第六节 导数在经济学中的应用

一、 经济学中的常用函数

二、边际与弹性

三、经济学中常见的弹性函数

一、经济学中的常见函数

1. 需求函数

某一商品的需求量是指关于一定的价格水平，在一定的时间内，消费者愿意而且有支付能力购置的商品量。

消费者对某种商品的需求量是由多种因素决定的，例如，人口、收入、季节、该商品的价格、其他商品的价格等。

如果除价格外，收入等其他因素在一定时期内变化很少，即可认为其他因素对需求量无影响，那么需求量 Q 便是价格 P 的函数，记

$$Q = f(P)$$

称 f 为需求函数，同时 f（P）的反函数 $P = f^{-1}(Q)$

也称为需求函数。

一般说来，商品价格的上涨会使需求量减少。因此，需求函数是单调减少的。

人们根据统计数据，常使用下面简单的需求函数

线性函数：$Q=-aP+b$ ，其中 $a,b>0$

幂函数： $Q=kP^{-a}$，其中 $k>0,a>0$

指数函数：$Q=a\mathrm{e}^{-bP}$，其中 $a>0,b>0$

例 1 设某商品需求函数为

$$Q = -aP + b \quad a, b > 0$$

讨论 $P = 0$ 时的需求量和 $Q = 0$ 时的价格。

解： 当 $P = 0$ 时，$Q = b$，它表示当价格为零时，消费者对商品的需求量为 b，b 也就是市场对该商品的**饱和需求量**，也称为**最大需求量**。

当 $Q = 0$ 时，$P = b/a$，它表示当价格上涨到 b/a 时，没有人愿意购买该产品。

2. 供给函数

某一商品的供给量是指在一定的价格条件下，在一定的时期内，生产者愿意生产并可供出出售的商品量。

供给量也是由多个因素决定的，如果认为在一段时间内除价格以外的其他因素变化很小，那么供给量 Q 便是价格 P 的函数，设

$$Q = \psi(P)$$

称 ψ 为供给函数。

一般说来，商品的市场价格越高，生产者愿意而且能够向市场提供的商品量也就越多。因此一般的供给函数都是单调增加的。

人们根据统计数据，常使用下面简单的供给函数

线性函数：$Q = aP - b$ ，其中 $a, b > 0$

幂函数：$Q = kP^a$，其中 $k > 0, a > 0$

指数函数：$Q = a\mathrm{e}^{bP}$ ，其中 $a > 0, b > 0$

使一种商品的市场需求量与供给量相等的价格〔记为P0〕，称为均衡价格。

例2. 某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q = 14 - 1.5P, \quad Q = -5 + 4P$$

求该商品均衡价格。

解：由供需均衡条件，有

$$14 - 1.5P = -5 + 4P$$

由此，得均衡价格 $P_0 = \dfrac{19}{5.5} \approx 3.45$

3. 生产函数

生产函数表示了一定的时期内各生产要素的投入量与产品的最大可能产量之间的关系。

生产要素包括资金和劳动力等多种要素。为方便起见，暂时先考虑只有一个投入变量，而其余投入皆为常量的情况。

例3. 在电力输送过程中，如果用 x 表示能量输入，那么能量输出为 y = f (x)，其中

$$f\left(x\right)=-c+\sqrt{c^{2}+cx}$$

这里 $c>0$ 为容量参数。

规模报酬问题：

当投入增加一倍时，产出是否也增加一倍？

例： 设投入 x 与产出 $g(x)$ 的关系为

$$g(x)=cx^{a}$$

由于 $g(2x)=2^{a}cx^{a}$，可见，

当 $\alpha=1$ 时，规模报酬不变；当 $\alpha<1$ 时，如果投入增加一倍，产量增加不到一倍，即规模报酬递减；

当 $\alpha>1$ 时，如果投入增加一倍，产量增加超过一倍，即规模报酬递增。

4. 本钱函数

本钱是生产一定数量产品所需要的各种生产要素投入的价格或费用总额。

本钱由固定本钱和可变本钱组成。固定本钱是指支付固定生产要素的费用。包括厂房、设备折旧以及管理人员工资等；可变本钱是指支付可变生产要素的费用，包括原材料、燃料的支付以及生产工人的的工资，它随着产量的变动而变动。

例4. 设某厂的生产函数 $Q=24\sqrt{L}$，其中 L 表示劳动力数量，求劳动力价格为1152时的可变成本函数 $C=C(Q)$

解： 由 $Q=24\sqrt{L}$，得 $L=\dfrac{Q^2}{576}$，这样

$$C=1152L=1152\frac{Q^2}{576}=2Q^2$$

即可变成本函数 $C=2Q^2$

5. 收益函数

总收益是生产者出售一定数量产品所得到的全部收入，用 Q 表示出售的产品数量，R 表示总收益，$\overline{R}$ 表示平均收益，则

$$R = R(Q),\ \overline{R} = \frac{R(Q)}{Q}$$

如果产品的价格 P 保持不变，那么

$$R = PQ,\ \overline{R} = P$$

6. 利润函数

利润是生产中获得的总收益与投入的总本钱之差，即 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$

例6. 某产品价格为 P，需求函数为 $Q=50-5P$

本钱函数为 $C=50+2Q$，求产量 Q 为多少时利润 L 最大？最大利润是多少？

解：由需求函数 $Q=50-5P$，可得 $P=10-\dfrac{Q}{5}$

于是，收益函数为 $R=P\cdot Q=10Q-\dfrac{Q^2}{5}$

这样，利润函数为

$$L = R(Q) - C(Q) = 8Q - \frac{Q^2}{5} - 50$$

$$= -\frac{1}{5}(Q-20)^2 + 30$$

因此，$Q = 20$ 时，最大利润为30。

7. 库存函数

设某企业在计划期 T 内，对某种物品的总需求量为 Q，由于库存费用及资金占用等因素。显然一次进货是不合算的，考虑均匀地分 n 次进货，每次进货批量为 $q=\frac{Q}{n}$，进货周期为 $t=\frac{T}{n}$

假定每件物品的贮存单位时间费用为C_1，每次进货费用为C_2，每次进货量相同，进货间隔时间不变，以匀速消耗贮存物品，则平均库存为 $\frac{q}{2}$。

在时间 T 内的总费用 E 为

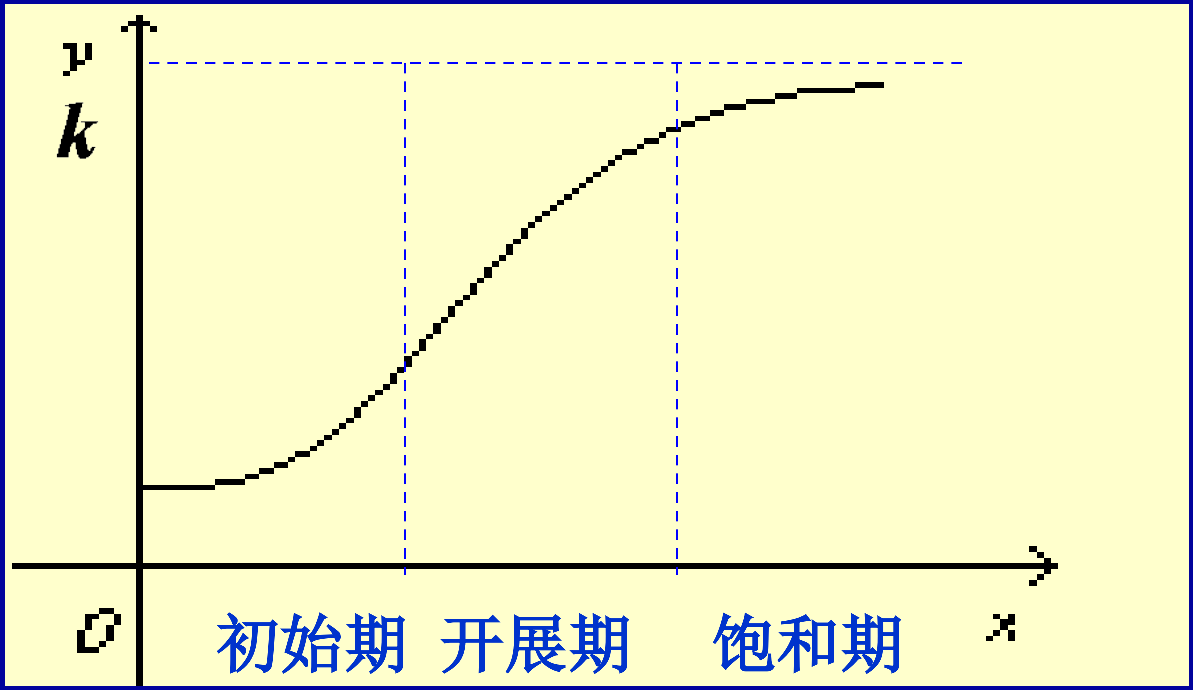
$$E=\frac{1}{2}C_1Tq+C_2\frac{Q}{q}$$

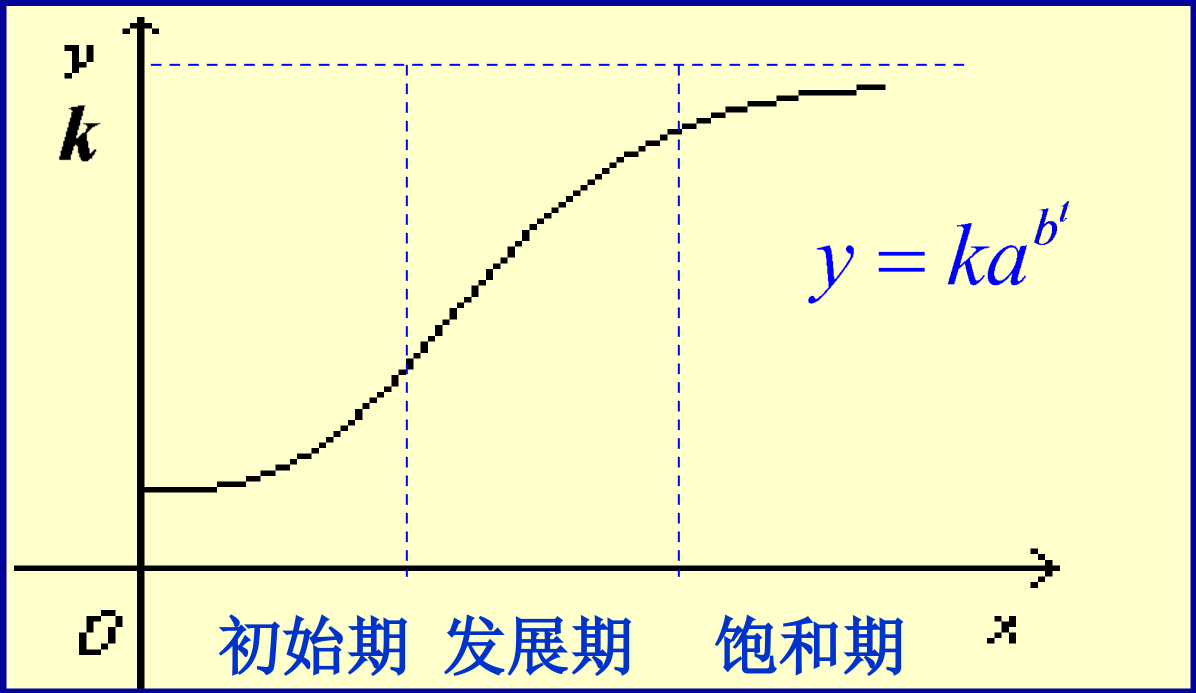
其中 $\frac{1}{2}C_1Tq$ 是贮存费，$C_2\frac{Q}{q}$ 是进货费用。

8. 戈珀兹〔Gompertz〕曲线

戈珀兹 曲线是指数函数 $y = ka^{b^t}$

在经济预测中，经常使用该曲线. 当 $\lg a < 0$, $0 < b < 1$时，其图形如下图





由图可见戈珀兹曲线当 t > 0 且无限增大时，其无限与直线 y = k 接近，且始终位于该直线下方。在产品销售预测中，当预测销售量充分接近到 k 的值时，表示该产品在商业流通中将到达市场饱和。

二、边际与弹性

1. 边际概念

如果函数$y=f(x)$在x_0 处可导，则在$(x_0, x_0+\Delta x)$

内的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

经济学中称它为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的边际函数值。

设在点 $x=x_0$ 处，x 从 x_0 改变一个单位时，

y 的增量 Δy 的准确值为 $\Delta y\Big|_{\Delta x=1}^{x=x_0}$，

当 x 改变量很小时，则由微分的应用知道，

Δy 的近似值为

$$\Delta y\Big|_{\Delta x=1}^{x=x_0} \approx \mathrm{d}y = f'(x)\Delta x\Big|_{\Delta x=1}^{x=x_0} = f'(x)$$

当 $\Delta x=-1$ 时，标志着 x 由 x_0 减少一个单位。

这表明 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处，当 x 改变时产生一个单位的 y 近似改变 $f'(x_0)$ 个单位。在应用问题中解释边际函数值的具体意义时往往略去“近似”二字。

定义1 设函数 $f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数**。$f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为**边际函数值**。即：

当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位。

例1 设函数 $y=x^2$，试求 y 在 $x=5$ 时的边际函数值.

解： 因为 $y'=2x$，所以 $y'\big|_{x=5}=10$

该值表明：当 $x=5$ 时，x 改变 1 个单位（增加或减少 1 个单位），y 改变 10 个单位（增加或减少 10 个单位）.

2. 经济学中常见的边际函数

（1）边际本钱

总成本函数 $C(Q)$ 的导数，称为边际成本。

$$C'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$$

（2）边际平均本钱

平均成本 $\overline{C}(Q)$ 的导数，称为平均边际成本。

$$\overline{C}'(Q)=\left(\frac{C(Q)}{Q}\right)'=\frac{QC'(Q)-C(Q)}{Q^2}$$

一般说来，总成本 $C(Q)$ 等于固定成本 C_0 与可变成本 $C_1(Q)$ 之和，即

$$C(Q)=C_0+C_1(Q)$$

于是，边际本钱为

$$C'(Q)=\left[C_0+C_1(Q)\right]'=C_1'(Q)$$

显然，边际本钱与固定本钱无关。

例2. 设某产品生产 Q 单位的总本钱为

$$C(Q)=1100+\frac{Q^2}{1200}$$

求：（1）生产900个单位时的总成本和平均成本；

〔2〕生产900个单位到1000个单位时的总本钱的平均变化率；

〔3〕生产900个的边际本钱，并解释其经济意义。

总本钱函数：$C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$

解：〔1〕生产900个单位时的总本钱为

$$C(Q)\big|_{Q=900}=1100+\frac{900^2}{1200}=1775$$

平均本钱为

$$\overline{C}(Q)\big|_{Q=900}=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{1775}{900}\approx 1.97$$

总本钱函数： $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$

解：〔2〕生产900个单位到1000时总本钱的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}=\frac{C(1000)-C(900)}{1000-900}$$

$$=\frac{1933-1775}{100}=1.58$$

总本钱函数： $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$

解：〔3〕边际本钱函数 $C'(Q)=\dfrac{2Q}{1200}=\dfrac{Q}{600}$

当Q = 900 时的边际本钱为

$$C'(Q)\big|_{Q=900}=\frac{1800}{1200}=1.5$$

它表示当产量为 900 个单位时，再增加〔或减少〕一个单位，需增加〔或减少〕本钱 1.5 个单位。

（3）边际收益

定义：总收益函数 $R(Q)$ 的导数

$$R'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{R(Q+\Delta Q)-R(Q)}{\Delta Q}$$

称为边际收益函数。

设 P 为价格，$P=P(Q)$，因此

$$R(Q)=PQ=Q\cdot P(Q),$$

$$R'(Q)=P(Q)+QP'(Q)$$

例 3 设某产品的需求函数为 $P = 20 - \frac{Q}{5}$，其中 P 为价格，Q 为销售量，求销售量为 15 个单位时的总收益，平均收益与边际收益．并求销售量从 15 个单位增加到 20 个单位时收益的平均变化率．

解: 总收益为 $R = QP(Q) = 20Q - \frac{Q^2}{5}$

销售15个单位时，总收益

$$R\big|_{Q=15} = \left.\left(20Q - \frac{Q^2}{5}\right)\right|_{Q=15} = 255$$

平均收益 $\bar{R}\big|_{Q=15} = \left.\frac{R(Q)}{Q}\right|_{Q=15} = \frac{255}{15} = 17$