2024届北京市东城区市级名校高考适应性考试数学试卷

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$M=\{x\,|\,x^2=1\}$．N为自然数集，则下列表示不正确的是（　　）

A．$1\in M$　　B．$M=\{-1,1\}$　　C．$\varnothing\subseteq M$　　D．$M\subseteq N$

2．已知条件$p:a=-1$，条件q：直线$x-ay+1=0$与直线$x+a^2y-1=0$平行，则p是q的(　　)

A．充要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分不必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，设其前n项和S_n，若$a_na_{n+1}=4^n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则$S_5=$（　　）

A．30　　B．$31\sqrt{2}$　　C．$15\sqrt{2}$　　D．62

4．在ΔABC中，$AB=2$，$AC=3$，$\angle A=60°$，O为ΔABC的外心，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$x$，$y\in R$，则$2x+3y=$（　　）

A．2　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

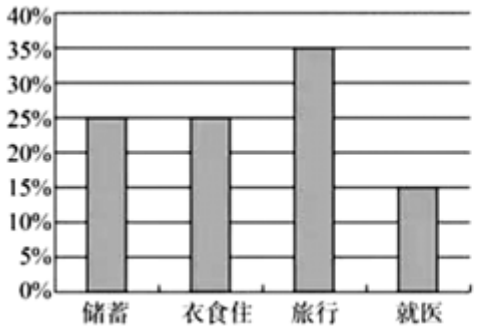
5．设$a=\log_8 0.2,b=\log_{0.3}4,c=4^{0.3}$，则（　　）

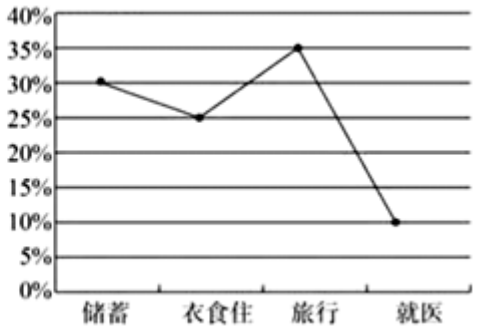
A．$c<b<a$　　B．$a<b<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<a<c$

6．已知集合$A=\{x\in N\,|\,y=\sqrt{4-x}\},B=\{x\,|\,x=2n,n\in Z\}$,则$A\cap B=$（　　）

A．$[0,4]$　　B．$\{0,2,4\}$　　C．$\{2,4\}$　　D．$[2,4]$

7．若干年前，某教师刚退休的月退休金为6000元，月退休金各种用途占比统计图如下面的条形图.该教师退休后加强了体育锻炼，目前月退休金的各种用途占比统计图如下面的折线图.已知目前的月就医费比刚退休时少100元，则目前该教师的月退休金为（　　）．





A．6500 元　　B．7000 元　　C．7500 元　　D．8000 元

8．已知三棱柱

$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的球面上.若$AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，则球O的半径为**( )**

A． $\frac{3\sqrt{17}}{2}$　　**B．** $2\sqrt{10}$　　**C．** $\frac{13}{2}$　　**D．** $3\sqrt{10}$

9．曲线 $x^2=4y$ **在点** $(2,t)$ **处的切线方程为（　　）**

A． $y=x-1$　　**B．** $y=2x-3$　　**C．** $y=-x+3$　　**D．** $y=-2x+5$

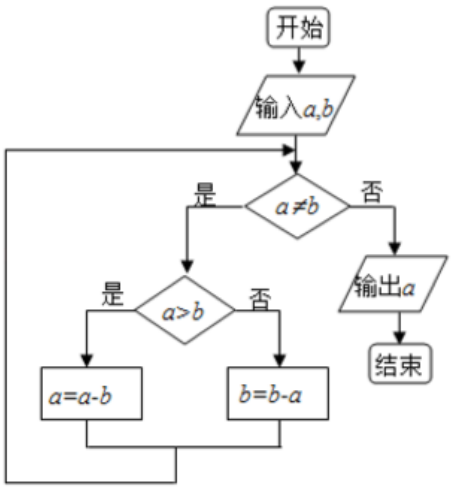
10．设 i 是虚数单位，则 $(2+3i)(3-2i)=$（　　）

A． $12+5i$　　**B．** $6-6i$　　**C．** $5i$　　**D．** 13

11．集合 $\left\{x\in N^*\mid\frac{12}{x}\in Z\right\}$ **中含有的元素个数为（ ）**

A．4　　B．6　　C．8　　D．12

12．如下的程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”．执行该程序框图，若输入的 *a*，*b* 分别为 176，320，则输出的 *a* 为（　　）



A．16　　B．18　　C．20　　D．15

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $y=g(x)$ 函数的图象，则函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的最大值为_____.

14．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x^3>8$”是“$x>2$”的_____条件.

15．已知实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\le\sqrt{1-x^2}, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的取值范围是_____.

16．设实数 x，y 满足 $\begin{cases} xy\le 2 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2x \end{cases}$，则点 $P(x,y)$ 表示的区域面积为_____.

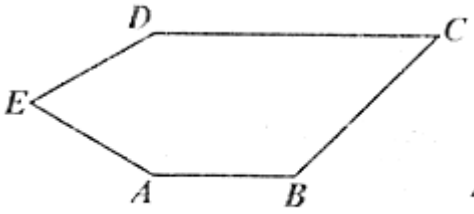
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知矩阵 $M=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 M 的特征值及其相应的特征向量.

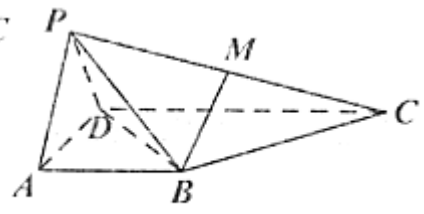
18．（12 分）如图（1）五边形 $ABCDE$ 中，$ED=EA, AB//CD, CD=2AB,$ $\angle EDC=150^\circ$,将 ΔEAD 沿 AD 折到 ΔPAD 的位置，得到四棱锥 $P-ABCD$，如图（2），点 M 为线段 PC 的中点，且 $BM\perp$ 平面 PCD.

（1）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若直线 PC AB 与所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$，求直线 BM 与平面 PDB 所成角的正弦值.



图（1）



图（2）

19．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，将曲线 $C_1:\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）通过伸缩变换 $\begin{cases} x'=2x \\ y'=y \end{cases}$，得到曲线 C_2，设直线 $l:\begin{cases} x=2+t\cos\alpha \\ y=\sqrt{3}+t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数)与曲线 C_2 相交于不同两点 A，B.

（1）若 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，求线段 AB 的中点 M 的坐标；

（2）设点 $P\left(2,\sqrt{3}\right)$，若 $|PA|\cdot|PB|=|OP|^2$，求直线 l 的斜率.

20．（12 分）已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}$.

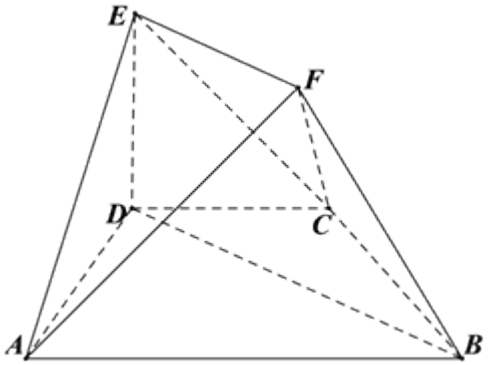
（1）讨论 $f(x)$ 的零点个数；

（2）证明：当$0<a\le\frac{e}{2}$时，$f(x)>\frac{e^{1-x}}{2}$.

21.（12 分）如图，在四边形 *ABCD* 中，*AB*//*CD*，∠*ABD*=30°，*AB*＝2*CD*＝2*AD*＝2，*DE*⊥平面 *ABCD*，*EF*//*BD*，且 *BD*＝2*EF*.

（Ⅰ）求证：平面 *ADE*⊥平面 *BDEF*；

（Ⅱ）若二面角 *C*－*BF*－*D* 的大小为 60°，求 *CF* 与平面 *ABCD* 所成角的正弦值.



22.（10 分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，$g(x)=b-x\ln x$的最大值为$\frac{1}{e}$.

(1)求实数 *b* 的值；

(2)当$a>1$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

(3)当$a=0$时，令$F(x)=2f(x)+g(x)+2\ln x+2$，是否存在区间$[m,n]\subseteq(1,\ +\infty)$，使得函数$F(x)$在区间$[m,n]$上的值域为$[k(m+2),k(n+2)]$？若存在，求实数 *k* 的取值范围；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

集合$M=\{x\,|\,x^2=1\}=\{-1,1\}$．$N$为自然数集，由此能求出结果.

【详解】

解：集合$M=\{x\,|\,x^2=1\}=\{-1,1\}$．$N$为自然数集，

在A中，$1\in M$，正确；

在B中，$M=\{-1,1\}$，正确；

在C中，$\varnothing\subseteq M$，正确；

在D中，M不是N的子集，故D错误．

故选：D．

【点睛】

本题考查命题真假的判断、元素与集合的关系、集合与集合的关系等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

2、C

【解析】

先根据直线$x-ay+1=0$与直线$x+a^2y-1=0$平行确定a的值，进而即可确定结果．

【详解】

因为直线$x-ay+1=0$与直线$x+a^2y-1=0$平行，

所以$a^2+a=0$，解得$a=0$或$a=-1$；即q：$a=0$或$a=-1$；

所以由p能推出q；q不能推出p；

即p是q的充分不必要条件．

故选C

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判定，熟记概念即可，属于基础题型．

3、B

【解析】

根据$a_na_{n+1}=4^n$，分别令$n=1,2$，结合等比数列的通项公式，得到关于首项和公比的方程组，解方程组求出首项和公式，最后利用等比数列前*n*项和公式进行求解即可．

【详解】

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意可知中：$a_1>0,q>0$.由$a_na_{n+1}=4^n$，分别令$n=1,2$，可得$a_1a_2=4$、$a_2a_3=16$，由等比数列的通项公式可得：$\begin{cases}a_1\cdot a_1\cdot q=4\\a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\sqrt{2}\\q=2\end{cases}$，

因此$S_5=\dfrac{\sqrt{2}(1-2^5)}{1-2}=31\sqrt{2}$.

故选：B

【点睛】

本题考查了等比数列的通项公式和前 *n* 项和公式的应用，考查了数学运算能力.

4、B

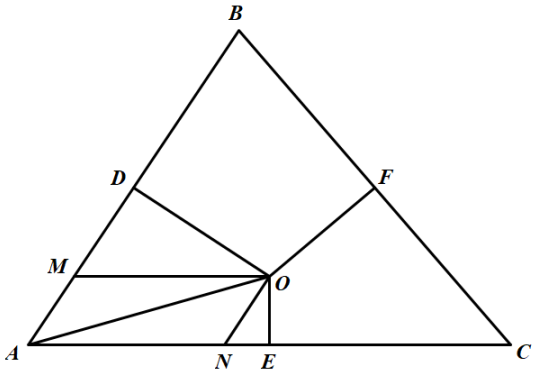
【解析】

首先根据题中条件和三角形中几何关系求出 x， y，即可求出 $2x+3y$ 的值.

【详解】

如图所示过 O 做三角形三边的垂线，垂足分别为 D， E， F，

过 O 分别做 AB， AC 的平行线 NO， MO，



由题知 $\cos 60^\circ = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \dfrac{9+4+BC^2}{12} \Rightarrow BC=\sqrt{7}$，

则外接圆半径 $r = \dfrac{BC}{2\cdot \sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$，

因为 $OD \perp AB$，所以 $OD = \sqrt{AO^2-AD^2} = \sqrt{\dfrac{21}{9}-1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

又因为 $\angle DMO = 60^\circ$，所以 $DM = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AM = \dfrac{1}{3}$， $MO = AN = \dfrac{4}{3}$，

由题可知 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$，

所以 $x = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{6}$， $y = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{9}$，

所以 $2x+3y = \dfrac{5}{3}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了三角形外心的性质，正弦定理，平面向量分解定理，属于一般题.

5、D

【解析】

结合指数函数及对数函数的单调性,可判断出$-1<a<0$,$b<-1$,$c>1$,即可选出答案.

【详解】

由$\log_{0.3}4<\log_{0.3}\frac{10}{3}=-1$,即$b<-1$,

又$-1=\log_8 0.125<\log_8 0.2<\log_8 1=0$,即$-1<a<0$,

$4^{0.3}>1$,即$c>1$,

所以$b<a<c$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了几个数的大小比较,考查了指数函数与对数函数的单调性的应用,属于基础题.

6、B

【解析】

计算$A=\{0,1,2,3,4\}$，再计算交集得到答案

【详解】

$A=\{x\in N\mid y=\sqrt{4-x}\}=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\{x\mid x=2n,n\in Z\}$表示偶数，

故$A\cap B=\{0,2,4\}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查了集合的交集，意在考查学生的计算能力.

7、D

【解析】

设目前该教师的退休金为*x*元，利用条形图和折线图列出方程，求出结果即可.

【详解】

设目前该教师的退休金为x元，则由题意得：6000×15%﹣x×10%＝1．解得x＝2.

故选D.

【点睛】

本题考查由条形图和折线图等基础知识解决实际问题，属于基础题.

8、C

【解析】

因为直三棱柱中，$AB=3$，$AC=4$，$AA_1=12$，$AB\perp AC$，所以 $BC=5$，且 BC 为过底面 ABC 的截面圆的直径．取 BC 中点 D，则 $OD\perp$底面 ABC，则 O 在侧面 BCC_1B_1 内，矩形 BCC_1B_1 的对角线长即为球直径，所以 $2R=\sqrt{12^2+5^2}=13$，即 $R=\frac{13}{2}$

9、A

【解析】

将点代入解析式确定参数值，结合导数的几何意义求得切线斜率，即可由点斜式求的切线方程.

【详解】

曲线 $x^2=4y$，即 $y=\frac{1}{4}x^2$，

当 $x=2$ 时，代入可得 $t=\frac{1}{4}\times 2^2=1$，所以切点坐标为 $(2,1)$，

求得导函数可得 $y'=\frac{1}{2}x$，

由导数几何意义可知 $k=y'=\frac{1}{2}\times 2=1$，

由点斜式可得切线方程为 $y-1=x-2$，即 $y=x-1$，

故选：A.

【点睛】

本题考查了导数的几何意义，在曲线上一点的切线方程求法，属于基础题.

10、A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2+3i)(3-2i)=6+5i-6i^2=12+5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

11、B

【解析】

解：因为$\left\{x\in N^{*}\mid \frac{12}{x}\in Z\right\}$集合中的元素表示的是被 12 整除的正整数，那么可得为 1，2,3,4，6，,12 故选 B

12、A

【解析】

根据题意可知最后计算的结果为a，b的最大公约数.

【详解】

输入的 a，b 分别为$176,320$,根据流程图可知最后计算的结果为a，b的最大公约数，按流程图计算320-176=144，176-144=32,144-32=112,112-32=80,80-32=48,48-32=16,32-16=16,易得 176 和 320 的最大公约数为 16，

故选:A.

【点睛】

本题考查的是利用更相减损术求两个数的最大公约数,难度较易.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、$\frac{3}{4}$

【解析】

由三角函数图象相位变换后表达$g(x)$函数解析式，再利用三角恒等变换与辅助角公式整理$f(x)g(x)$的表达式，进而由三角函数值域求得最大值.

【详解】

将函数$f(x)=\sin x$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到$y=g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$函数的图象，

则$y=f(x)g(x)=\sin x\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\frac{1}{2}\sin^{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

所以，当$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$函数最大，最大值为$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

故答案为：$\frac{3}{4}$

【点睛】

本题考查表示三角函数图象平移后图象的解析式，还考查了利用三角恒等变换化简函数式并求最值，属于简单题.

14、充分必要

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义可判断两者之间的条件关系.

【详解】

当$x^3>8$时，有$x>2$，故“$x^3>8$”是“$x>2$”的充分条件.

当$x>2$时，有$x^3>8$，故“$x^3>8$”是“$x>2$”的必要条件.

故“$x^3>8$”是“$x>2$”的充分必要条件，

故答案为：充分必要.

【点睛】

本题考查充分必要条件的判断，可利用定义来判断，也可以根据两个条件构成命题及逆命题的真假来判断，还可以利用两个条件对应的集合的包含关系来判断，本题属于容易题.

15、$\left[-1,\sqrt{2}\right]$

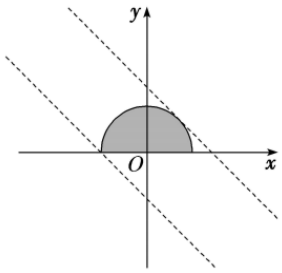
【解析】

根据约束条件画出可行域，即可由直线的平移方法求得$x+y$的取值范围.

【详解】

.

由题意，画出约束条件表示的平面区域如下图所示，



令$z=x+y$，则$y=-x+z$

如图所示，图中直线所示的两个位置为$y=-x+z$的临界位置，

根据几何关系可得$y=-x+z$与y轴的两个交点分别为$(0,-1),\left(0,\sqrt{2}\right)$，

所以$x+y$的取值范围为$\left[-1,\sqrt{2}\right]$.

故答案为：$\left[-1,\sqrt{2}\right]$

【点睛】

本题考查了非线性约束条件下线性规划的简单应用，由数形结合法求线性目标函数的取值范围，属于中档题.

16、$1+2\ln 2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/527004001062006060