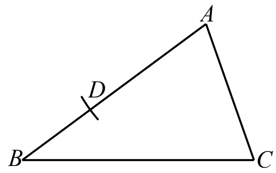
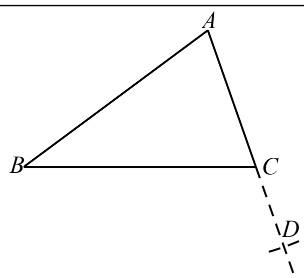
重难点08 全等三角形中“截长补短”模型

【知识梳理】

截长：即在一条较长的线段上截取一段较短的线段	 在线段 AB 上截取 $AD=AC$
补短：即在较短的线段上补一段线段使其和较长的线段相等	 延长 AC，使得 $AD=AB$

截长补短法是几何证明题中十分重要的方法，通常来证明几条线段的数量关系，常见做辅助线方法有：

截长法：

⑴过某一点作长边的垂线；

⑵在长边上截取一条与某一短边相同的线段，再证剩下的线段与另一短边相等。

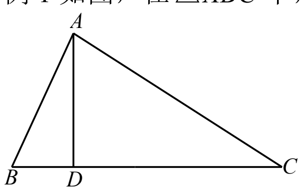
补短法：

⑴延长短边。

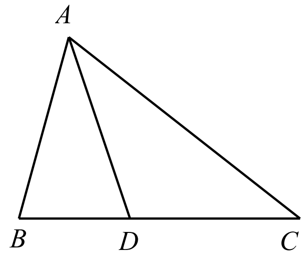
⑵通过旋转等方式使两短边拼合到一起，证与长边相等。

【考点剖析】

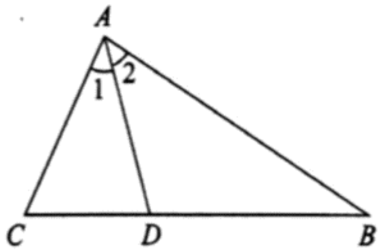
例 1 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$于 D，求证：$CD=BD+AB$．



例 2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，$\angle BAC$的平分线 AD 交 BC 于点 D．求证：$AB+BD=AC$．



【变式 1】如图，已知在△ABC 中，∠C=2∠B,∠1=∠2，求证：AB=AC+CD

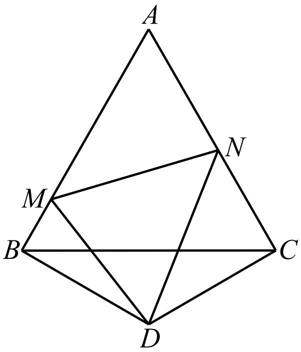


【变式 2】如图，AC 平分∠BAD，CE⊥AB 于点 E，∠B+∠D=180°，求证：AE=AD+BE.

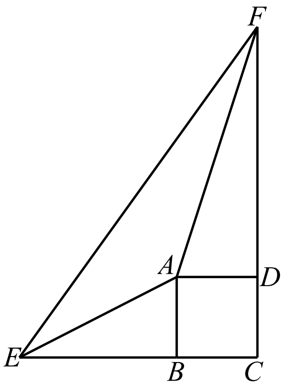
【变式 3】如图所示，AB∥CD,BE,CE 分别是∠ABC,∠BCD 的平分线，点 E 在 AD 上，求证：BC=AB+CD.

【变式4】如图，在△ABC中，∠B=60°，△ABC的角平分线AD、CE相交于点O，求证：AE+CE=AC.

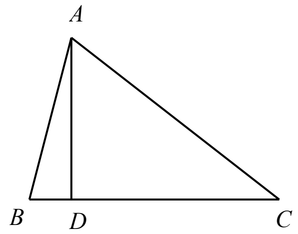
【变式5】如图，$\triangle ABC$是等边三角形，$\triangle BDC$是顶角$\angle BDC=120°$的等腰三角形，以D为顶点作一个$60°$角，角的两边分别交AB于M，交AC于N，连接MN，求证：$MN=BM+CN$．



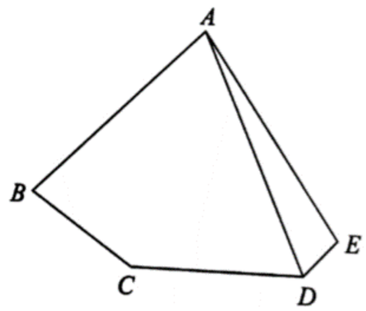
【变式6】已知四边形$ABCD$是正方形，E、F分别在CB、CD的延长线上，$\angle EAF=135°$．
求证：$BE+DF=EF$．



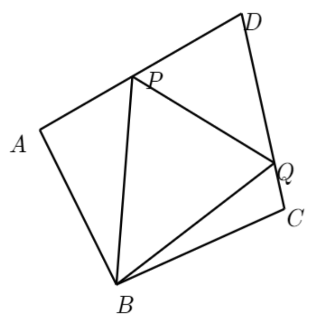
例 4．已知：在$\triangle ABC$中，$AB=CD-BD$，$AD\perp BC$，求证：$\angle B=2\angle C$．



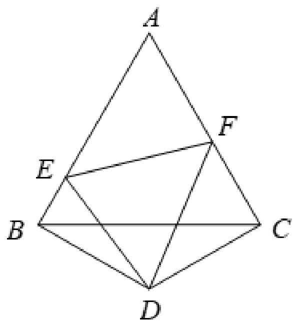
【变式 1】如图，在五边形 ABCDE 中，AB=AE,BC+DE=CD,∠B+∠E=180°，求证：AD 平分∠CDE.



【变式 2】已知四边形 ABCD 中，∠ABC+∠ADC=180°，AB=BC 如图 2，点 P,Q 分别在线段 AD,DC 上，满足 PQ=AP+CQ,求证：$\angle PBQ=90°-\frac{1}{2}\angle ADC$

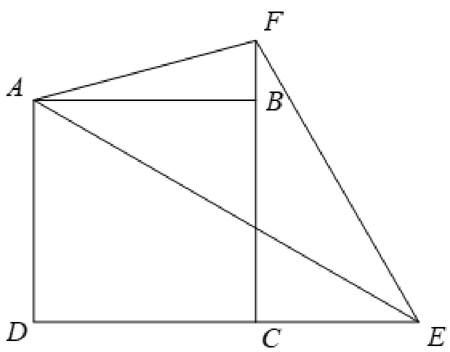


例 5.正三角形 ABC 中，E 在 AB 上，F 在 AC 上$\angle EDF=60°$，$DB=DC$，$\angle BDC=120°$，请问现在 EF、BE、CF 又有什么数量关系？



【变式 1】正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 CD 延长线上，点 F 在 BC 延长线上，$\angle EAF=45°$，请问现在 EF、DE、BF 又有什么数量关系？

【变式 2】正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 DC 延长线上，点 F 在 CB 延长线上，$\angle EAF=45°$，请问现在 EF、DE、BF 又有什么数量关系？

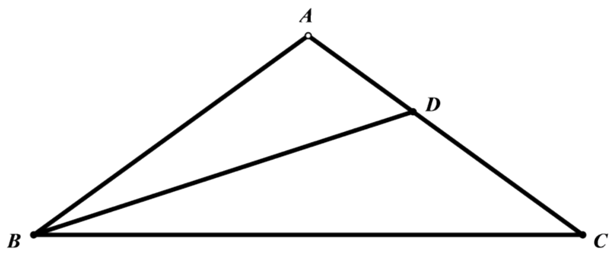


【过关检测】

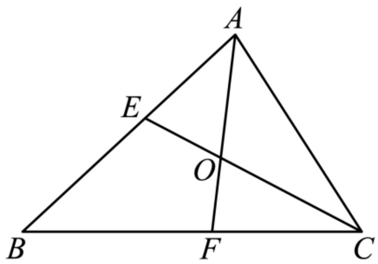
一、解答题

1．（2022 秋·全国·八年级专题练习）如图，已知△ABC 中，AB=AC，∠A=108°，BD 平分∠ABC．

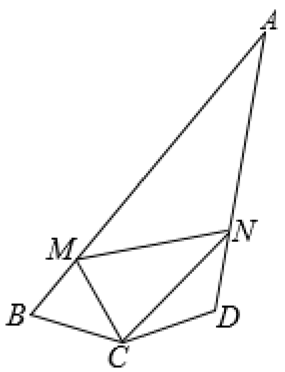
求证：BC=AB+CD．



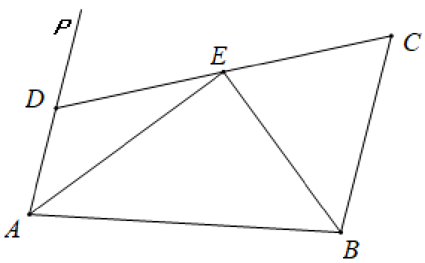
2．（2022 秋·浙江·八年级专题练习）如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle B$=60°，CE 、AF 是$\triangle ABC$ 的角平分线，交于点 O 求证：$AC = AE + CF$ ．



3．（2023·全国·八年级假期作业）如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B + \angle D = 180°$，$\angle BCD = 150°$，$CB = CD$，$M$、$N$ 分别为 AB、AD 上的动点，且$\angle MCN = 75°$．求证：$MN = BM + DN$．



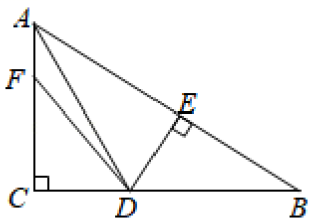
4．（2022秋·浙江·八年级专题练习）如图，已知 $AD\parallel BC$，$\angle PAB$ 的平分线与 $\angle CBA$ 的平分线相交于 E，CE 的连线交 AP 于 D．求证：$AD+BC=AB$．



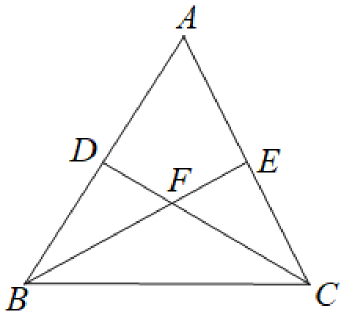
5．（2022秋·八年级课时练习）如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，交 BC 于点 D，过 D 作 $DE\perp BA$ 于点 E，点 F 在 AC 上，且 $BD=DF$．

（1）求证：$AC=AE$；

（2）若 $AB=7.4$，$AF=1.4$，求线段 BE 的长．



6．（2022秋·全国·八年级专题练习）如图，ΔABC中，BE，CD分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$，BE，CD相交于点F，$\angle A=60^{\circ}$．



（1）求$\angle BFD$的度数;

（2）判断BC，BD，CE之间的等量关系，并证明你的结论．

7．（2023·浙江·八年级假期作业）如图①，$\triangle ABC$和$\triangle BDC$是等腰三角形，且$AB=AC$，$BD=CD$，$\angle BAC=80^{\circ}$，$\angle BDC=100^{\circ}$，以D为顶点作一个50°角，角的两边分别交边AB，AC于点E、F，连接EF．

（1）探究 BE 、 EF 、 FC 之间的关系，并说明理由；

（2）若点 E 、 F 分别在 AB 、CA 延长线上，其他条件不变，如图②所示，则 BE 、 EF 、 FC 之间存在什么样的关系？并说明理由．

8．（2022 秋·全国·八年级专题练习）在VABC 中，AE，CD 为VABC 的角平分线，AE，CD 交于点 F．

（1）如图 1，若 $\angle B$=60°．

①直接写出 $\angle AFC$ 的大小；

②求证：$AC = AD + CE$．

（2）若图 2，若Đ$B = 90°$，求证：$S_{\triangle ACF} = S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CEF} + S_{\triangle DEF}$．

9．（2023·全国·九年级专题练习）（1）如图1，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，E、F分别是边BC、CD上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，线段$EF$、$BE$、$FD$之间的关系是_；（不需要证明）

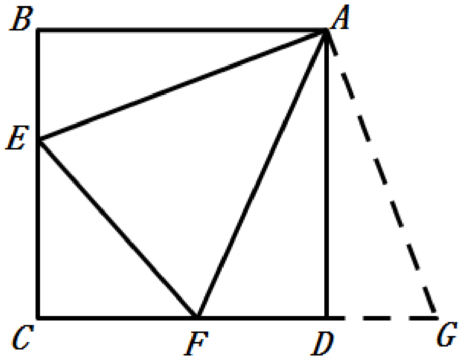
（2）如图2，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F分别是边BC、CD上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明．若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明．

（3）如图3，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F分别是边BC、CD延长线上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明．若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明．

10．（2023·全国·九年级专题练习）通过类比联想、引申拓展典型题目，可达到解一题知一类的目的．下面是一个案例，请补充完整．

【解决问题】

如图，点 E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，$\angle EAF=45^\circ$，连接 EF，则 $EF=BE+DF$，试说明理由.



证明：延长 CD 到 G，使 $DG=BE$，

在$\vee ABE$与$\triangle ADG$中，

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle B=\angle ADG=90^\circ\\ BE=DG\end{cases}$$

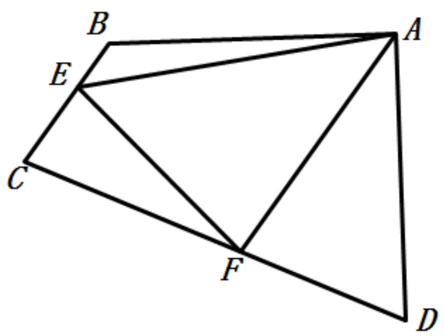
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADG$ 理由：（SAS）

进而证出：$\triangle AFE\cong$___________，理由：（__________）

进而得 $EF=BE+DF$．

【变式探究】

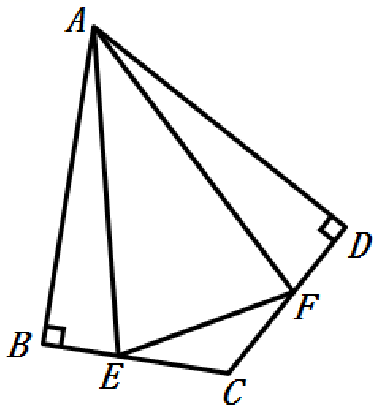
如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$ 点 E、F 分别在边 BC、CD 上，$\angle EAF=45^\circ$．若$\angle B$、$\angle D$ 都不是直角，则当$\angle B$与$\angle D$满足等量关系______________时，仍有 $EF=BE+DF$．请证明你的猜想.



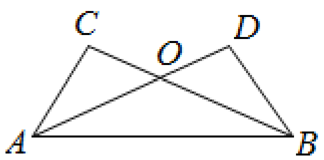
【拓展延伸】

如图，若 $AB=AD$，$\angle BAD\neq 90^\circ$，$\angle EAF\neq 45^\circ$，但$\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，连接 EF，请直接写出

EF、BE、DF之间的数量关系．



11．（2023·江苏·八年级假期作业）如图，$\angle CAB+\angle ABD=120^{\circ}$，$AD$、$BC$分别平分$\angle CAB$、$\angle ABD$，$AD$与$BC$交于点$O$．

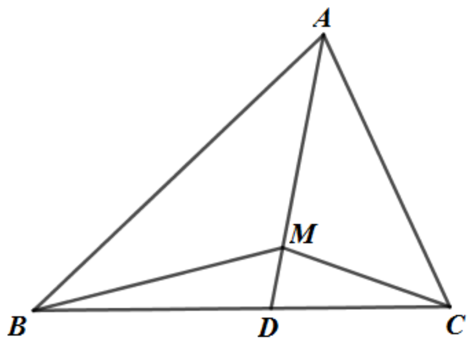


（1）求$\angle AOB$的度数；

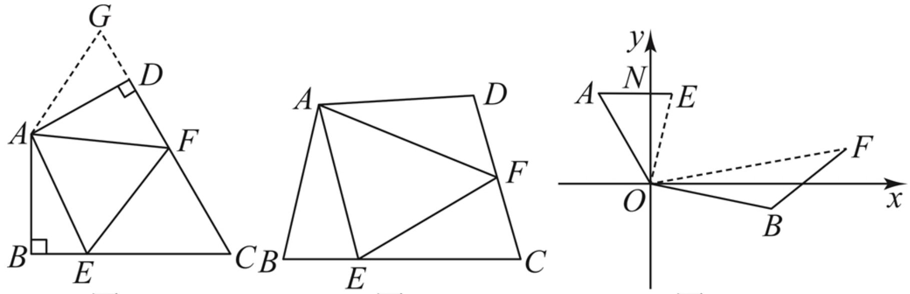
（2）说明$AB=AC+BD$的理由．

12．（2022秋·浙江·八年级专题练习）如图所示，已知$\triangle ABC$中$AB>AC$，AD是$\angle BAC$的平分线，M是AD

上任意一点，求证：$MB-MC<AB-AC$.



13．（2023秋·山西朔州·八年级校考期末）（1）问题背景：如图①：在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle BAD=120^\circ$，$\angle B=\angle ADC=90^\circ$．$E$、$F$分别是$BC$、$CD$上的点且$\angle EAF=60^\circ$．探究图中线段$BE$、$EF$、$FD$之间的数量关系．小明同学探究此问题的方法是：延长$FD$到点$G$，使$DG=BE$．连接$AG$，先证明$\triangle ABE\cong\triangle ADG$，再证明$\triangle AEF\cong\triangle AGF$，可得出结论，他的结论应是__________；



（2）探索延伸：如图②，若在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180^\circ$．$E,F$分别是$BC$、$CD$上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，上述结论是否仍然成立？说明理由；

（3）实际应用：如图③，在某次军事演习中，舰艇甲在指挥中心（O处）北偏西30°的A处，舰艇乙在指挥中心南偏东70°的B处，并且两舰艇到指挥中心的距离相等，接到行动指令后，舰艇甲向正东方向以60海里/小时的速度前进，舰艇乙沿北偏东50°的方向以80海里/小时的速度前进2小时后，甲、乙两舰艇分别到达E,F处，此时在指挥中心观测到两舰艇之间的夹角为70°，试求此时两舰艇之间的距离．

14．（2023 春·全国·七年级专题练习）本学期，我们学习了三角形相关知识，而四边形的学习，我们一般通过辅助线把四边形转化为三角形，通过三角形的基本性质和全等来解决一些问题．

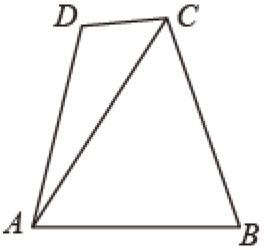


图1

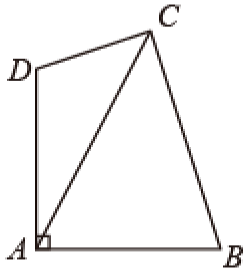


图2

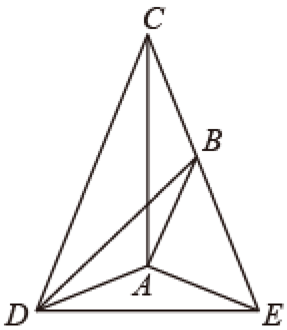


图3

（1）如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle B+\angle D=180°$ ，连接 AC ．

①小明发现，此时 AC 平分 $\angle BCD$ ．他通过观察、实验，提出以下想法：延长 CB 到点 E ，使得 $BE=CD$ ，连接 AE ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ ，从而利用全等和等腰三角形的性质可以证明 AC 平分 $\angle BCD$ ．请你参考小明的想法，写出完整的证明过程．

②如图 2，当 $\angle BAD=90°$ 时，请你判断线段 AC ， BC ， CD 之间的数量关系，并证明．

（2）如图 3，等腰VCDE 、等腰 $\triangle ABD$ 的顶点分别为A 、 C ，点 B 在线段 CE 上，且 $\angle ABC+\angle ADC=180°$ ，请你判断 $\angle DAE$ 与 $\angle DBE$ 的数量关系，并证明．

15．（2022秋·全国·八年级期末）（1）阅读理解：问题：如图1，在四边形$ABCD$中，对角线BD平分

$\angle ABC$，$\angle A+\angle C=180°$．求证：$DA=DC$．

思考："角平分线+对角互补"可以通过"截长、补短"等构造全等去解决问题．

方法 1：在 BC 上截取 $BM=BA$，连接 DM，得到全等三角形，进而解决问题；

方法 2：延长 BA 到点 N，使得 $BN=BC$，连接 DN，得到全等三角形，进而解决问题．

结合图 1，在方法 1 和方法 2 中任选一种，添加辅助线并完成证明．

（2）问题解决：如图 2，在（1）的条件下，连接 AC，当 $\angle DAC=60°$ 时，探究线段 AB，BC，BD 之间的数量关系，并说明理由；

（3）问题拓展：如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle C=180°$，$DA=DC$，过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为点 E，请直接写出线段 AB、CE、BC 之间的数量关系．

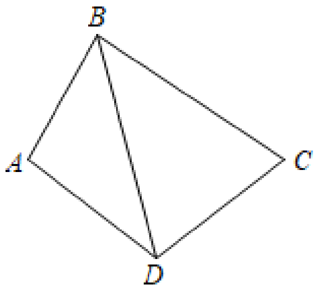


图1

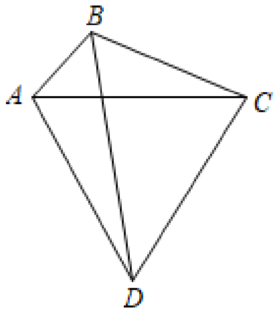


图2

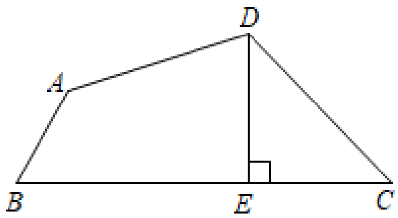


图3

16．（2022 秋·江苏·八年级专题练习）如图，△ABC 中，AB=AC，∠EAF=$\frac{1}{2}\angle BAC$，BF⊥AE 于 E 交 AF 于点

F，连结 CF.

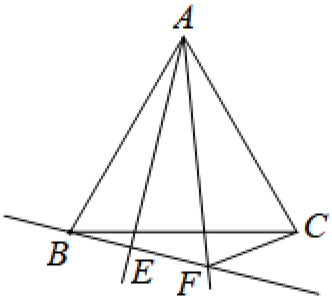


图1

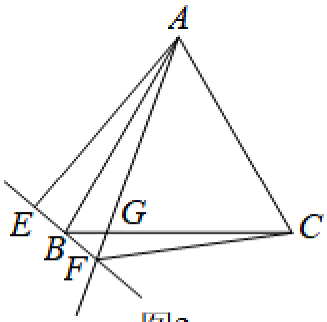


图2

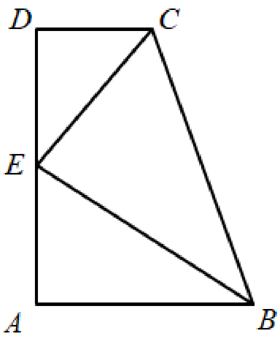
（1）如图 1 所示，当$\angle EAF$ 在$\angle BAC$ 内部时，求证：$EF=BE+CF$.

（2）如图 2 所示，当$\angle EAF$ 的边 AE、AF 分别在$\angle BAC$ 外部、内部时，求证：$CF=BF+2BE$.

17.（2022 秋·八年级课时练习）如图所示，$AB//DC$，$AB\perp AD$，BE 平分$\angle ABC$，CE 平分$\angle BCD$；

（1）求 AB、CD 与 BC 的数量关系，并说明你的理由.

（2）若把 $AB\perp AD$ 条件去掉，则（1）中 AB、CD 与 BC 的数量关系还成立吗?并说明你的理由.



18．（2022秋·江苏·八年级专题练习）已知在四边形ABCD中，∠ABC＋∠ADC＝180°，∠BAD＋∠BCD＝180°，AB＝BC

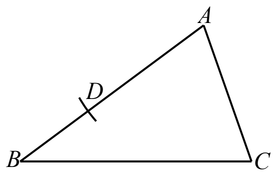
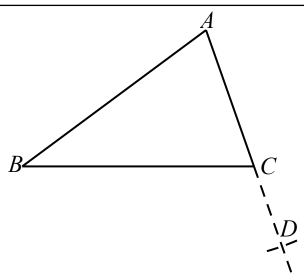
（1）如图1，连接BD，若∠BAD＝90°，AD＝7，求DC的长度.

（2）如图2，点P、Q分别在线段AD、DC上，满足PQ＝AP＋CQ，求证：∠PBQ＝∠ABP＋∠QBC

（3）若点Q在DC的延长线上，点P在DA的延长线上，如图3所示，仍然满足PQ＝AP＋CQ，请写出∠PBQ与∠ADC的数量关系，并给出证明过程.

重难点 08 全等三角形中“截长补短”模型

【知识梳理】

截长：即在一条较长的线段上截取一段较短的线段	 在线段 AB 上截取 $AD=AC$
补短：即在较短的线段上补一段线段使其和较长的线段相等	 延长 AC，使得 $AD=AB$

截长补短法是几何证明题中十分重要的方法，通常来证明几条线段的数量关系，常见做辅助线方法有：

截长法：

(1)过某一点作长边的垂线；

(2)在长边上截取一条与某一短边相同的线段，再证剩下的线段与另一短边相等。

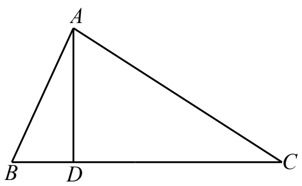
补短法：

(1)延长短边。

(2)通过旋转等方式使两短边拼合到一起，证与长边相等。

【考点剖析】

例 1 如图，在△ABC 中，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于 D，求证：$CD=BD+AB$．



解法一：（截长）在 CD 上截取 $DE=BD$，连接 AE，

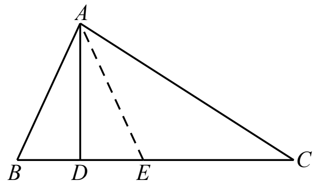
$\because AD\perp BC$，$\therefore \angle ADB=\angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$,

∴ $AE=AB$， $\angle AEB=\angle B=2\angle C$，

∴ $\angle CAE=\angle C$， ∴ $CE=AE=AB$，

∴ $CD=CE+DE=AB+BD$．



解法二：（补短）延长 CB 到 F，使 $BF=AB$， 连接 AF,

∴ $\angle F=\angle BAF=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle C$，

∵ $AD\perp BC$，

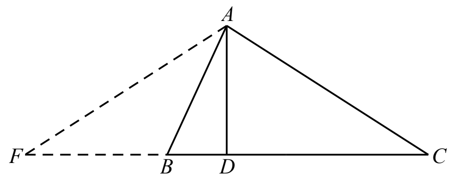
∴ $\angle ADB=\angle ADE=90^{\circ}$，

∴ $\triangle ADF\cong\triangle ADC$，

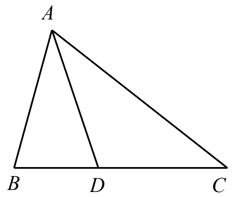
∴ $DF=DC$，

∵ $DF=BF+BD=AB+BD$，

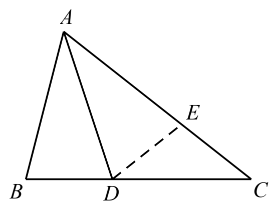
∴ $CD=AB+BD$．



例 2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=2\angle C$， $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D．求证： $AB+BD=AC$．



方法一：（截长）在 AC 上截取 $AB=AE$， 连接 DE．



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AED$ 中

$AB = AE$， $\angle BAD = \angle EAD$， $AD = AD$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle AED$

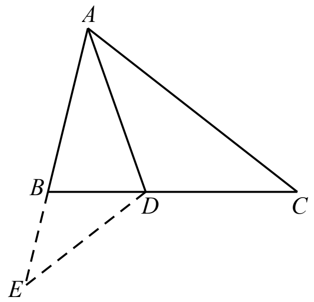
∴ $BD = ED$， $\angle B = \angle AED$

又∵ $\angle AED = \angle EDC + \angle C = \angle B = 2\angle C$

∴ $\angle EDC = \angle C$， ∴ $ED = EC$

∴ $AB + BD = AC$.

方法二：（补短）延长 AB 到点 E 使得 $AC = AE$， 连接 DE .



在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中， $AE = AC$， $\angle EAD = \angle CAD$， $AD = AD$

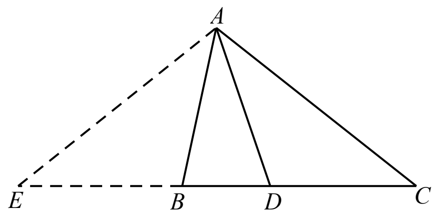
∴ $\triangle AED \cong \triangle ACD$， ∴ $\angle C = \angle E$

又∵ $\angle ABC = \angle E + \angle BDE = 2\angle C = 2\angle BDE$

∴ $\angle E = \angle BDE$ ∴ $BE = BD$，

∴ $AB + BD = AC$.

方法三：（补短）延长 DB 到点 E 使得 $AB = BE$， 连接 AE



则有 $\angle EAB = \angle E$， $\angle ABC = \angle E + \angle EAB = 2\angle E$

又∵ $\angle ABC = 2\angle C$， ∴ $\angle C = \angle E$ ∴ $AE = AC$

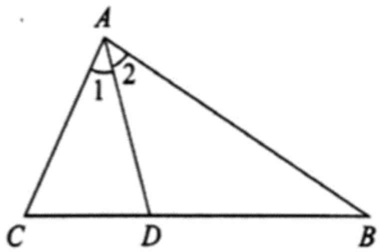
$\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle E + \angle DAC = \angle C + \angle DAC = \angle ADE$

∴ $AE = DE$， ∴ $AB + BD = EB + BD = ED = AE = AC$

∴*AB+BD=AC*

若题目条件或求证结论中含有“ $a = b + c$ ”的条件，需要添加辅助线时多考虑“截长补短”.建议教师此题把 3 种解法都讲一下，方便学生更加深刻理解这种辅助线添加方法.

【变式 1】如图，已知在△ABC 中，∠C=2∠B,∠1=∠2，求证：AB=AC+CD



解析：在 AB 上取一点 E,使 AE=AC,

连接 DE,

∵AE=AC,∠1=∠2，AD=AD

∴△ACD≌△AED

∴CD=DE,∠C=∠3

∵∠C=2∠B

∴∠3=2∠B=∠4+∠B

∴∠4=∠B，∴DE=BE,CD=BE

∵AB=AE+BE

∴AB=AC+CD

【变式 2】如图，AC 平分∠BAD，CE⊥AB 于点 E，∠B+∠D=180°，求证：AE=AD+BE.

解析：如图，在 EA 上取点 F,使 EF=BE,连接 CF,

∵CE⊥AB

∴CF=CB

∠CFB=∠B

∵∠AFC+∠CFB=180°，∠D+∠B=180°

∴∠D=∠AFC

∵AC 平分∠BAD

即∠DAC=∠FAC

在△ACD 和△ACF 中

∠D=∠AFC

∠DAC=∠FAC

AC=AC

∴ACD≌△ACF（AAS）

∴AD=AF

∴AE=AF+EF=AD+BE

【变式 3】如图所示，AB∥CD,BE,CE 分别是∠ABC,∠BCD 的平分线，点 E 在 AD 上，求证：BC=AB+CD.

解析：

在 BC 上取点 F，使 BF=AB

∵BE,CE 分别是∠ABC,∠BCD 的平分线

∴∠ABE=∠FBE,∠BCE=∠DCE

∵AB∥CD

∴∠A+∠D=180°

在△ABE 和△FBE 中

AB=FB

∠ABE=∠FBE

BE=BE

∴△ABE≌△FBE（SAS）

∴∠A=∠BFE

∴∠BFE+∠D=180°

∵∠BFE+∠EFC=180°

∴∠EFC=∠D

在△EFC 和△EDC 中，

∠EFC=∠D

∠BCE=∠DCE

CE=CE

∴△EFC≌△EDC（AAS）

∴CF=CD

∵BC=BF+CF

∴BC=AB+CD

【变式 4】如图，在△ABC 中，∠B=60°，△ABC 的角平分线 AD、CE 相交于点 O，求证：AE+CE=AC.

解析：

由题意可得∠AOC=120°

∴∠AOE=∠DOC=180°-∠AOC=180°-120°=60°

在 AC 上截取 AF=AE，连接 OF，如图

在△AOE 和△AOF 中，

AE=AF

∠OAE=∠OAF

OA=OA

∴△AOE≌△AOF（SAS）

∴∠AOE=∠AOF，

∴∠AOF=60°

∴∠COF=∠AOC-∠AOF=60°

又∠COD=60°，

∴∠COD=∠COF

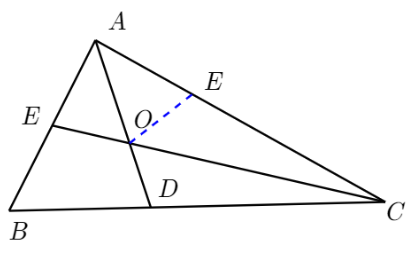
同理可得：△COD≌△COF（ASA）

∴CD=CF

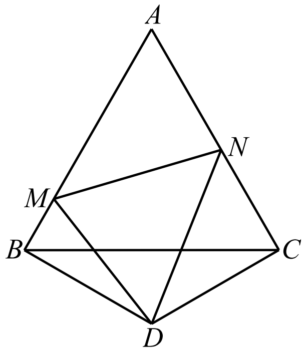
又∵AF=AE

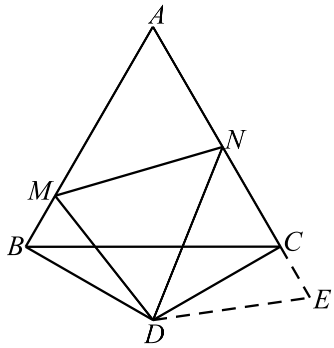
∴AC=AF+CF=AE+CD

即 AE+CD=AC



【变式 5】如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC=120°$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60° 角，角的两边分别交 AB 于 M，交 AC 于 N，连接 MN，求证：$MN=BM+CN$.





延长 AC 到 E 点，使 $CE = BM$ ，连接 DE，由题意可知

$\angle ABC = \angle ACB = 60°$ ，$\angle DBC = \angle DCB = 30°$ ，$AB = AC$ ，$BD = CD$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 90°$ ，$\therefore \angle ECD = \angle ABD = 90°$ ，$\therefore \triangle BMD \cong \triangle CED$ ，

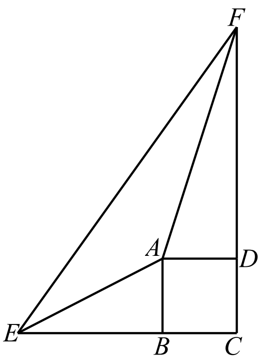
$\therefore \angle BDM = \angle CDE$ ，$MD = ED$ ，

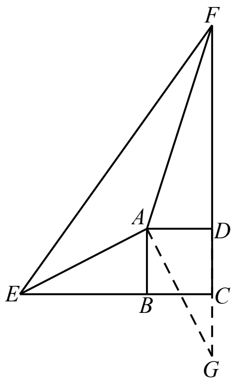
Q $\angle MDN = 60°$ ，$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60°$ ，$\therefore \angle EDN = 60°$ ，

$\therefore \triangle MDN \cong \triangle EDN$ ，$\therefore MN = EN = CN + CE = BM + CN$.

【变式 6】已知四边形 $ABCD$ 是正方形，E、F 分别在 CB、CD 的延长线上，$\angle EAF = 135°$.

求证：$BE + DF = EF$.





延长 FD 到 G，使 $DG = BE$，连接 AG，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB = AD$ ，$\angle ABE = \angle ADC = 90°$ ，

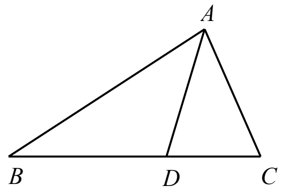
∴ $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，∴ $AE = AG$ ，$\angle EAB = \angle GAD$ ，

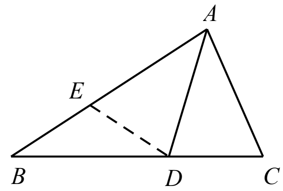
∴ $\angle EAG = 90°$ ，∵ $\angle EAF = 135°$ ，

∴ $\angle FAG = 135°$ ，∴ $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，

∴ $EF = FD + DG = DF + BE$.

例 3.在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D ，$AB = AC + CD$ ，$\angle B = 40°$ ，求 $\angle C$ 的大小.





在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE .

∵ $AE=AC$ ， $\angle BAD=\angle CAD$ ， $AD=AD$ ，

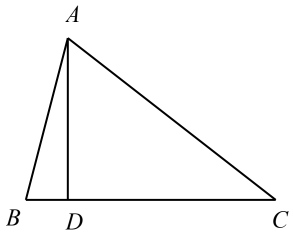
∴ $\triangle ACD\cong\triangle AED$ ，

∴ $\angle C=\angle AED$ ， $CD=DE$ ，

∵ $AB=AC+CD$ ， $AE=AC$ ， ∴ $CD=BE=DE$

∴ $\angle EBD=\angle EDB=40^\circ$ ， $\angle C=\angle AED=80^\circ$

例 4．已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=CD-BD$ ， $AD\perp BC$ ，求证： $\angle B=2\angle C$.



方法一：在 DC 上取一点 E ，使 $BD=DE$ ，如图 1，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AED$ 中， $AD\perp BC$ ， $BD=ED$ ， $AD=AD$.

∴ $\triangle ABD\cong\triangle AED$.

∴ $AB=AE$ ， $\angle B=\angle AED$.

又∵ $AE=AB=CD-BD=CD-DE=EC$

∴ $\angle C=\angle EAC$ ，

∴ $\angle C+\angle EAC=\angle AED=2\angle C$

∴ $\angle B=2\angle C$.

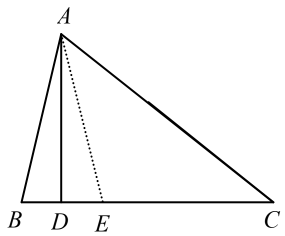


图1

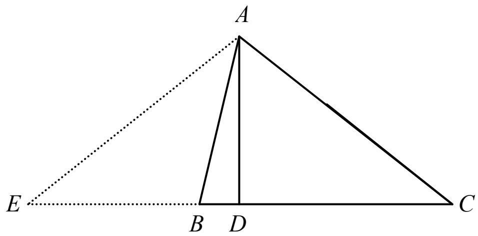


图2

方法二：延长 DB 到点 E ，使 $BE=AB$ ，如图 2，

∴ $\angle E=\angle EAB$.

∵ $AB=CD-BD$ ， ∴ $ED=CD$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中， $AD\perp BC$ ， $ED=CD$ ， $AD=AD$.

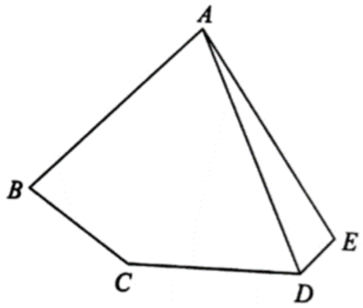
∴ $\triangle AED \cong \triangle ACD$.

∴ $\angle E = \angle C$.

∵ $\angle ABD = 2\angle E$

∴ $\angle B = 2\angle C$.

【变式 1】如图，在五边形 ABCDE 中，AB=AE,BC+DE=CD,∠B+∠E=180°，求证：AD 平分∠CDE.



解析：

延长 CB 至点 F,使 BF=DE,连接 BF=DE,连接 AF,AC

∵∠1+∠2=180°，∠E+∠1=180°

∴∠2=∠E

∵AB=AE,∠2=∠E,BF=DE

∴△ABF≌△AED

∠F=∠4，AF=AD

∵BC+BF=CD

即 FC=CD

又∵AC=AC

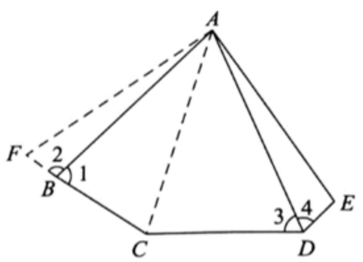
∴△ACF≌△ACD

∴∠F=∠3

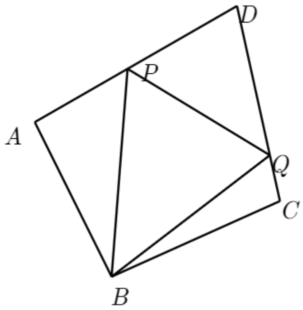
∵∠F=∠4

∴∠3=∠4

∴AD 平分∠CDE.



【变式2】已知四边形ABCD中，∠ABC+∠ADC=180°，AB=BC如图2，点P,Q分别在线段AD,DC上，满足PQ=AP+CQ,求证：∠PBQ=90°-$\frac{1}{2}$∠ADC



解析：

如图2，延长DC，在上面找一点K，使得CK=AP，连接BK,

∵∠ABC+∠ADC=180°

∴∠BAD+∠BCD=180°

∵∠BCD+∠BCK=180°

∴∠BAD=∠BCK

在△BAP和△BKC中

AP=CK

∠BAP=∠BCK

AB=BC

∴△BPA≌△BKC（SAS）

∴∠ABP=∠CBK,BP=BK

∵PQ=AP+CQ

∴PQ=QK

∵在△BPQ和△BKQ中

BP=BK

BQ=BQ

PQ=KQ

∴△BPQ≌△BKQ(SSS)

∴∠PBQ=∠KBQ

$\therefore \angle PBQ=\frac{1}{2}\angle ABC$

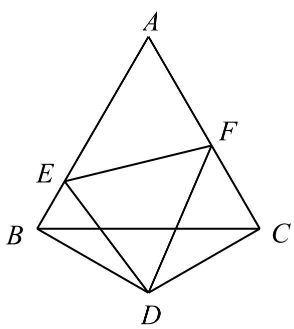
$\because \angle ABC+\angle ADC=180°$

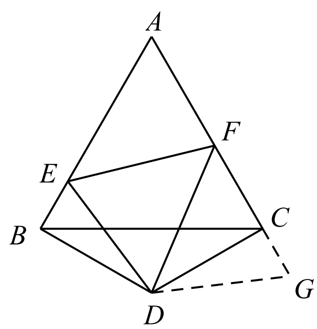
$\therefore \angle ABC=180°-\angle ADC$

$\therefore \frac{1}{2}\angle ABC=90°-\frac{1}{2}\angle ADC$

$\therefore \angle PBQ=90°-\frac{1}{2}\angle ADC$

例 5.正三角形 *ABC* 中，*E* 在 *AB* 上，*F* 在 *AC* 上∠*EDF*=60°，*DB*=*DC*，∠*BDC*=120°，请问现在 *EF*、*BE*、*CF* 又有什么数量关系？





数量关系为：*EF*=*BE*+*FC*，理由如下

延长 *AC* 到点 *G*，使得 *CG*=*BE*，连接 *DG*

由△*ABC* 是正三角形得：∠*ABC*=∠*ACB*=60°

又∵*DB*=*DC*，∠*BDC*=120°，∴∠*DBC*=∠*DCB*=30°

∴∠*DBE*=∠*ABC*+∠*DBC*=60°+30°=90°，∠*ACD*=∠*ACB*+∠*DCB*=60°+30°=90°

∴∠*GCD*=180°−∠*ACD*=90°

∴∠*DBE*=∠*DCG*=90°

又∵*DB*=*DC*，*BE*=*CG*，∴△*DBE* ≌△*DCG*（SAS）

∴∠*EDB*=∠*GDC*，*DE*=*DG*

又∵∠*DBC*=120°=∠*EDB*+∠*EDC*=∠*GDC*+∠*EDC*=∠*EDG*

∴∠*GDF*=∠*EDG*−∠*EDF*=120−60°=60°

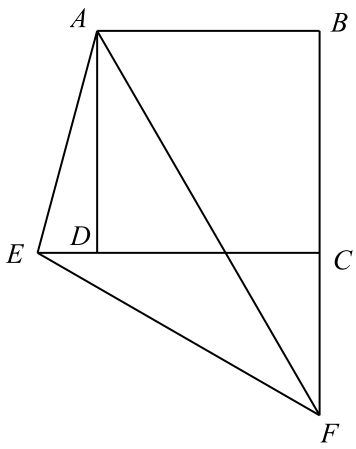
∴∠*GDF*=∠*EDF*=60°

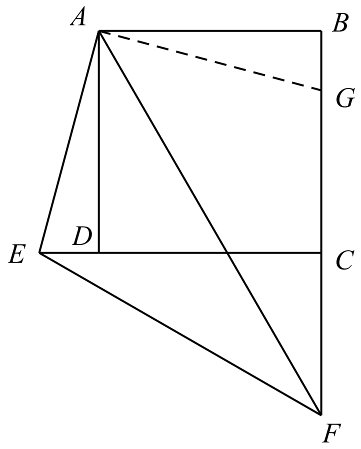
又∵*DG*=*DE*，*DF*=*DF*

∴△*GDF* ≌△*EDF*（SAS）

∴*EF*=*GF*=*CG*+*FC*=*BE*+*FC*

【变式 1】正方形 *ABCD* 中，点 *E* 在 *CD* 延长线上，点 *F* 在 *BC* 延长线上，∠*EAF*=45°，请问现在 *EF*、*DE*、*BF* 又有什么数量关系？





数量关系为：*EF*=*BF*–*DE*．理由如下：

在 *BC* 上截取 *BG*，使得 *BG*=*DF*，连接 *AG*

由四边形 *ABCD* 是正方形得

∠*ADE*=∠*ABG*=90°，*AD*=*AB*

又 *DE*=*BG*

∴△*ADE* ≌△*ABG*（SAS）

∴∠*EAD*=∠*GAB*，*AE*=*AG*

由四边形 *ABCD* 是正方形得

∠*DAB*=90°=∠*DAG*+∠*GAB*=∠*DAG*+∠*EAD*=∠*GAE*

∴∠*GAF*=∠*GAE*– ∠*EAF*=90°–45°=45°

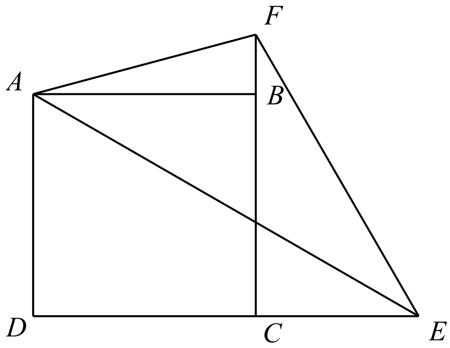
∴∠*GAF*=∠*EAF*=45°

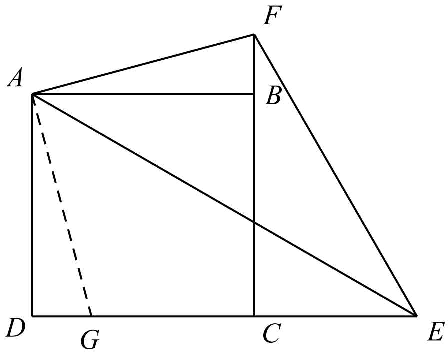
又∵*AG*=*AE*，*AF*=*AF*

∴△*EAF* ≌△*GAF*（SAS）

∴*EF*=*GF*=*BF*–*BG*=*BF*–*DE*

【变式 2】正方形 *ABCD* 中，点 *E* 在 *DC* 延长线上，点 *F* 在 *CB* 延长线上，∠*EAF*=45°，请问现在 *EF*、*DE*、*BF* 又有什么数量关系？





数量关系为：$EF=DE-BF$.理由如下：

在 DC 上截取 DG，使得 $DG=BF$，连接 AG

由四边形 $ABCD$ 是正方形得

$\angle ADG=\angle ABF=90°$，$AD=AB$

又∵$DG=BF$

∴$\triangle ADG \cong \triangle ABF$（SAS）

∴$\angle GAD=\angle FAB$，$AG=AF$

由四边形 $ABCD$ 是正方形得

$\angle DAB=90°=\angle DAG+\angle GAB=\angle BAF+\angle GAB=\angle GAF$

∴$\angle GAE=\angle GAF-\angle EAF=90°-45°=45°$

∴$\angle GAE=\angle FAE=45°$

又∵$AG=AF$，$AE=AE$

∴$\triangle EAG \cong \triangle EAF$（SAS）

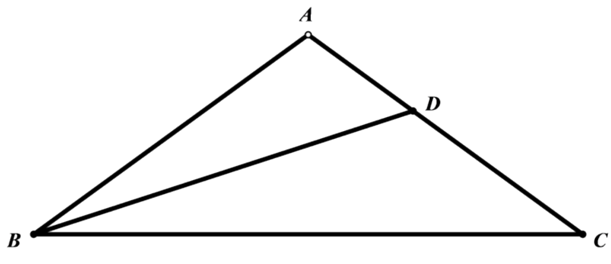
∴$EF=EG=ED-GD=DE-BF$

【过关检测】

一、解答题

1．（2022秋·全国·八年级专题练习）如图，已知$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=108°$，BD平分$\angle ABC$．

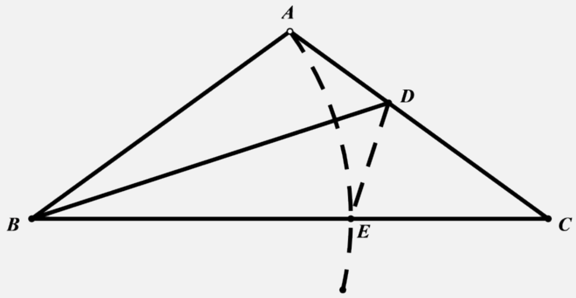
求证：$BC=AB+CD$．



【答案】证明见解析

【分析】在 BC 上截取点 E，并使得 $BE=BA$，连接 DE，证明△ABD≌△EBD，得到∠DEB=∠BAD=108°，进一步计算出∠DEC=∠CDE=72°得到 $CD=CE$ 即可证明.

【详解】证明：在线段 BC 上截取 $BE=BA$，连接 DE，如下图所示：



∵BD 平分∠ABC，∴∠ABD=∠EBD，

在△ABD 和△EBD 中：$\begin{cases} AB=BE \\ \angle ABD=\angle EBD \\ BD=BD \end{cases}$，

∴△ABD≌△EBD(SAS)，

∴∠DEB=∠BAD=108°，

∴∠DEC=180°-108°=72°，又 $AB=AC$，

∴∠C=∠ABC=(180°-108°)÷2=36°，

∴∠CDE=180°-∠C-∠DEC=180°-36°-72°=72°，

∴∠DEC=∠CDE，

∴$CD=CE$，

∴$BC=BE+CE=AB+CD$.

【点睛】本题考查了角平分线的定义，三角形内角和定理，全等三角形的判定与性质，等腰三角形性质等，本题的关键是能在 BC 上截取 BE，并使得 $BE=BA$，这是角平分线辅助线和全等三角形的应用的一种常见作法.

2．（2022秋·浙江·八年级专题练习）如图，已知：在△ABC 中，$\angle B$=60°，CE、AF 是△ABC 的角平分线，交于点 O 求证：$AC=AE+CF$．