六年级学生数感现状调查研究

摘要：数感是初中阶段的十大关键能力之一，也是核心素养中审辨思维的重要表征形式.研究梳理了数感的内涵以及结构，并指出数感是在一定情境中处理数、数的运算以及数的评估的一种能力.通过对上海地区六年级学生的数感进行研究，发现六年级学生的数感发展水平在性别和成绩方面存在差异，六年级学生的数感发展水平受已有数学认知的影响，同时，六年级学生在评估和情境领域的数感表现受迷思概念的影响.教师在教学过程中要培养学习自信以减少差异,改善数相关知识的教学以及加强数的体验以减少迷思概念的产生.

关键词：核心素养；数感；六年级；调查研究

1 问题提出

在《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（下文简称《课标（2011 年版）》）中，数感作为义务教育阶段与符号意识、空间观念等十大需要发展的核心内容之一，有着无可替代的作用.《课标（20H 年版）》的总目标指出，要在经历数与代数的抽象过程中建立数感和符号意识.具体来说，要在小学低年级阶段发展数感，在中小衔接阶段初步形成数感，并在中学高年级阶段建立符号意识[1],同时，这与发展学生学科核心素养中的“知识理解”层面也有着密不可分的联系[2].可

见，对数感的培养是贯穿在整个义务教育阶段的重要内容。

有研究［3］指出，建立数感在提高学生的数学素养、帮助学生自我建构数学知识、发展学生的创新精神和实践能力以及提高文化修养等方面都具有重要的教育价值.而这与《课标（20H 年版）》阐述中，将“建立数感”作为数学思考领域的首要目标的理念不谋而合.在国内外，数感的教与学也一直是数学教育研究的重要课题，对数感的概念界定［4-6］、对数感现状的调查［770］,对数感的测量［7, H］、对数感培养方式的探索［12］,都有很多学者进行潜心研究.

因为在认识上对数感还存在着诸如简单化、泛化、混淆、借用、甚至神秘化等问题［13］,所以对数学教育工作者、研究人员和课程设计人员来说，评估数感也就成了一项重要而富有挑战性的工作.即便如此，依然有研究者通过自己对数感的认识来设计符合特定阶段测试者的问题进行定性与定量的研究.比如谢茜［14］就对中国五六七年级学生的数感进行测量并对各个年龄段的结果进行比较研究，夏小刚等人［15］通过调查中国七年级的学生的数感并用所得结果进行国际比较，赵倩等人［8］则借助中国台湾研究者开发的数感测量工具对中国大陆和中国台湾小学生的数感进行比较研究，在实践层面做出了卓越的贡献.

通过文献检索发现，虽然国内有很多对数感特征的探讨以及对中小学生数感的调查研究，但是对上海地区学生数感

现状的调查研究较少.上海作为 PISA 等测试的中方代表，其学业成就及关键能力等综合素养也有着突出的表现，作为数学课程核心内容之一的数感的现状也应该在教学与研究过程中被作为重要的参考依据.上海地区的现行学制为“五四学制”，六年级作为初中的起始年级，这一阶段的学生数感现状对中小学的数感培养都具有重要的借鉴意义.因此，研究以上海地区的六年级学生为研究对象，对学生的数感现状进行调查研究，试图管中窥豹，获得这一地域学习群体的数感特征，为教学和研究提供实践依据.

2 概念界定

2.1 数感的内涵

“数感”一词的内涵在教育学界一直难以界定.现行《标准（2011 年版）》将数感的概念描述为：”数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟.建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系.”从中可以看出，前半句话是对数感的描述性叙述，将数感表述为一种“感悟”；后半句话指出随着数感的发展，可以对哪些方面产生影响.显然，这还不足以让人们对“数感是什么？ ”“数感含有什么？ ”等问题产生清晰的认识.

很多学者都从不同的角度对数感的内涵撰文进行探讨.比如，史宁中和吕世虎［16］认为数感是对数的感悟，这

种感悟既通过肢体又通过大脑，因此同时含有感知和思维这两种成分，这一观点与《课标（2011 年版）》类似.叶花蓿［17］认为“数感”是一种对数字（量）的直觉，同时还是一种敏捷的感知，这种直觉还可以培养，且具有非逻辑性、非演绎性，反应时间短以及不稳定等特点.同样持有“直觉”观点的还有詹国楔，他认为数感可以从广义与狭义两个角度分为“数字感”和“数学感”，数感是对数、数字或者数学对象的洞察与领悟［18］.马云鹏和史炳星［6］则认为，数感是一种主动地、自觉地或自动化地理解和运用数的“态度”与“意识”，是明确数的概念、进行计算等数学活动的基础.

徐文彬和喻平［13］在对“感悟说”“直觉说”“敏感说”等观念进行评价的基础上，提出：“数感”包括“对数字关系和数字模式的意识”，以及运用这种对数字关系和数字模式的意识”灵活地解决数字问题的能力”两个部分，其核心是指计算策略中的灵活性和创造性，而非“没有思维的”计算程序.从中可以看出他们认为数感除了是对数字关系和模式的一种意识，更是灵活运用策略解决问题，以及评估结果的可靠性与过程的逻辑性的能力，这一能力也正是马利红等人［19］在 21 世纪核心素养 5c 模型中审辨思维能力的体现.Mcintosh 等人［4］也持有相同的观点，即数感是一种伴有意识的能力，他们认为数感是指一个人对数字以及数字运算的综合理解的能力，倾向于使用这种理解以灵活的方式做出数学判断，同

时发展处理数字及数字运算的有效的策略.它反映的是一种使用数字和定量的方法来交流、处理和解释信息的倾向和能力，最终产生一种数字是有用的、数学是有规律的意识.

霍雨佳等人［20］在对数感概念进行梳理的时候发现，现有的对数感定义的取向主要分为行为取向和认知取向，行为论侧重于研究数感表现出的一系列外显行为，认知论注重分析数感的内部心理过程，两种视角分别来自于外显行为和内部心理活动两个层面.从已有对数感的调查研究来看，由于难以在内部心理活动层面进行严谨的调查，大部分研究仍然倾向于从外显行为进行研究，同时有部分研究［8］辅以对被试进行访谈来探索心理层面的因素.

2.2 数感的结构

数感是由多种认知成分所组成的一个整体结构，但是对于具体的内容，已有研究也展示了不同的结构模型.

Mcintosh 等人［4］认为数感的结构包含数、运算以及情境等 3 种基本成分.其中，数包括数的顺序、数的表征以及数的大小 3 个方面；运算是指在理解运算对数的意义及影响的基础上，对运算结果的合理性进行判断的能力而非常规的纸笔运算；情境是指在理解问题背景中的数量关系的基础上，能够选择有效的方式来表述其中的数量关系，并能够判断问题解决结果的精确性和合理性.

后续的研究者对于数感的分类大多数是建立在 Mcintosh

等人研究基础上的.比如徐文彬和喻平［13］认为，在解决“需要用数字进行推理的问题”时，关键是要在整合“数字知识和数字的简便性”与“运算知识和运算的简便性”的基础上，形成或获得以下这些理解力、意识和倾向：（1）理解问题情境与合适的解题策略之间的关系；（2）意识到存在多样化的数字呈现方式；（3）应用有效呈现和（或）方法的倾向；（4）检验数据和结果的倾向.Cheung［21］以及等研究团队则在对数感进行测量时将数感分为理解数字和运算的基本含义的能力，识别数字大小的能力，使用数字和运算的多种表征的能力，识别运算对数的相对影响的能力，及判断计算结果合理性的能力等5个方面.

霍雨佳等人［20］则通过对国外已有研究的梳理，依据数感的测评内容，将数感结构分为数、运算、估计以及情境等4 种成分，共包括数的意义等 10 种内容，并将这些内容细分为基数（数量的数）等 21 个测量指标，并构建了数感三维结构模型.但是引文［22］中提到的“估计”成分是针对幼儿提出的，研究在对数感成分进行梳理时认为，六年级的学生数感应该包含对数和关系两种内容的估计，命名为“评估”更加贴切.据此，研究重新构建了数感的三维结构模型一一四面体数感结构模型（如图1）.

图1 四面体数感结构模型

基于以上述论，研究将数感的概念界定为：数感是能够

借助对数、数的关系以及数字模式的意识，灵活处理数（包括数的量和序）、数与数之间的关系（包括对数进行运算和比较）以及转换不同情境中数的形式（包括去情境化和带入情境化）的一种能力.主要包含无情境（或基于情境）的数、数的运算以及数的评估等 3 种成分 6 个内容.

2.3 数感与核心素养的关系

《课标（2011 版）》从数感的界定和作用两个方面描述了数感的表现，指出数感是关于数与数量的感悟、理解现实生活中数的意义、理解或表述数量关系等［1L 数感的研究对象以数与数量、数量关系、运算结果的估计与解释等为主，包含多个层次的具体内容且以客观描述为主.也有研究者从意识与能力的角度出发，认为数感是数的抽象意义与数的具体意义的统一，是一种自觉地基于数或现实的情境，解释和应用数的意识和能力［23］.

就实际表现而言，核心素养是个体面对现实生活情境时，运用已有观念、思维模式和技能进行分析、解释和交流问题的综合品质［24］.数学学科的核心素养是数学育人价值的集中体现，《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出，核心素养是学生通过数学学科的学习逐步形成的价值观、必备品格和关键能力［25］,共包含数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析等 6 个要素.这一描述指出了学生在经历教学过程后应该达到的发展目标，是一种聚焦

于人的发展的描述.也有学者从数学素养的内涵出发，认为素养是后天通过短时的培养和练习就能获得的知识、技能、技巧等经验系统，更注重个体在数学活动中的动态生成过程和效果[26].其本质是描述一个人经过数学教育后应当具有的数学特质[27].

从以上关于数感和核心素养的表述可以看出，两者都含有主观培养的“观点”“感悟”以及客观形成的“能力”和“品格”等内容，两者也都含有“问题解决”“数学思维”和“数学交流”等核心能力要素[28].从概念范围看，数感的概念更为具体，内容以数的意义、关系以及运算的结果等为主，更多地是从客观层面描述数学本身的体系.而核心素养以发展要素的形式提出，主要以学生本身的发展目标为主.在实际教学中，让学生感悟、形成和发展数学学科核心素养需要将数学内容与数学学科核心素养进行有机结合[29],从两者的关系来看，数感的良好发展是形成数学核心素养的前提，数学核心素养也能促进学生数感的发展.同时，数学核心素养的6个要素也为数感指出了发展的方向.

3 研究设计

3.1 研究问题与方法

上海学生在国际数学评估测试中一直表现优异，在 2018 年的国际学生评估项目(PISA)的测试中，中国的 4 省市学生均分居 79 个参测国家(地区)首位，具体到 3 个测试的领

域，数学领域的均分又高于阅读和科学，更是超出第二名新加坡 22 分之多［30］.而数感作为数学领域的核心内容之一，是发展符号意识、运算推理能力以及应用意识的重要基础，是数学学业的保障，对数学学习有着举足轻重的作用.从刚刚发布不久的《面向未来：21 世纪核心素养教育的全球经验》研究报告中也可以看出，核心素养主要由文化理解与传承素养、审辨思维、创新素养、沟通素养以及合作素养等 5 个部分组成［31］,上海学生在这些维度有怎么样的表现也值得期待.

有研究［32］表明，数感是预测未来数学成绩的精确指标,因为数感与解决数学应用问题的能力密切相关.王本法和乔福强［33］也对数感、数学效能以及学业成就之间的关系进行过研究，发现虽然数感和数学效能均与数学成绩存在显著相关，但是数感与数学成绩的关系较之数学效能与数学成绩的关系更紧密，而且数感对数学成绩的预测力强于数学效能对数学成绩的预测力.基于此，研究主要关注上海地区六年级学生的数感表现，同时从多维度观测数感呈现的特点，并通过学生在数感中的表现，探索在核心素养的培养过程中可以采取的教学策略.聚焦于以下两个问题：（1）上海六年级的学生在数感测试中各个结构的表现分布如何？在数感的迷思概念中呈现出何种特点？（2）该群体学生在数感的测试中对应地在何种程度上表现出了哪些核心素养？在课堂教学中应

该如何对这些核心素养进行培养？

研究采用数感双层测试的调查研究法，测试时间为 40 分钟，强调每道题目的理由部分务必写出自己的思考过程.测试过程中不能交流也不能向教师询问，测试结束后当场收回测试卷.阅卷后，对部分结果选择错误且理由无法理解的学生进行访谈，进一步了解其心理活动层面的活动过程，主要询问：（1）选择某一选项的理由；（2）理由解释的更具体的阐述；（3）对其它没有做出选择的选项的想法.

3.2 测试卷的编制与赋分

根据已有研究，首先将数感分为数、运算、评估以及情境等 4 个成分，由于绝大多数情境类问题都依托于前 3 个成分，所以将情境类问题设置在前 3 个成分中进行测试，同时，所有含有情境类的问题都额外设置一道非情境类问题进行测量用来规避对其它成分的干扰.考虑到 4 个成分中的具体指标之间存在着相互依存的关系，在设计问卷时仅考查到内容维度.同时参考已有研究[34],最终测试问卷共包含“数”“运算”“评估”和“情境”等 *4* 个维度共 16 个问题.研究中涉及到的基于情境的数感调查分析数据，分别从测验的前 3 个维度提取.其中，“数”的维度取 1-1 到 1-6 题的测量数据，“运算”的维度取 2-1 到 2-6 的测量数据，“评估”的维度取 3-1 到 3-4 的测量数据，“情境”的维度取 1-3, 2-2, 2-3, 2-5, 3-1 等 5 题的测量数据.已有关于数感的研究测

试主要以选择和标记题为主要作答形式，采用纸笔或者在线的测试方式.借鉴已有各种研究形式的利弊，研究选取纸笔、全选择题的测量方式.

测试采用两层计分模式，每个问题包含答案选项和理由叙述两个部分，答案选项分值设置为 2 分，用来检测学生的答题正确情况.选对得 2 分，选错或者未选得 0 分.理由叙述的分值设置为 *4* 分，主要观测学生在解题时的思维策略.思维策略分为数感思维策略、传统算法策略、迷思概念以及猜测策略等 4 种情况，根据学生展示的思维策略分别赋予 4、3、2、1 分.具体评分标准如表 1 所示.

表 1 数感测验评分标准

3.3 研究对象的选取及数据的处理

2020 年 5 月 18 日下午，选取上海市某公办初级中学六年级的 *4* 个班进行施测，各个班级的测试过程和要求保持一致，测试时间 40 分钟.共发放问卷 135 份，收回有效问卷 131 份，其中男生 58 人，女生 73 人.有理数的运算内容在小初衔接段内处于重要地位，在培养数感的同时也能够很好地反映数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算和数学建模等核心素养内容水平[35].在施测前，他们刚刚学习完”有理数”的相关内容，与小学阶段相比，对数的认识有了进一步的提升.所以，学生的学业水平等级根据他们在测量之前所学的“有理数的运算”中连续两个月的数学成绩均值确定，

划分为优秀（三 90 分）、良好（三 80 分且 V90 分）、中等（2 60 分且（80 分）和不及格（＜60 分）等 4 个等级.

使用 Excel 和 SPSS 22. 0 对收集的数据进行描述统计、信度以及方差分析，考查数感问卷中各维度之间的相关性.分析前，对收集到的问卷数据用 Cronbach’ s a 系数分析，得出数感量表的信度达到了 0.825,表示在可接受的范围内.

利用相关分析来检验数感各分层次之间是否存在相关性，在行为科学领域，通常把相关系数 0.3 以上视为中等相关，0. 5 以上视为高相关[36].如表 2 所示，组内两两层次在显著性检验水平为 0. 01 时，相关系数在 0. 436-0. 814 之间，为中高程度正相关.4 个层次与数感总量表之间在显著性检验水平为 0.01 时的相关系数在 0.695∽0.910 之间，表明各层次与整个问卷具有高度一致性，达到高程度正相关.

表 2 各分析层次间的相关系数矩阵

注：**表示在置信度（双测）为 0.01 时，显著性相关

4 研究结果

3.4 六年级学生的数感发展水平与学生的性别和成绩的相关性

研究结果表明，六年级学生的数感水平（如表 3）受到性别和成绩的影响比较明显.从性别角度进行观察，男生在数感的 4 个维度及总体表现中全面高于女生.为了更详细地分析相关数据，首先从性别角度对单因素方差分析的前提进

行检验，经检验，5 个维度的相伴概率为 0.251～0.966,全部大于显著性水平 0. 05,可以认为各个组总体方差是相等的，满足方差检验的前提条件.从方差分析结果表（表 4）可以看出，方差检验的 F 值为 3. 314～9. 093,相伴概率只有“数”的维度大于显著性水平 0.05,表示接受零假设，也就是说不同性别对运算、评估、情境以及数感整体的表现中都有显著的影响.

表 3 不同性别及学业水平的学生在数感各维度上的表现

表 4 不同性别和成绩对数感影响的方差分析

从表 3 也可以看出，成绩对数感的表现也有明显的影响，从整体上表现出学业水平越高，数感表现越好的状态.为了进一步研究，先对成绩维度的单因素方差分析的前提进行检验，结果如表 4,相伴概率为 0. 122～0.642,大于显著性水平 0.05,满足方差检验的前提条件，从方差分析结果（表 4）可以看出，方差检验的 F 值为 *4.* 982-13. 142,相伴概率全部小于显著性水平 0. 05,可见不同成绩水平对数感整体及其所包含的各个维度都有显著的影响.

3.5 六年级学生数感发展水平和已有数学认知水平的关系

已有研究［37］表明，学生的数学认知水平和认知方式会影响学生的数学学习，从而影响他们的数学能力水平.从解读问题时对数学概念的理解，到解决问题时对数学技能和数

学策略的使用等，都会调动已有的数学认知经历.学生在问题解决过程中使用的数学概念本身也经历着多个不同的阶段[38],对这些概念的正确理解会在很大程度上影响他们的数感水平.为了探寻数感水平的呈现是否受已有数学认知的影响，选取部分同学对两道有代表性的问题进行访谈.

问题 1 （数一意义一序数）：你觉得 1.52 和 L 53 之间有多少个小数？

A. 0 个；B. 1 个；C.几个；D.无数个.

此题在所有测试的小题中均值最高，达到了 5. 725,表明大多数同学能够借助数感的思维策略获得正确的结果.为了进一步了解学生对此题的想法，选择了几位学生进行访谈,学生 A 认为“因为这个题目中的小数没有数位的限制，所以我可以不断地从十分位、百分位、千分位.....无限写下去”，学生 B 认为“因为小数的位数可以有无数种可能，所以在这两个数之间的小数也可以有无数个“，学生 C 则通过举例“大于 1. 52 小于 1. 53 的小数可以是 1. 521,1. 521 1,1. 521 11 ..... 这样可以无限写下去”.访谈的过程中，他们都提到了他们对这一题的认知来源于前不久学习的“有理数” 一章，知道了数轴的相关概念，并且了解了在数轴上表示数的任意两个点之间还有无数个数.

问题 2 （评估一数量一基准数）：小明使用计算器计算得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/525144131333011033