

河南省周口市扶沟高级中学 2025 届高三下学期第六次检测数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

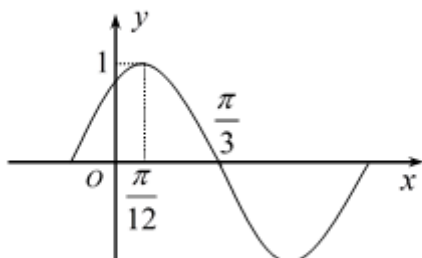
1. 已知随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

则 $E(2X+a) = (\quad)$

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{23}{6}$

2. 下图所示函数图象经过何种变换可以得到 $y = \sin 2x$ 的图象 ($\quad$)



- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ， A, B 是抛物线上两个不同的点，若 $|AF| + |BF| = 8$ ，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ($\quad$)

- A. 5 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

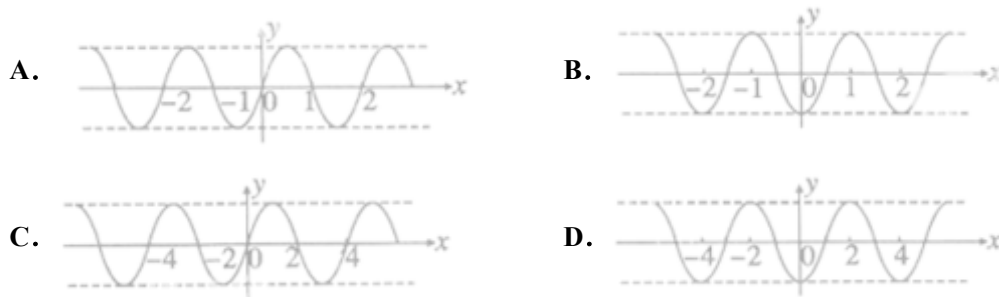
4. 若函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + b$ 在 $x = 1$ 处取得极值 2，则 $a - b = (\quad)$

- A. -3 B. 3 C. -2 D. 2

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x + 3, & x \leq 0 \\ 2^x + \log_9 x^2 - 9, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为 ()

- A. $\left(3, \frac{7}{2}\right)$ B. $(-1, 0)$ C. $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ D. $(4, 5)$

6. 设函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(-x) = f(x), f(x+2) = f(x)$, 则 $y = f(x)$ 的图像可能是



7. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2(a_3 + a_5 + a_7) + 3(a_8 + a_{12}) = 66$, 则 $S_{14} =$

- A. 56 B. 66
C. 77 D. 78

8. 已知函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $f(1) = 1$, 且 $f'(x) < 1$, 则不等式 $f(\lg^2 x) < \lg^2 x$ 的解集为 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ B. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ C. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ D. $(10, +\infty)$

9. $\frac{2+3i}{1-i} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ C. $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$ D. $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a + 2c = 2b \cos A$, 则角 B 的大小为 ()

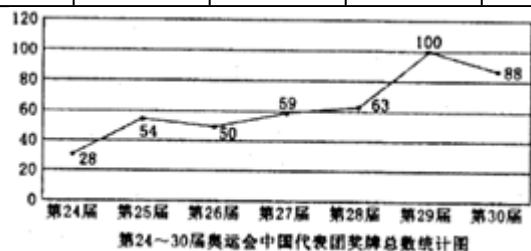
- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

11. 我国著名数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界瞩目的成就, 哥德巴赫猜想内容是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和” (注: 如果一个大于 1 的整数除了 1 和自身外无其他正因数, 则称这个整数为素数), 在不超过 15 的素数中, 随机选取 2 个不同的素数 a, b , 则 $|a-b| < 3$ 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

12. 下图是我国第 24~30 届奥运奖牌数的回眸和中国代表团奖牌总数统计图, 根据表和统计图, 以下描述正确的是 ().

	金牌 (块)	银牌 (块)	铜牌 (块)	奖牌 总数
24	5	11	12	28
25	16	22	12	54
26	16	22	12	50
27	28	16	15	59
28	32	17	14	63
29	51	21	28	100
30	38	27	23	88



- A. 中国代表团的奥运奖牌总数一直保持上升趋势
- B. 折线统计图中的六条线段只是为了便于观察图象所反映的变化，不具有实际意义
- C. 第30届与第29届北京奥运会相比，奥运金牌数、银牌数、铜牌数都有所下降
- D. 统计图中前六届奥运会中国代表团的奥运奖牌总数的中位数是54.5

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中,点 P 在曲线 $C: y = x^3 - 10x + 3$ 上,且在第四象限内. 已知曲线 C 在点 P 处的切线为 $y = 2x + b$, 则实数 b 的值为_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{BC}$ ($\lambda > 1$), 若角 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$, 则实数 λ 的值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[\pi, 2\pi)$ 上的值小于 0 恒成立, 则 ω 的取值范围是_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 直线 $l: x = 4a$ 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点.

若 $\triangle OAB$ (点 O 为坐标原点) 的面积为 32, 且双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1 + a_5 = \frac{17}{2}$, $a_2 a_4 = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = na_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分) 金秋九月, 丹桂飘香, 某高校迎来了一大批优秀的学生. 新生接待其实也是和社会沟通的一个平台. 校团委、学生会从在校学生中随机抽取了 160 名学生, 对是否愿意投入到新生接待工作进行了问卷调查, 统计数据如下:

	愿意	不愿意
男生	60	20
女士	40	40

(1) 根据上表说明, 能否有 99% 把握认为愿意参加新生接待工作与性别有关;

(2) 现从参与问卷调查且愿意参加新生接待工作的学生中, 采用按性别分层抽样的方法, 选取 10 人. 若从这 10 人中随机选取 3 人到火车站迎接新生, 设选取的 3 人中女生人数为 X , 写出 X 的分布列, 并求 $E(X)$.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.01	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \varphi \\ y = |\sin \varphi| \end{cases}$ (φ 为参数). 在以坐标原点为极点, x

轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 3$.

(1) 求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;

(2) 求曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最大值与最小值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x - a\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) x \in (0, +\infty)$.

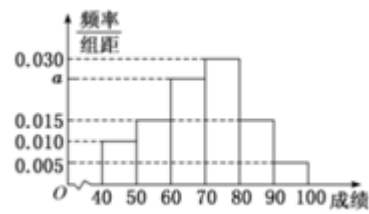
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 曲线 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 $3(e^2 - 1)$.

(i) 求 a ;

(ii) 若 $(x-k)f'(x) \geq -(x+1)^2$ ，求整数 k 的最大值.

21. (12 分) 在某外国语学校举行的 *HIMCM* (高中生数学建模大赛) 中, 参与大赛的女生与男生人数之比为 1:3, 且成绩分布在 $[40, 100]$, 分数在 80 以上(含 80) 的同学获奖. 按女生、男生用分层抽样的方法抽取 200 人的成绩作为样本, 得到成绩的频率分布直方图如图所示.



(I) 求 a 的值, 并计算所抽取样本的平均值 $\bar{x}$ (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(II) 填写下面的 2×2 列联表, 并判断在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下能否认为“获奖与女生、男生有关”.

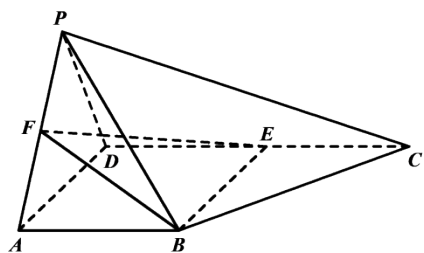
	女生	男生	总计
获奖	5		
不获奖			
总计			200

附表及公式:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

其中 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

22. (10 分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = AB = \frac{1}{2}CD$, $\angle DAB = 60^\circ$, 点 E, F 分别为 CD, AP 的中点.



(1) 证明: $PC \parallel$ 面 BEF ;

(2) 若 $PA \perp PD$, 且 $PA = PD$, 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 求二面角 $F - BE - A$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

利用分布列求出 a , 求出期望 $E(X)$, 再利用期望的性质可求得结果.

【详解】

由分布列的性质可得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a = 1$, 得 $a = \frac{1}{6}$, 所以, $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$,

因此, $E(2X + a) = E\left(2X + \frac{1}{6}\right) = 2E(X) + \frac{1}{6} = 2 \times \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查离散型随机变量的分布列以及期望的求法, 是基本知识的考查.

2、D

【解析】

根据函数图像得到函数的一个解析式为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 再根据平移法则得到答案.

【详解】

设函数解析式为 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b$,

根据图像: $A = 1, b = 0$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 故 $T = \pi$, 即 $\omega = 2$,

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{取 } k = 0, \quad \text{得到 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

函数向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y = \sin 2x$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了根据函数图像求函数解析式, 三角函数平移, 意在考查学生对于三角函数知识的综合应用.

3、D

【解析】

由抛物线方程可得焦点坐标及准线方程, 由抛物线的定义可知 $|AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = 8$, 继而可求出

$x_1 + x_2 = 4$, 从而可求出 AB 的中点的横坐标, 即为中点到 y 轴的距离.

【详解】

解: 由抛物线方程可知, $2p = 8$, 即 $p = 4$, $\therefore F(2, 0)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

则 $|AF| = x_1 + 2, |BF| = x_2 + 2$, 即 $|AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = 8$, 所以 $x_1 + x_2 = 4$.

所以线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义, 考查了抛物线的方程. 本题的关键是由抛物线的定义求得 A, B 两点横坐标的和.

4、A

【解析】

对函数 $f(x)$ 求导, 可得 $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases}$, 即可求出 a, b , 进而可求出答案.

【详解】

因为 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + b$, 所以 $f'(x) = 3ax^2 + 6x$, 则 $\begin{cases} f'(1) = 3a + 6 = 0 \\ f(1) = a + 3 + b = 2 \end{cases}$, 解得 $a = -2, b = 1$, 则 $a - b = -3$.

故选:A.

【点睛】

本题考查了函数的导数与极值, 考查了学生的运算求解能力, 属于基础题.

5、A

【解析】

首先求得 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的取值范围. 然后求得 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的单调性和零点, 令 $f(f(x)) = 0$, 根据“ $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的取值范围”得到 $f(x) = 2^x + \log_3 x - 9 = 3$, 利用零点存在性定理, 求得函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间.

【详解】

当 $x \leq 0$ 时, $3 < f(x) \leq 4$.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + \log_3 x^2 - 9 = 2^x + \log_3 x - 9$ 为增函数, 且 $f(3) = 0$, 则 $x = 3$ 是 $f(x)$ 唯一零点. 由于“当 $x \leq 0$ 时, $3 < f(x) \leq 4$.”, 所以

令 $f(f(x)) = 0$, 得 $f(x) = 2^x + \log_3 x - 9 = 3$, 因为 $f(3) = 0 < 3$,

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = 8\sqrt{2} + \log_3 \frac{7}{2} - 9 > 8 \times 1.414 + \log_3 3 - 9 = 3.312 > 3,$$

所以函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为 $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查分段函数的性质, 考查符合函数零点, 考查零点存在性定理, 考查函数的单调性, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

6、B

【解析】

根据题意, 确定函数 $y = f(x)$ 的性质, 再判断哪一个图像具有这些性质.

由 $f(-x) = f(x)$ 得 $y = f(x)$ 是偶函数, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 可知 B, D 符合; 由 $f(x+2) = f(x)$ 得 $y = f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 选项 D 的图像的最小正周期是 4, 不符合, 选项 B 的图像的最小正周期是 2, 符合, 故选 B.

7、C

【解析】

根据等差数列的性质可得 $2(a_3 + a_5 + a_7) + 3(a_8 + a_{12}) = 6a_5 + 6a_{10} = 66$, 即 $a_5 + a_{10} = 11$,

$$\text{所以 } S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 7(a_5 + a_{10}) = 77, \text{ 故选 C.}$$

8、B

【解析】

构造函数 $g(x) = f(x) - x$, 利用导数研究函数的单调性, 即可得到结论.

【详解】

设 $g(x) = f(x) - x$, 则函数的导数 $g'(x) = f'(x) - 1$, $\because f'(x) < 1$, $\therefore g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 为减函数, $\because f(1) = 1$,

$\therefore g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$, 则不等式 $g(x) < 0$ 等价于 $g(x) < g(1)$,

则不等式的解集为 $x > 1$, 即 $f(x) < x$ 的解为 $x > 1$, $\because f(\lg^2 x) < \lg^2 x$, 由 $\lg^2 x > 1$ 得 $\lg x > 1$ 或 $\lg x < -1$, 解得

$$x > 10 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{10},$$

故不等式的解集为 $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$. 故选: B.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数单调性, 根据函数的单调性解不等式, 考查学生分析问题解决问题的能力, 是难题.

9、A

【解析】

分子分母同乘 $1+i$, 即根据复数的除法法则求解即可.

【详解】

$$\text{解: } \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i,$$

故选: A

【点睛】

本题考查复数的除法运算, 属于基础题.

10、A

【解析】

先利用正弦定理将边统一化为角, 然后利用三角函数公式化简, 可求出解 B.

【详解】

由正弦定理可得 $\sin A + 2 \sin C = 2 \sin B \cos A$, 即 $\sin A + 2 \sin(A+B) = 2 \sin B \cos A$, 即有 $\sin A(1 + 2 \cos B) = 0$,

因为 $\sin A > 0$, 则 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 而 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$.

故选: A

【点睛】

此题考查了正弦定理和三角函数的恒等变形, 属于基础题.

【解析】

先列举出不超过15的素数，并列举出所有的基本事件以及事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，满足 $|a-b|<3$ ”所包含的基本事件，利用古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

不超过15的素数有：2、3、5、7、11、13，

在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数，所有的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(2,5)$ 、 $(2,7)$ 、 $f(x_1)-f(x_2)$ 、 $(2,13)$ 、 $(3,5)$ 、 $(3,7)$ 、 $(3,11)$ 、 $(3,13)$ 、 $(5,7)$ 、 $(5,11)$ 、 $(5,13)$ 、 $(7,11)$ 、 $(7,13)$ 、 $(11,13)$ ，共15种情况，

其中，事件“在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，且 $|a-b|<3$ ”包含的基本事件有： $(2,3)$ 、 $(3,5)$ 、 $(5,7)$ 、 $(11,13)$ ，共4种情况，

因此，所求事件的概率为 $P=\frac{4}{15}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查古典概型概率的计算，一般利用列举法列举出基本事件，考查计算能力，属于基础题.

12、B

【解析】

根据表格和折线统计图逐一判断即可.

【详解】

A.中国代表团的奥运奖牌总数不是一直保持上升趋势，29届最多，错误；

B.折线统计图中的六条线段只是为了便于观察图象所反映的变化，不表示某种意思，正确；

C.30届与第29届北京奥运会相比，奥运金牌数、铜牌数有所下降，银牌数有所上升，错误；

D. 统计图中前六届奥运会中国代表团的奥运奖牌总数按照顺序排列的中位数为 $\frac{54+59}{2}=56.5$,不正确；

故选：B

【点睛】

此题考查统计图，关键点读懂折线图，属于简单题目.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、-13

【解析】

先设切点 $P(x_0, y_0)$ ，然后对 $y=x^3-10x+3$ 求导，根据切线方程的斜率求出切点的横坐标 x_0

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/526145225044011044>