$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{(n+2)(n-1)}{n}$，

则$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}+n+1-\dfrac{2}{n}=\dfrac{2n+1}{n(n+1)}+n+1-\dfrac{2}{n}=n+1-\dfrac{1}{n(n+1)}=n+1-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

则$S_n=2+3+\cdots+n+1-\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n(n+3)}{2}-\dfrac{n}{n+1}$．

例 15．（2023·上海松江·二模）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_2=10$，$a_3+a_4+a_5=30$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$a_1+a_2=10$，$a_3+a_4+a_5=30$

可得$\begin{cases}2a_1+d=10\\3a_1+9d=30\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=4\\d=2\end{cases}$，

∴$a_n=4+2(n-1)=2n+2$；

(2)∵数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，

∴$a_n+b_n=3^{n-1}$，

又$a_n=2n+2$，可得$b_n=3^{n-1}-2n-2$，

所以$S_n=(1+3+9+\cdots+3^{n-1})-(4+6+\cdots+2n+2)$

$=\dfrac{1-3^n}{1-3}-[4n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2]=\dfrac{3^n}{2}-n^2-3n-\dfrac{1}{2}$．

【方法技巧与总结】

（1）分组转化求和

数列求和应从通项入手，若无通项，则先求通项，然后通过对通项变形，转化为等差数列或等比数列或可求前 n 项和的数列求和．

（2）分组转化法求和的常见类型

求 $\{a_n\}$ 的和 —— $a_n=b_n\pm c_n$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列 —— 分组求和

$a_n=\begin{cases} b_n, n\text{为奇数}, \\ c_n, n\text{为偶数}, \end{cases}$ $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列

题型五：裂项相消法

例 16．（2023·全国·高三专题练习）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列．

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

【解析】(1)∵ $a_1=1$，∴ $S_1=a_1=1$，∴ $\frac{S_1}{a_1}=1$，

又∵ $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，

∴ $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，∴ $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，

∴当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

∴ $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

整理得：$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

∴ $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\ldots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，

显然对于 $n=1$ 也成立，

∴ $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$；

(2) $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

∴ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$

例 17．（2023·全国·高三专题练习）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，且 $S_n=a_{n+1}-3$．

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)已知数列 $\{c_n\}$ 满足________，记 T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，证明：$T_n<2$．

从① $c_n=\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}$　② $c_n=\dfrac{\log_2 a_{n+2}}{a_{n+1}}$ 两个条件中任选一个，补充在第（2）问中的横线上并作答.

【解析】(1)∵ $S_n=a_{n+1}-3$ ①，

当 $n=1$ 时，$a_1=a_2-3$，$\therefore a_2=4$；当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=a_n-3$ ②

①-②得，即 $a_{n+1}=2a_n$

又∵ $\dfrac{a_2}{a_1}=4\ne 2$，

∴数列 $\{a_n\}$ 是从第 2 项起的等比数列，即当 $n\ge 2$ 时，$a_n=a_2\cdot 2^{n-2}=2^n$．

$\therefore a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2^n, & n\ge 2.\end{cases}$．

(2)若选择①：

$$c_n=\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1}-1)(a_{n+1}-2)}=\frac{2^{n+2}}{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}=\frac{2\cdot 2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=2\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right),$$

$$\therefore T_n=2\left(1-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<2.$$

若选择② $c_n=\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，则 $T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}+\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$ ③，$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+\dfrac{n+2}{2^{n+2}}$ ④，

③-④得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)-\dfrac{n+2}{2^{n+2}}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{n+2}{2^{n+2}}$，

$\therefore T_n=2-\dfrac{n+4}{2^{n+1}}<2$．

例 18．（2023·全国·高三专题练习（理））已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，S_n 是其前 n 项和，且满足 $S_{n+1}=\left(\sqrt{S_n}+S_1\right)^2$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(2)已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a_n+1}{a_na_{n+1}}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n 的最小值.

【解析】(1)正项数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，满足 $S_{n+1}=\left(\sqrt{S_n}+S_1\right)^2$，所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$，