

学海大联考 2023-2024 学年高三数学第一学期期末监测模拟试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 刘徽(约公元 225 年-295 年), 魏晋期间伟大的数学家, 中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的, “割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣”, 这可视为中国古代极限观念的佳作, 割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示), 当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积, 运用割圆术的思想, 得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为 ()



- A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

2. 已知集合 $A = \{x | 1 < x \leq 24\}$, $B = \left\{x | y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}\right\}$, 则 $\partial_A B =$ ()

- A. $\{x | x \geq 5\}$ B. $\{x | 5 < x \leq 24\}$
C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | 5 \leq x \leq 24\}$

3. 已知 m 为实数, 直线 $l_1: mx + y - 1 = 0$, $l_2: (3m - 2)x + my - 2 = 0$, 则“ $m = 1$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b}$ 是单位向量, 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ ()

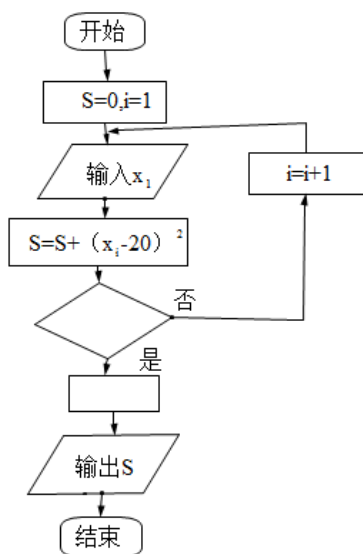
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 设 x_1, x_2 为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x$ ($\omega > 0$) 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1, 则 $\omega =$ ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

6. 框图与程序是解决数学问题的重要手段, 实际生活中的一些问题在抽象为数学模型之后, 可以制作框图, 编写程序, 得到解决, 例如, 为了计算一组数据的方差, 设计了如图所示的程序框图, 其中输入 $x_1 = 15$, $x_2 = 16$, $x_3 = 18$,

$x_4 = 20$, $x_5 = 22$, $x_6 = 24$, $x_7 = 25$, 则图中空白框中应填入 ()



- A. $i > 6$, $S = \frac{S}{7}$ B. $i \leq 6$, $S = \frac{S}{7}$ C. $i > 6$, $S = 7S$ D. $i \leq 6$, $S = 7S$

7. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是 ()

- A. $y = \sqrt{x+1}$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y = \log_2 x$

8. 复数 $2i(1+i)$ 的模为 ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$, 则 $b =$ ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $4\sqrt{3}$

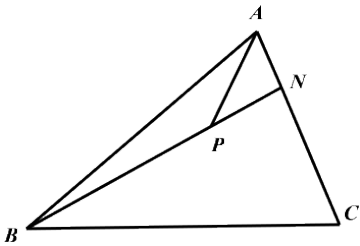
10. 若 $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = \sqrt{3}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 点 C 在 AB 上, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($m, n \in R$), 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

11. 在复平面内, 复数 $i(2+i)$ 对应的点的坐标为 ()

- A. (1, 2) B. (2, 1) C. (-1, 2) D. (2, -1)

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ， P 是 BN 上的一点，若 $m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ，则实数 m 的值为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{9}$
- C. 1
- D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $m =$ _____.

14. 已知 O 为矩形 $ABCD$ 的对角线的交点，现从 A, B, C, D, O 这 5 个点中任选 3 个点，则这 3 个点不共线的概率为_____.

15. 已知平面向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ， $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ ，且 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，则 $|\vec{b}| =$ _____

16. 已知全集 $U = \{1, 2, 3\}$ ， $A = \{2\}$ ，则 $\complement_U A =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （12 分）班主任为了对本班学生的考试成绩进行分析，决定从本班 24 名女同学，18 名男同学中随机抽取一个容量为 7 的样本进行分析.

（1）如果按照性别比例分层抽样，可以得到多少个不同的样本？（写出算式即可，不必计算出结果）

（2）如果随机抽取的 7 名同学的数学，物理成绩（单位：分）对应如下表：

学生序号 <i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
数学成绩 x_i	60	65	70	75	85	87	90
物理成绩 y_i	70	77	80	85	90	86	93

①若规定 85 分以上（包括 85 分）为优秀，从这 7 名同学中抽取 3 名同学，记 3 名同学中数学和物理成绩均为优秀的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望；

②根据上表数据，求物理成绩 y 关于数学成绩 x 的线性回归方程（系数精确到 0.01）；若班上某位同学的数学成绩为 96 分，预测该同学的物理成绩为多少分？

附：线性回归方程 $\hat{y} = bx + a$ ，

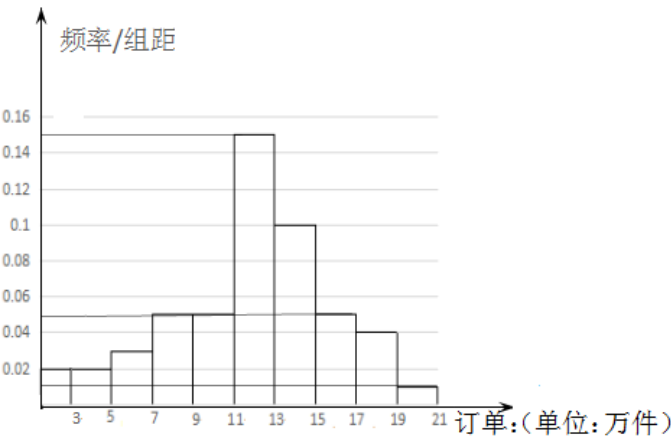
其中 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
76	83	812	526

18. (12分) 已知 $P(0,-2)$, 点 A,B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右顶点, 直线 BP 交 E 于另一点 $Q, \triangle ABP$ 为等腰直角三角形, 且 $|PQ|:|QB| = 3:2$.

- (I) 求椭圆 E 的方程;
- (II) 设过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于 M,N 两点, 总使得 $\angle MON$ 为锐角, 求直线 l 斜率的取值范围.

19. (12分) 为了解网络外卖的发展情况, 某调查机构从全国各城市中抽取了 100 个相同等级地城市, 分别调查了甲乙两家网络外卖平台 (以下简称外卖甲、外卖乙) 在今年 3 月的订单情况, 得到外卖甲该月订单的频率分布直方图, 外卖乙该月订单的频数分布表, 如下图表所示.



订单：（单位：万件）	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
频数	1	2	2	3

订单：（单位：万件）	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)
频数	40	20	20	10	2

(1) 现规定，月订单不低于 13 万件的城市为“业绩突出城市”，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 90% 的把握认为“是否为业绩突出城市”与“选择网络外卖平台”有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

(2) 由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 3 月在全国各城市的订单数 Z （单位：万件）近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ （同一组数据用该区间的中点值作代表）， σ 的值已求出，约为 3.64，现把频率视为概率，解决下列问题：

- ①从全国各城市中随机抽取 6 个城市，记 X 为外卖甲在今年 3 月订单数位于区间 (4.88,15.8) 的城市个数，求 X 的数学期望；
- ②外卖甲决定在今年 3 月订单数低于 7 万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月 9 万件的水平，现从全国各月订单数不超过 7 万件的城市中采用分层抽样的方法选出 100 个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润 5 元，但每件外卖平均需送出红包 2 元，则外卖甲在这 100 个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.702	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

②若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < Z \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
，以坐标原点 O 为极点， x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 3$.

(1) 求直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程；

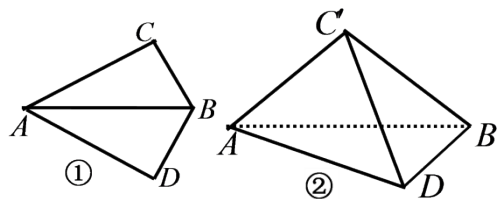
(2) 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 点 $P(2,1)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 不存在单调递减区间, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), $m \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值.

22. (10分) 在平面四边形 $ACBD$ (图①) 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 均为直角三角形且有公共斜边 AB , 设 $AB = 2$, $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿 AB 折起, 构成如图②所示的三棱锥 $C' - ABD$, 且使 $C'D = \sqrt{2}$.



(1) 求证: 平面 $C'AB \perp$ 平面 DAB ;

(2) 求二面角 $A - C'D - B$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, 当 $n = 180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积,

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$,

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,

所以当 $n = 180$ 时, 可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$,

故选:A

【点睛】

本题考查三角形面积公式的应用,考查阅读分析能力.

2、D

【解析】

首先求出集合 B , 再根据补集的定义计算可得;

【详解】

解: $\because -x^2 + 6x - 5 > 0$, 解得 $1 < x < 5$

$\therefore B = \{x | 1 < x < 5\}$, $\therefore \complement_A B = \{x | 5 \leq x \leq 24\}$.

故选: D

【点睛】

本题考查补集的概念及运算, 一元二次不等式的解法, 属于基础题.

3、A

【解析】

根据直线平行的等价条件, 求出 m 的值, 结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

当 $m=1$ 时, 两直线方程分别为直线 $l_1: x+y-1=0$, $l_2: x+y-2=0$ 满足 $l_1 \parallel l_2$, 即充分性成立,

当 $m=0$ 时, 两直线方程分别为 $y-1=0$, 和 $-2x-2=0$, 不满足条件.

当 $m \neq 0$ 时, 则 $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{3m-2}{m} = \frac{m}{1} \neq \frac{-2}{-1}$,

由 $\frac{3m-2}{m} = \frac{m}{1}$ 得 $m^2 - 3m + 2 = 0$ 得 $m=1$ 或 $m=2$,

由 $\frac{m}{1} \neq \frac{-2}{-1}$ 得 $m \neq 2$, 则 $m=1$,

即“ $m=1$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的充要条件,

故答案为: A

【点睛】

(1) 本题主要考查充要条件的判断, 考查两直线平行的等价条件, 意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力.

(2) 本题也可以利用下面的结论解答, 直线 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 和直线 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 平行, 则 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ 且两

直线不重合, 求出参数的值后要代入检验看两直线是否重合.

4、C

【解析】

设 $\vec{b} = (x, y)$ ，根据题意求出 x, y 的值，代入向量夹角公式，即可得答案；

【详解】

设 $\vec{b} = (x, y)$ ， $\therefore \vec{a} - \vec{b} = (1 - x, \sqrt{3} - y)$ ，

Q $\vec{b}$ 是单位向量， $\therefore x^2 + y^2 = 1$ ，

Q $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ ， $\therefore (1 - x)^2 + (\sqrt{3} - y)^2 = 3$ ，

联立方程解得：
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

当 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 时， $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ ； $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$

当 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ 时， $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$ ； $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$

综上所述： $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查向量的模、夹角计算，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力、运算求解能力，求解时注意 $\vec{b}$ 的两种情况。

5、A

【解析】

先化简已知得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ，再根据题意得出 $f(x)$ 的最小值正周期 T 为 1×2 ，再求出 ω 的值。

【详解】

由题得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ，

设 x_1, x_2 为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的两个零点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1，

$\therefore \frac{T}{2} = 1$ ，解得 $T = 2$ ；

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = 2,$$

解得 $\omega = \pi$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换和三角函数的图象与性质的应用问题，是基础题.

6、A

【解析】

依题意问题是 $S = \frac{1}{7}[(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_7 - 20)^2]$ ，然后按直到型验证即可.

【详解】

根据题意为了计算 7 个数的方差，即输出的 $S = \frac{1}{7}[(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_7 - 20)^2]$ ，

观察程序框图可知，应填入 $i > 6$ ， $S = \frac{S}{7}$ ，

故选：A.

【点睛】

本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及转化与化归思想，属于基础题.

7、C

【解析】

利用基本初等函数的单调性判断各选项中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，进而可得出结果.

【详解】

对于 A 选项，函数 $y = \sqrt{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 B 选项，函数 $y = x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 C 选项，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

对于 D 选项，函数 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数在区间上单调性的判断，熟悉一些常见的基本初等函数的单调性是判断的关键，属于基础题.

8、D

【解析】

利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数模的计算公式求解.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/525214223012011131>