7.2复数的四则运算

一、复数的加法运算

我们规定，复数的加法法则如下：

设$z_1=a+bi, z_2=c+di\left(a,b,c,d\in R\right)$是任意两个复数，那么它们的和是

$$z_1+z_2=\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i$$

很明显，两个复数的和仍然是一个确定的复数

两个复数相加类似于两个多项式相加。

1.复数的加法的运算律

设$z_1 = a + bi, z_2 = c + di\left(a, b, c, d \in R\right)$是任意两个复数，那么

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

由此，我们可以得到$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$，这就是复数加法的交换律。

复数加法的交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

同理可得：复数的加法满足结合律

复数加法的结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

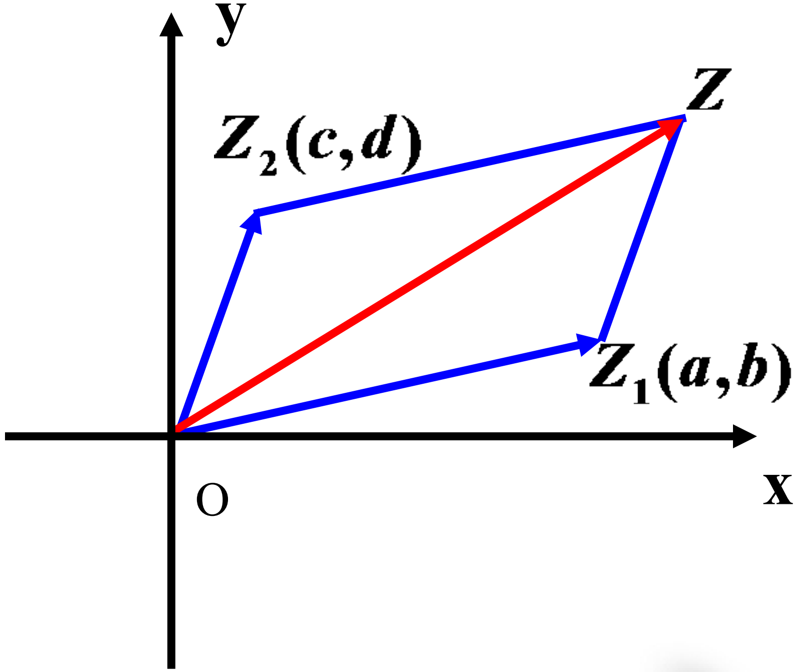
2.复数加法的几何意

设$\overrightarrow{OZ_1}$及$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数$a+bi$及复数$c+di$对应，

则$\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$

又因为$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$

则$\overrightarrow{OZ}=(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$



复数加法的几何意义：

向量$\overrightarrow{OZ}$就是复数$(a+b)+(c+d)i$　对应的向量。

复数的减法运算

我们知道，实数的减法是加法的逆运算。类比实数减法的意义，你认为该如何定义复数的减法？

我们规定，复数的减法是加法的逆运算

即把满足 $(c+di)+(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi\ (x,y\in R)$ 叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di\ (c,d\in R)$ 的差，记作 $(a+bi)-(c+di)$.

根据复数相等的含义可得：$c+x=a, d+y=b$

因此 $x=a-c, y=b-d$　所以 $x+yi=(a-c)+(b-d)i$

即 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ **这就是复数的减法法则。**

由此可见，两个复数的差是一个确定的复数。

可以看出，两个复数相减，类似于两个多项相减。

复数减法的几何意义：

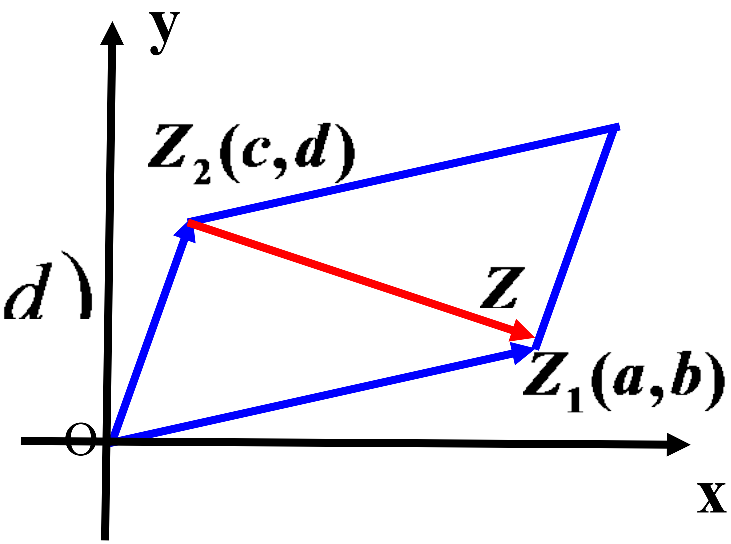
类比复数加法的几何意义，你能得出复数减法的几何意义吗？

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+bi$ 及复数 $c+di$ 对应，

则 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$

又因为 $\overrightarrow{Z_2Z_1}=\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$

则 $\overrightarrow{Z_2Z_1}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$



复数减法的几何意义：

向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 就是复数 $(a-c)+(b-d)i$ 对应的向量。

例1、计算$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

解：$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

$=(5-2-3)+(-6-1-4)i$ $=-11i$

例2、根据复数及其运算的几何意义，求复平面内的两点$Z_1(x_1,y_1),Z_2(x_2,y_2)$之间的距离。

解：因为复平面内的点$Z_1(x_1,y_1),Z_2(x_2,y_2)$对应的复数

$z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i$

所以点$Z_1(x_1,y_1),Z_2(x_2,y_2)$之间的距离为

$$|Z_1Z_2|=\left|\overrightarrow{Z_1Z_2}\right|=|z_2-z_1|=|(x_2+y_2i)-(x_1+y_1i)|$$

$$=|(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

这就是复平面内的两点的距离公式。显然，这个公式和平面直角坐标系中两点的距离公式是一样的。

练习

1、计算下列各式

（1）(2+4i)+(3-4i) =(2+3)+(4-4)i =5

（2）5-(3+2i) =(5-3)+(0-2)i =2-2i

（3）(-3-4i)+(2+i)-(1-5i)=(-3+2-1)+(-4+1+5)i= -2+2i

（4）(2-i)-(2+3i)+4i =(2-2+0)+(-1-3+4)i =0

2、已知$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$，求$|z_1 + z_2|$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$$

三.复数的乘法运算

我们规定，复数的乘法法则如下：

设$z_1=a+bi, z_2=c+di\left(a,b,c,d\in R\right)$是任意两个复数，那么 它们的积是

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

很明显，两个复数的积仍然是一个确定的复数

可以看出，两个复数相乘，类似于两个多项式相乘，只要在所得的结果中把 i^2换成-1，并且把实部与虚部分别合并即可。

复数乘法的交换律

复数的乘法满足交换律、结合律吗？乘法对加法满足分配律吗？

设$z_1=a+bi, z_2=c+di\left(a,b,c,d\in R\right)$是任意两个复数，由此 可得:

$$z_1z_2=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i$$

$$z_2z_1=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i$$

所以$z_1z_2=z_2z_1$ 这就是复数乘法的交换律。

复数乘法的交换律 $z_1z_2=z_2z_1$

同理可得：复数的乘法满足结合律，乘法对加 法满足分配律。

复数乘法的结合律 $\left(z_1z_2\right)z_3=z_1\left(z_2z_3\right)$

复数乘法的分配律 $z_1\left(z_2+z_3\right)=z_1z_2+z_1z_3$